Analysis I - Nachklausur

Wintersemester 2004-2005

Matrikelnummer: ______________________________

Vorname: ______________________________

Name: ______________________________

Aufgabe	1	
Aufgabe	2	
Aufgabe	3	
Aufgabe	4	
Aufgabe	5	
Aufgabe	6	
Aufgabe	7	
Aufgabe	8	
Aufgabe	9	
Aufgabe	10	
Aufgabe	11	
Aufgabe	12	
Summe		

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 1 8 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls diese existieren):

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x-1}\quad,\quad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}\quad,\quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^x-1}\quad,\quad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\,.$$

Lösung

Zu a): Da Polynome stetig sind streben $x^2+1\to 0^2+1=1$ und $x-1\to 0-1=-1$ für $x\to 0$. Da beide Werte endlich und der Nennergrenzwert nicht Null ist folgt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x-1}=-1$ nach den Rechenregeln.

Zu b): Da Nenner und Zähler jeweils gegen ∞ gehen für $x\to\infty$ können die Rechenregeln für Grenzwerte nicht benutzt werden. Wir betrachten (mit Hilfe der Ableitungsregeln für Polynome) daher den Grenzwert

$$\frac{(x^2+1)'}{(x-1)'}=\frac{2x}{1}=2x\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty\,.$$

Da Zähler und Nenner (als Polynome) differenzierbar sind, beide gegen ∞ konvergieren und der obige (uneigentliche) Grenzwert existiert folgt mit Satz 5.9.1, dass $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\infty$ ist.

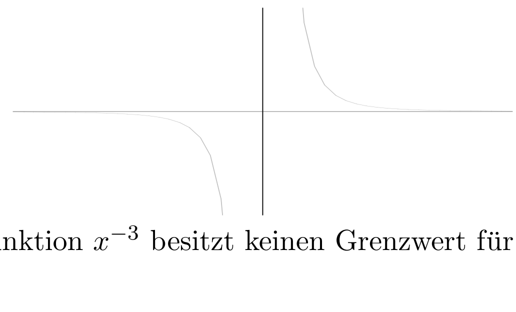
Zu c): Zähler und Nenner sind definiert und jeweils differenzierbar auf $(-1,1)$. Der Zähler existiert nicht für $x\leq -1$, da aber der Limes für $x\to 0$ gefragt ist genügt es, eine Umgebung von 0, beispielsweise $(-1,1)$, zu betrachten, auf der Zähler und Nenner differenzierbar sind. Für $x\to 0$ geht der Zähler $\log(1+x)$ wegen der Stetigkeit des Logarithmus gegen $\log(1+0)=0$, und der Nenner wegen der Stetigkeit von e^x gegen $e^0-1=0$. Damit können die Rechenregeln für Grenzwerte direkt nicht angewendet werden. Nach der Kettenregel sind Zähler und Nenner differenzierbar auf $(-1,1)$, und es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+x))'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)'\cdot\frac{1}{1+x}}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)e^x}\underset{\text{stetig}}{=}\frac{1}{(1+0)e^0}=1\,.$$

Nach Satz 5.9.1 ist also $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^x-1}=1$.

Zu d): es existiert kein Grenzwert für $x\to 0$, da die einseitigen Grenzwerte verschieden sind:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^3}=\infty\text{ und }\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{(-x)^3}=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{x^3}\right)=-\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^3}=-\infty\,.$$



Die Funktion x^{-3} besitzt keinen Grenzwert für $x\to 0$.

Analysis I - Nachklausur 24.03.2005

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 2 7 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Zeigen Sie mit Hilfe der Taylortheorie, dass aus der Voraussetzung

$$\exists k \in \mathbb{N} : \ f^{(k)}(x) \ = \ 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom ist.

Lösung

Da f beliebig oft differenzierbar ist folgt nach Satz 5.6.2 für $x_0 = 0$, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) \ = \ T_n(x) \ + \ R_n(x) \ \text{ ist mit } T_n(x) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j \text{ und Restglied } R_n(x) \ = \ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^n$$

für ein $\xi = \xi(f, x, n, x_0)$. Wählen wir n größer als das k aus der Aufgabenstellung, so ist $f^{(n)}(\xi) = 0$ nach Voraussetzung, und zwar für alle ξ und damit für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt, dass für dieses n gilt: $f(x) = T_n(x) + R_n(x) = T_n(x)$, also ist $f(x)$ das Polynom

$$f(x) \ = \ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \text{ mit Koeffizienten } a_j \ = \ \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \ ,$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Analysis I - Nachklausur 24.03.2005

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 3 5 Punkte

Zeigen Sie, dass die Relation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Q}: \; x = q + y$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist. Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}$ durch $\sim$ in mindestens zwei Äquivalenzklassen aufgeteilt wird, d. h. dass die zu $\sim$ gehörende Partition von $\mathbb{R}$ mindestens zwei verschiedene Mengen enthält.

Lösung

Es sind zunächst die Axiome für Äquivalenzrelationen zu überprüfen:

Reflexivität:
Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $x = x + q$ mit $q = 0 \in \mathbb{Q}$, also $x \sim x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Symmetrie:
Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \sim y$, dann gibt es nach Definition der Relation ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x = y + q$. Daraus folgt dann $y = x + q'$ mit $q' = -q \in \mathbb{Q}$, also gilt auch $y \sim x$.

Transitivität:
Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig mit $x \sim y$ und $y \sim z$, dann gibt es nach Definition $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $x = y + q$ und $y = z + q'$. Damit ist dann auch $x = z + q''$ für $q'' = q + q'$, also gilt auch $x \sim z$.

Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, die $\mathbb{R}$ partitioniert in die Mengen

$$T_x \; = \; \{y \in \; R \mid \exists q \in \mathbb{Q}: \; x = y + q\} \; = \; \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Es ist noch zu zeigen, dass es mindestens zwei verschiedene derartige Mengen gibt, d. h. dass es $x, y \in \mathbb{R}$ gibt mit $T_x \neq T_y$. Dazu kann man beispielsweise $x = 0$ und $y = \sqrt{2}$ wählen. Dann ist

$$T_x \; = \; \{0 + q \mid q \in \mathbb{Q}\} \; = \; \mathbb{Q}$$

gerade die Menge der rationalen Zahlen. Laut Vorlesung liegt $y = \sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$, aber in T_y, also sind T_x und T_y verschieden.

Analysis I - Nachklausur 24.03.2005

Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 4 8 Punkte

Prüfen Sie, ob diese Folgen konvergieren, und berechnen Sie ggf. den Grenzwert:

$$\text{a) } a_n = \frac{1-n^2}{4+n^2} \quad , \quad \text{b) } b_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \quad , \quad \text{c) } c_n = \frac{3^n-1}{2^n+1} \, .$$

Lösung

Zu a): Nach den Rechenregeln für Folgen gilt

$$a_n = \frac{1-n^2}{4+n^2} \overset{:n^2}{\underset{:n^2}{=}} \frac{-1+\overbrace{n^{-2}}^{\to 0}}{1+4\underbrace{n^{-2}}_{\to 0}} \longrightarrow \frac{-1+0}{1+0} = -1 \, .$$

Zu b): Es gilt

$$b_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+1+2n}} = \sqrt{\frac{n^2+1+2n-2n}{n^2+1+2n}} = \sqrt{1-\frac{2n}{n^2+1+2n}} \, .$$

Nach den Rechenregeln für Folgen gilt

$$\frac{2n}{n^2+1+2n} \overset{:n^2}{\underset{:n^2}{=}} \frac{2n^{-1}}{1+n^{-2}+2n^{-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{1+0+0} = 0 \, .$$

Wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel auf $(0,\infty)$ folgt

$$b_n = \sqrt{1-\frac{2n}{n^2+1+2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1-0} = 1 \, .$$

Zu c): Es sei

$$f(x) = \frac{3^x-1}{2^x+1} \quad x \in (0,\infty)$$

gesetzt. Die Funktion f ist stetig, da alle ihre Teilfunktionen stetig sind. Dabei sind $2^x = e^{x\cdot\log(2)}$ und $3^x = e^{x\cdots\log(3)}$ stetig nach Vorlesung. Für $x \to \infty$ gehen die (streng monoton wachsenden) Teilfunktionen in Zähler und Nenner jeweils gegen ∞. Separates Ableiten nach der Kettenregel ergibt

$$\frac{(3^x-1)'}{(2^x+1)'} = \frac{(e^{x\cdot\log(3)}-1)'}{(e^{x\cdot\log(2)}+1)'} = \frac{\log(3)\cdot e^{x\cdot\log(3)}}{\log(2)\cdot e^{x\cdot\log(2)}} = \frac{\log(3)}{\log(2)}\cdot e^{x\cdot(\log(3)-\log(2))} = \frac{\log(3)}{\log(2)}\cdot e^{x\cdot\log(\frac{3}{2})} \, ,$$

dieser Ausdruck geht gegen ∞ für $x \to \infty$ wegen $\log(\frac{3}{2}) > 0$, da $e^{cx} = (e^x)^c$ für jedes $c > 0$ gegen ∞ strebt für $x \to \infty$. Nach Satz 5.9.1 konvergiert $f(x)$ gegen ∞ für $x \to \infty$. Damit ist nach Satz 4.5.5 auch $c_n = f(n) \to \infty$ für $n \to \infty$.

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 5 10 Punkte

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad , \quad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)^k \quad , \quad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}x)^k \quad , \quad \text{d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(x^k) \; .$$

Lösung

Zu a): Für $x = 1$ ist $\sum \frac{1}{k} x^k = \sum \frac{1}{k}$ divergent (harmonische Reihe), also ist $R \leq 1$. Für $x = -1$ ist $\sum \frac{1}{k} x^k = \sum (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergent (alternierende harmonische Reihe, siehe auch Beispiel 3.2.3), also ist $R \geq 1$. Insgesamt ist der Konvergenzradius damit $R = 1$.

Zu b): Es gilt $(x^k)^k = x^{k^2}$. Einsetzen in das Quotientenkriterium ergibt

$$\left| \frac{x^{(k+1)^2}}{x^{k^2}} \right| = \left| \frac{x^{k^2+2k+1}}{x^{k^2}} \right| = |x|^{k^2+2k+1-k^2} = |x|^{2k+1} = e^{(2k+1)\cdot \log|x|} \; .$$

Für $|x| > 1$ bzw. $\log|x| > 0$ geht dieser Ausdruck gegen ∞ für $k \to \infty$, für $|x| < 1$ bzw. $\log|x| < 0$ aber gegen 0. Damit sind auch Limes inferior/superior festgelegt, und nach den Teilen (i) und (ii) des Quotientenkriteriums ist die Reihe für $|x| > 1$ divergent und für $|x| < 1$ konvergent, woraus $R = 1$ folgt.

Zu c): Umformen ergibt $\sum(\frac{x}{)}^k = \sum 2^{-k} x^k$, also sind die Koeffizienten der Potenzreihe gerade $c_k = 2^{-k}$. Einsetzen in den Satz von Cauchy-Hadamard ergibt

$$R^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^{-k}} = \limsup_{k\to\infty} 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

und damit $R = 2$.

Zu d): Die geometrische $\sum x^k$ Reihe besitzt Konvergenzradius 1 laut Vorlesung. Für $|x| < 1$ ist dann auch $\sum \frac{1}{2} x^k = \frac{1}{2} \sum x^k$ konvergent nach den Rechenregeln für Angenommen $\sum \frac{1}{2} x^k$ konvergiere für ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$, dann wieder nach den Rechenregeln auch $\sum \frac{1}{2} x^k = \frac{1}{2} \sum x^k$, im Widerspruch dazu, dass die geometrische Reihe für $|x| > 1$ divergent ist, also muss auch $\sum \frac{1}{2} x^k$ für alle $|x| > 1$ divergent sein. Damit ist $R = 1$ auch für die Reihe aus d).

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 6 12 Punkte

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob die gegebenen Aussagen wahr oder falsch sind. Für jedes richtig gesetzte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz bekommen Sie einen Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird jedoch in keinem Fall mit einer negativen Anzahl Punkte bewertet. Sie können auch in einer Zeile nichts ankreuzen.

Sie müssen ihre Aussagen nicht beweisen.

Behauptung	**Wahr**	**Falsch**
Jede integrierbare Funktion ist stetig.	☐	☐
Die äquidistante Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n})$ von $[0,1]$ ist ausgezeichnet.	☐	☐
Jede beschränkte Nullfolge (a_n) ist monoton.	☐	☐
Sind $f_n \to f$ und $g_n \to g$ gleichmäßig konvergent, so auch $(f_n + g_n) \to (f + g)$.	☐	☐
Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f auch injektiv.	☐	☐
Für jedes $r \geq 0$ gibt es eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = r$.	☐	☐
Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt, so ist auch f beschränkt.	☐	☐
Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar, so ist auch f' beschränkt.	☐	☐
Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und das Bild $f(\mathbb{R})$ endlich, so enthält $f(\mathbb{R})$ nur ein Element.	☐	☐
Ist $x_n \to x$ eine konvergente Zahlenfolge mit $x_n \in [a,b]$ für alle n, so ist $x \in [a,b]$.	☐	☐
Das Komplement beschränkter kompakter Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist offen.	☐	☐
Das Komplement beschränkter offener Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt.	☐	☐

Lösung

Behauptung	Wahr	Falsch
Jede integrierbare Funktion ist stetig.	☐	☒
Die äquidistante Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$ von $[0,1]$ ist ausgezeichnet.	☒	☐
Jede beschränkte Nullfolge (a_n) ist monoton.	☐	☒
Sind $f_n \to f$ und $g_n \to g$ gleichmäßig konvergent, so auch $(f_n + g_n) \to (f+g)$.	☒	☐
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f auch injektiv.	☐	☒
Für jedes $r \geq 0$ gibt es eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = r$.	☒	☐
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt, so ist auch f beschränkt.	☐	☒
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar, so ist auch f' beschränkt.	☐	☒
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und das Bild $f(\mathbb{R})$ endlich, so enthält $f(\mathbb{R})$ nur ein Element.	☒	☐
Ist $x_n \to x$ eine konvergente Zahlenfolge mit $x_n \in [a,b]$ für alle n, so ist $x \in [a,b]$.	☒	☐
Das Komplement beschränkter kompakter Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist offen.	☒	☐
Das Komplement beschränkter offener Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt.	☐	☒

Jede integrierbare Funktion ist stetig: **FALSCH**
Satz 6.1.8 darf nicht umgedreht werden. Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 1$ für $x = 0$. Diese Funktion ist auf $[-1,1]$ integrierbar mit Integralwert Null, aber nicht stetig.

Die äquidistante Zerlegungsfolge $\mathcal{Z}_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$ *von* $[0,1]$ *ist ausgezeichnet*: **WAHR**
Denn es ist $\eta(\mathcal{Z}_n) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

Jede beschränkte Nullfolge (a_n) *ist monoton*: **FALSCH**
Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Sind $f_n \to f$ *und* $g_n \to g$ *gleichmäßig konvergent, so auch* $(f_n + g_n) \to (f+g)$: **WAHR**
Das folgt aus der Dreiecksungleichung. Es seien für beliebiges $\varepsilon > 0$ Startwerte $n_1 = n_0(\frac{1}{2}\varepsilon)$ und $n_2 = n_0(\frac{1}{2}\varepsilon)$ so gewählt, dass für alle $x \in I$ und alle $n > n_1$ die Abschätzung $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und für alle $x \in I$ und $n > n_2$ die Abschätzung $|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ gilt. Solche n_1, n_2 gibt es nach Definition der glm. Konvergenzen $f_n \to f$ und $g_n \to g$. Dann gilt für alle $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$ und alle $x \in I$ die Abschätzung

$$|(f_n(x) - g_n(x)) \;-\; (f(x) - g(x))| \;=\; |(f_n(x) - f(x)) \;+\; (g_n(x) - g(x))|$$

$$\underset{\text{DU}}{\leq} \; |f_n(x) - f(x)| \;+\; |g_n(x) - g(x)| \underset{n > n_1, n_2}{\leq} \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \;=\; \varepsilon\,.$$

Also ist auch die Summe der Funktionenfolgen gleichmäßig konvergent.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton, so ist* f *auch injektiv*: **FALSCH**
Das gilt nur für strenge Monotonie. Gegenbeispiel: $f(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Für jedes $r \geq 0$ *gibt es eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R = r$: **WAHR**
Für $r = 0$ ist eine Potenzreihe gesucht, die nur im Nullpunkt konvergiert, beispielsweise $\sum k! x^k$, wie man leicht mit dem Quotientenkriterium sieht. Für $r > 0$ ist $\sum(\frac{1}{r}x)^k$ eine Reihe mit Konvergenzradius

$R = r$, vgl. dazu auch Aufgabe 5c).

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt, so ist auch f beschränkt: **FALSCH**
Gegenbeispiel: $f(x) = x$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ aber $f'(x) = 1$ beschränkt.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar, so ist auch f' beschränkt: **FALSCH**
Gegenbeispiel: $f(x) = \sin(x^2) \in [-1, 1]$ mit $f'(x) = 2x\cos(x^2)$ und $f'(\sqrt{2\pi n}) \to \infty$ für $n \to \infty$.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und das Bild $f(\mathbb{R})$ endlich, so enthält $f(\mathbb{R})$ nur ein Element: **WAHR**
Angenommen es gibt zwei verschiedene Bildelemente $a \neq b$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es dann $x_1 \in \mathbb{R}$ geben mit $f(x_1) = \frac{1}{2}(a + b)$, und $f(x_1)$ ist (als Mittelpunkt) von a und b verschieden. Ebenso existiert x_2 mit $f(x_2) = \frac{1}{2}(f(x_1) + a)$, x_3 mit $f(x_3) = \frac{1}{2}(f(x_2) + a)$ und so weiter. Damit liegen die unendlich vielen Bildelemente $f(x_j)$ im Bildbereich, die offensichtlich voneinander verschieden sind, aber $f(\mathbb{R})$ sollte endlich sein. Also kann es eine solche Funktion nicht geben.

Ist $x_n \to x$ eine konvergente Zahlenfolge mit $x_n \in [a, b]$ für alle n, so ist $x \in [a, b]$: **WAHR**
Denn das Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen, und enthält damit alle möglichen Grenzwerte von Folgen, die in $[a, b]$ liegen.

Das Komplement beschränkter kompakter Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist offen: **WAHR**
Denn kompakte Mengen sind abgeschlossen, damit ist deren Komplement offen. Die Bezeichnung „beschränkt und kompakt“ ist irreführend, da kompakte Mengen immer beschränkt sind.

Das Komplement beschränkter offener Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt: **FALSCH**
Der Begriff „offen“ geht durch Komplementierung zwar in „abgeschlossen“ über, aber „beschränkt“ geht in „nicht beschränkt“ über. Beispiel: $(0, 1)$ ist offen und beschränkt, das Komplement $(\infty, 0] \cup [1, \infty)$ ist abgeschlossen aber unbeschränkt, und damit nicht kompakt.

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 7 9 Punkte

Die folgenden Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (brauchen Sie nicht zu zeigen). Bestimmen Sie jeweils die Teilmenge von $\mathbb{R}$, auf der die gegebenen Funktionen differenzierbar sind (mit Beweis), und berechnen Sie darauf die erste Ableitung:

$$\text{a) } f(x) = \sin(\cos(x)) \quad , \quad \text{b) } g(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} \quad , \quad \text{c) } h(x) = ((e^x)^x)^x \, .$$

Lösung

Zu a): Laut Vorlesung sind $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Nach der Kettenregel ist also

$$f'(x) = (\cos(x))' \cdot \cos(\cos(x)) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$$

auf ganz $\mathbb{R}$.

Zu b): Das Polynom $x^2-x+\frac{1}{4}$ lässt sich nach der binomischen Formel umformen zu $x^2-x+\frac{1}{4} = (x-\frac{1}{2})^2$. Damit ist

$$g(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right| \, .$$

Nach der Kettenregel ist diese Funktion in allen $x \in \mathbb{R}$ mit $x - \frac{1}{2} \neq 0$ differenzierbar, da der Betrag auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar zur Signumfunktion ist. Der Differentiationsbereich ist also $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, und die dortige Ableitung ist

$$g'(x) = (|x - \frac{1}{2}|)' = (x - \frac{1}{2})' \cdot \operatorname{sgn}(x - \frac{1}{2}) = \operatorname{sgn}(x - \frac{1}{2}) \, .$$

Formt man nicht um, sondern wendet die Kettenregel direkt auf $f(x)$ an, kommt das gleiche Ergebnis heraus, nur ist der Differentiationsbereich schwieriger zu zeigen, da mann dann $x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$ nachzuweisen hat.

Zu c): Es ist $h(x) = ((e^x)^x)^x = (e^{x^2})^x = e^{x^3}$. Laut Vorlesung sind x^3 und e^x auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, also auch $h(x)$. Nach der Kettenregel ist

$$h'(x) = (x^3)' \cdot e^{x^3} = 3x^2 \cdot e^{x^3} \, .$$

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 8 10 Punkte

Berechnen Sie die Obersumme von $f(x) = 2^x$ auf dem Intervall $[0,1]$ bzgl. der äquidistanten Zerlegung $\mathcal{Z}_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$.

Lösung

Die Funktion $2^x = e^{x \cdot \log(2)}$ ist wegen $\log(2) > 0$ streng monoton wachsend. Damit gilt

$$\overline{M}_\nu \;=\; \sup\{f(x) \mid x_{\nu-1} \;\leq\; x \;\leq\; x_\nu\} \;=\; f(x_\nu) \;=\; 2^{x_\nu} \;=\; 2^{\frac{\nu}{n}}$$

für $\nu = 1 \ldots n$. Der Abstand $x_\nu - x_{\nu-1}$ zweier Zerlegungspunkte ist $\frac{1}{n}$, also gilt laut Vorlesung

$$\overline{S}(\mathcal{Z}_n) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \overline{M}_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} 2^{\frac{\nu}{n}} \frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{\frac{\nu}{n}} \;=\; \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (\sqrt[n]{2})^\nu \;.$$

Nach der Formel für die endliche geometrische Reihe (Beweis zu Satz 3.2.9) gilt für $w = \sqrt[n]{2}$ dann

$$\overline{S}(\mathcal{Z}_n) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} w^\nu \;=\; \frac{1}{n} \left(\frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} - 1 \right) \;=\; \frac{1}{n} \left(\frac{w^{n+1} - w}{w - 1} \right) \;=\; \frac{1}{n} \left(\frac{2^{\frac{n+1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} - 1} \right) \;.$$

Dabei kommt die -1 im mittleren Term dadurch zustande, dass die Summe nur von 1 bis n läuft, obwohl in Satz 3.2.9 die Summation bei $\nu = 0$ beginnt.

Analysis I - Nachklausur 24.03.2005

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 9 7 Punkte

Überprüfen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{falls} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit auf ganz $\mathbb{R}$.

Lösung

Zunächst sind $f(x) = x$ auf $(-\infty, 1)$ und $f(x) = x^2$ auf $(1, \infty)$ jeweils Polynome und damit stetig, also ist nur die Stetigkeit im Punkt $\xi = 1$ zu überprüfen. Wir benutzen die Grenzwertdefinition nach Satz 4.5.7:

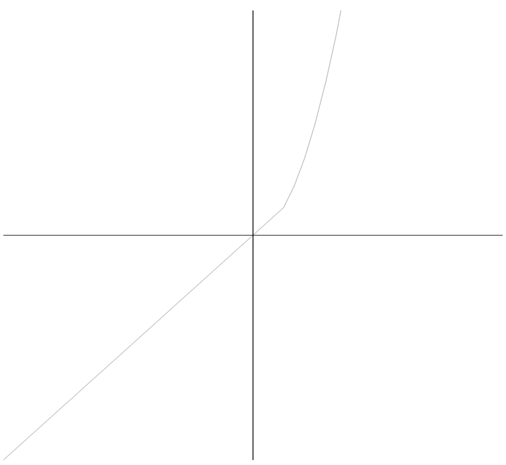
$$\lim_{x\to 1-} f(x) \underset{x<1}{=} \lim_{x\to 1-} x \underset{\text{stetig}}{=} 1 \quad , \quad \lim_{x\to 1+} f(x) \underset{x>1}{=} \lim_{x\to 1+} x^2 \underset{\text{stetig}}{=} 1 \quad , \quad f(1) = 1 \,.$$

Da die einseitigen Grenzwerte existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen, ist f auch stetig im Punkt 1, also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Die Funktion $f(x)$ ist nicht gleichmäßig stetig, da x^2 nicht gleichmäßig stetig ist. Das sieht man so: es sei $\varepsilon > 0$ irgend eine Schranke und $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ noch so klein, dann sei $x \geq 1$ beliebig und $y = x + \frac{1}{2}\delta$. Nun gilt zwar $|x - y| < \delta$, aber

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - (x + \frac{1}{2}\delta)^2| = |x^2 - x^2 - x\delta + \frac{1}{4}\delta^2| = |x\delta + \frac{1}{4}\delta^2| = \delta \cdot |x + \frac{1}{4}\delta| \,.$$

In der Definition der glm. Stetigkeit muss dieser Ausdruck unter ε liegen, und zwar für einmal gewähltes δ, aber alle $x \in \mathbb{R}$. Man sieht sofort, dass durch Wahl eines genügend großen $x \in \mathbb{R}$ dieser Ausdruck aber beliebig groß wird und dadurch jedes $\varepsilon > 0$ übersteigt. Also insgesamt: die Aussage, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist falls $|x - y| < \delta$ gilt ist falsch, d. h. $f(x)$ ist nicht gleichmäßig stetig.



Die Funktion $f(x)$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, da sie für $x \to \infty$ beliebig stark ansteigt.

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 10 6 Punkte

Es sei $E_1 \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge natürlicher Zahlen, $E_2 = \mathbb{R} \backslash E_1$ das Komplement und $E_3 = \{\frac{1}{n} \mid n \in E_1\}$ die Inversenmenge.

(a) Geben Sie an, ob die Mengen E_1, E_2, E_3 jeweils offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

(b) Zeigen Sie von einer der Eigenschaften, dass sie für $E_1 = \mathbb{N}$ nicht mehr gilt.

Sie brauchen Ihre Aussagen aus (a) nicht zu beweisen.

Lösung

Zu a): E_1 ist als endliche Menge nicht offen (da ε-Umgebungen immer unendlich viele Punkte enthalten), aber abgeschlossen und kompakt, da jede konvergente Folge aus E_1 stationär sein muss. Die Menge E_2 ist als Komplement dann offen und nicht abgeschlossen, und damit auch nicht kompakt. Die Menge E_3 ist natürlich auch endlich, und damit nicht offen aber abgeschlossen und kompakt.

Zu b): Die folgenden Eigenschaften gehen verloren (wovon nur eine gezeigt werden muss): $E_1 = \mathbb{N}$ ist nicht mehr kompakt, da nicht mehr beschränkt. $E_3 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht mehr kompakt und auch nicht mehr abgeschlossen, da die darin liegende Folge $(\frac{1}{n})$ den Grenzwert $0 \notin E_3$ besitzt.

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 11 9 Punkte

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ die Aussagen

$$a) \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k \;=\; n \quad , \quad b) \prod_{k=1}^{n} (k+k^2) \;=\; (n!)^2 \cdot (n+1)$$

gelten.

Lösung

Zu a): Induktionsanfang ist für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k \;=\; (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 \;=\; -1 + 2 \;=\; 1 \;=\; n\,.$$

Die Induktionshypothese ist, dass für ein $n \geq 1$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k \;=\; n$$

gilt. Dann folgt für die nachfolgende Aussage durch Abspaltung der letzten beiden Summanden

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k \cdot k \;=\; \sum_{k=1}^{2n+2)} (-1)^k \cdot k \;=\; \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k \;+\; (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2)$$

$$\underset{\text{IH}}{=}\; n + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2) \;=\; n - (2n+1) + 2n + 2 \;=\; n+1$$

und damit die Aussage für $n+1$, womit per Induktion die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt ist.

Zu b): Induktionsanfang ist für $n = 1$

$$\prod_{k=1}^{n} (k+k^2) \;=\; 1 + 1^2) \;=\; 2 \;=\; (n!)^2 \cdot (n+1)\,.$$

Die Induktionshypothese ist, dass für ein $n \geq 1$ die Aussage

$$\prod_{k=1}^{n} (k+k^2) \;=\; (n!)^2 \cdot (n+1)$$

gilt. Dann folgt für die nachfolgende Aussage durch Abspaltung des letzten Faktors

$$\prod_{k=1}^{n+1} (k+k^2) \;=\; \left(\prod_{k=1}^{n} (k+k^2) \right) \cdot ((n+1) + (n+1)^2)$$

$$\underset{\text{IH}}{=}\; (n!)^2 \cdot (n+1) \cdot ((n+1) + (n+1)^2) \;=\; (n!) \cdot (n!) \cdot (n+1)^2 \cdot (1 + (n+1))$$

$$= ((n+1)!) \cdot ((n+1)!) \cdot ((n+1)+1) = ((n+1)!)^2 \cdot ((n+1)+1)$$

und damit die Aussage für $n+1$. Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Analysis I - Nachklausur 24.03.2005

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 12 9 Punkte

Überprüfen Sie die Funktionenfolge

$$f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz gegen $f(x) = 1$ auf $I = [1, e]$.

Lösung

Es sei $x \in [1, e]$ fest, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(x)} \underset{(e^x \text{ stetig}, x \text{ fest})}{=} e^{0\cdot\log(x)} = 1 = f(x)\,.$$

Also konvergiert $f_n \to f$ punktweise. Für festes n ist die Funktion $f_n(x) = \sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\log(x)}$ streng monoton wachsend in $x \in [1, e]$, da Exponentialfunktion und Logarithmus streng monoton wachsend sind. Zudem ist $\log(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, e]$, damit auch $\frac{1}{n}\log(x) \geq 0$, woraus $f_n(x) = e^{\frac{1}{n}\log(x)} \geq 1$ folgt. Damit gilt insgesamt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in [1, e]$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 1| = f_n(x) - 1 \leq f_n(e) - 1 = e^{\frac{1}{n}\log(e)} - 1 = e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^0 - 1 = 0\,.$$

Dies ist zunächst nur eine Konvergenzaussage über die Zahlenfolge $|f_n(x) - f(x)|$, und sie lautet ausgeschrieben:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ falls } n > n_0\,.$$

Diese Aussage ist von x unabhängig, und kann daher auch wie folgt geschrieben werden:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall x \in [1, e] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ falls } n > n_0\,.$$

Damit ist $f_n \to f$ gleichmäßig konvergent.