Matrikelnummer: __________

Aufgabe 1 6 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \cdot \sin(x) & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Lösung

Es sei $x \neq 0$ beliebig, dann gilt nach Definition 5.7.1

$$f(x) = x^{-1} \cdot \sin x = x^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \underset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}}_{=:g(x)} .$$

Dabei darf x^{-1} im Schritt $(*)$ nach den Rechenregeln für Reihen in die Sinus-Reihe gezogen werden, da diese konvergent auf ganz $\mathbb{R}$ ist (Satz 5.7.1). Die Potenzreihe $g(x)$ besitzt den Konvergenzradius ∞, da

$$\left| \frac{(-1)^{k+1} \frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1)+1)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}} \right| = x^{2(k+1)-2k} \cdot \frac{(2k+1)!}{(2(k+1)+1)!} = x^2 \cdot \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt (Rechenregeln für Folgen, und x ist fest). Damit ist der Limes inferior dieser Folge für jedes $x \in \mathbb{R}$ Null, und nach dem Quotientenkriterium $g(x)$ damit auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent. Nach der obigen Rechnung gilt $g(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Andererseits ist $g(0) = 0^0 - 0^1 + \frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{6}0^3 \cdots = 0^0 = 1$, woraus $f(x) = g(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ folgt. Damit ist $f(x)$ als über eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ definierte Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig (Satz 5.5.7).

Ein anderer möglicher Lösungsweg geht über die Regel von l'Hôpital.

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 2 8 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und geben Sie die von Ihnen benutzten Regeln an:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x + \sin x} \quad , \quad \text{b)} \lim_{x\to\infty} \Big(x \cdot (\frac{\pi}{2} - \arctan x) \Big) \ .$$

Lösung

Zu a): Es gilt $e^0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$ sowie $0 + \sin 0 = 0$, also dürfen die Rechenregeln für Grenzwerte wegen des verschwindenden Nenners nicht benutzt werden. Es sind aber die Voraussetzungen für die Regel von l'Hôpital erfüllt, da Zähler und Nenner beide gegen Null gehen und beide einmal differenzierbar sind nach den Sätzen über die Ableitungen von Exponentialfunktion und Sinus/Kosinus. Es gilt nach den Rechenregeln für elementare Funktionen und den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \cos x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{e^0 + \sin 0}{1 + \cos 0} = \frac{1+0}{1+1} = \frac{1}{2} \ .$$

Der Zähler wird nicht Null im Grenzpunkt, also gilt nach Satz 5.9.1, dass auch der Limes der eigentlichen Funktion $\frac{1}{2}$ ist.

Zu b): Es gilt $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ für $x \to \infty$ wegen den Eigenschaften der Umkehrfunktion und Satz 5.7.7(vi). Die Rechenregeln für Grenzwerte können also nicht angewendet werden, da x gegen ∞ und $\arctan(x) - \frac{\pi}{2}$ gegen Null strebt für $x \to \infty$. Umformen ergibt

$$x \cdot (\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{x^{-1}} \ ,$$

in diesem Bruch gehen nun Zähler und Nenner gegen Null für $x \to \infty$ nach den Rechenregeln für Grenzwerte. Zähler und Nenner sind nach den Ableitungsregeln und Satz 5.7.8 auf $(0, \infty)$ differenzierbar. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - \frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{0}{1+0} = 0$$

nach Satz 5.7.8 und den Rechenregeln für Ableitungen und Grenzwerte. Damit ist der Limes des Ursprünglichen Ausdrucks auch Null nach Satz 5.9.1.

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 3 12 Punkte

Berechnen Sie die Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf der die Ableitung der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion existieren, sowie die jeweiligen Ableitungen. Geben Sie die von Ihnen benutzten Regeln an.

$$\text{a) } f(x) \;=\; x^2 \cdot \arctan x \quad , \quad \text{b) } g(x) \;=\; \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2 \quad , \quad \text{c) } h(x) \;=\; \log(\log(x^2+1))\,.$$

Lösung

Zu a): x^2 ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar nach Satz 5.3.1, arctan x ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ nach Satz 5.7.8. Nach der Produktregel ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$f'(x) \;=\; (x^2)' \arctan(x) \;+\; x^2(\arctan(x)') \;=\; 2x \cdot \arctan(x) \;+\; \frac{x^2}{1+x^2}\,.$$

Zu b): Die Rechenregeln für die Ableitung dürfen für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ benutzt werden, da dort beide Faktoren von g differenzierbar sind. Die Signumfunktion ist auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ jeweils konstant und besitzt damit Ableitung Null. Dort gilt

$$g'(x) \;=\; \operatorname{sgn}(x)'x^2 \;+\; \operatorname{sgn}(x)(x^2)' \;=\; 0 \cdot x^2 \;+\; 2|x| \;=\; 2|x|\,.$$

Es muss noch geprüft werden, ob g auch im Nullpunkt differenzierbar ist. Dazu setzen wir den Differenzenquotienten an und betrachten die beiden einseitigen Limites:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0+} \frac{g(h)-g(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0+} \frac{\operatorname{sgn}(h)h^2-0}{h} \underset{h>0}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{h^2}{h} \;=\; \lim_{h\to 0+} h \;=\; 0, \text{ und}$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0+} \frac{g(h)-g(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0-} \frac{\operatorname{sgn}(h)h^2-0}{h} \underset{h<0}{=} \lim_{h\to 0-} \frac{-h^2}{h} \;=\; \lim_{h\to 0-} (-h) \;=\; 0.$$

Da beide einseitigen Grenzwerte übereinstimmen ist der Grenzwert insgesamt definiert und gleich Null. Also ist $g'(0) = 0$, und g ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Diese Ableitung stimmt mit $g'(x) = 2|x|$ überein, also ist $g'(x) = 2|x|$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Zu c): Da $x^2 + 1 > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\log(x^2+1)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar nach Satz 5.5.8. Nach dem gleichen Satz ist $\log(\log(x^2+1))$ definiert und differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, da $\log(x^2+1) > 0$ ist wegen $x^2+1 > 1$ für alle $x \neq 0$. Im Nullpunkt ist die Funktion nicht definiert (damit auch nicht differenzierbar), da dort $\log(x^2+1) = 0$ gilt und der erste Logarithmus dort nicht definiert ist. Nach der Kettenregel und der Ableitungsregel $\log(x)' = \frac{1}{x}$ folgt

$$h'(x) \;=\; (\log(x^2+1))' \cdot \frac{1}{\log(x^2+1)} \;=\; (x^2+1)' \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\log(x^2+1)} \;=\; \frac{2x}{(x^2+1)\log(x^2+1)}\,.$$

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 4 12 Punkte

Berechnen (und beweisen) Sie den Konvergenzradius von

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{n} \sqrt{k!} \cdot x^k \quad , \quad \text{b)} \sum_{n=0}^{n} (-1)^k \cdot x^k \quad , \quad \text{c)} \sum_{n=0}^{n} e^k x^k \, .$$

Lösung

Zu a): Einsetzen in das Quotientenkriterium ergibt

$$\left| \frac{\sqrt{(k+1)!} \cdot x^{k+1}}{\sqrt{k!} \cdot x^k} \right| = \sqrt{k+1} \cdot |x| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

nach den Rechenregeln für Folgen falls $x \neq 0$ ist (vgl. Beispiel 5.5.1 der Vorlesung). Damit divergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium für $x \neq 0$, also ist der Konvergenzradius $R = 0$.

Zu b): Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe, denn dann ist $\sum x^k$ eine konvergente Majorante nach Satz 3.2.9 und Definition 3.2.2. Aber für $x = -1$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \longrightarrow \infty$$

für $n \to \infty$, also ist für dieses x die Reihe divergent. Damit folgt $R = 1$ nach Definition 5.5.2 und dem der Definition vorausgehenden Satz.

Zu c): Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt

$$R^{-1} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|e^k|} = \limsup_{k \to \infty} e = e$$

und damit $R = \frac{1}{e}$.

Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 5 10 Punkte

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob die gegebenen Aussagen wahr oder falsch sind. Für jedes richtig gesetzte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz bekommen Sie einen Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird jedoch in keinem Fall mit einer negativen Anzahl Punkte bewertet. Sie können auch in einer Zeile nichts ankreuzen.

Sie müssen ihre Aussagen nicht beweisen.

Behauptung	**Wahr**	**Falsch**
Jede monotone Folge, die in einem kompakten $K \subseteq \mathbb{R}$ liegt, ist konvergent.	☐	☐
Konvergiert in einem $K \subseteq \mathbb{R}$ jede monotone Folge, so ist K kompakt.	☐	☐
Der Betrag des Konjugierten $\bar{z}$ stimmt mit dem Betrag von $z \in \mathbb{C}$ überein.	☐	☐
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig.	☐	☐
Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig.	☐	☐
Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen aus $\mathbb{R}$ ist kompakt.	☐	☐
Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Mengen aus $\mathbb{R}$ ist kompakt.	☐	☐
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar, so ist f auf $[a, b]$ stetig.	☐	☐
Jedes $f : \mathbb{R} \to M$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich ist stetig.	☐	☐
Jedes $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich ist stetig.	☐	☐

Lösung

Behauptung	Wahr	Falsch
Jede monotone Folge, die in einem kompakten $K \subseteq \mathbb{R}$ liegt, ist konvergent.	x	
Konvergiert in einem $K \subseteq \mathbb{R}$ jede monotone Folge, so ist K kompakt.		x
Der Betrag des Konjugierten $\bar{z}$ stimmt mit dem Betrag von $z \in \mathbb{C}$ überein.	x	
Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig.	x	
Ist $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig.		x
Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen aus $\mathbb{R}$ ist kompakt.	x	
Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Mengen aus $\mathbb{R}$ ist kompakt.		x
Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ auf (a,b) differenzierbar, so ist f auf $[a,b]$ stetig.		x
Jedes $f: \mathbb{R} \to M$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich ist stetig.		x
Jedes $f: M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich ist stetig.	x	

Jede monotone Folge, die in einem kompakten $K \subseteq \mathbb{R}$ liegt, ist konvergent: **WAHR**
Da jede kompakte Menge insbesondere beschränkt ist (Satz 4.2.2) ist eine solche Folge monoton und beschränkt, und damit konvergent wegen dem Monotoniekriterium.

Konvergiert in einem $K \subseteq \mathbb{R}$ jede monotone Folge, so ist K kompakt: **FALSCH**
Es reicht aus, dass K beschränkt ist, damit jede monotone Folge in K konvergiert, K muss aber nicht abgeschlossen und damit nicht kompakt sein. Gegenbeispiel: $K = [0,1)$.

Der Betrag des Konjugierten $\bar{z}$ stimmt mit dem Betrag von $z \in \mathbb{C}$ überein: **WAHR**
Das Konjugierte zu $z = x + iy$ ist $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$. Die Beträge $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$ stimmen offensichtlich überein.

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig: **WAHR**
Das folgt aus Satz 4.3.4.

Ist $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig: **FALSCH**
Es klingt zwar verführerisch, das aus der vorigen Frage abzuleiten, da (a,b) natürlich in $[a,b]$ enthalten ist, aber die Funktion kann in einer Umgebung eines Randpunkts beliebig steil ansteigen. Das typische Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0,1)$. Auf kompakten Intervallen kann der Anstieg nicht beliebig steil werden, da er dort ein Maximum annehmen muss.

Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen aus $\mathbb{R}$ ist kompakt: **WAHR**
Das sieht man sofort an Satz 4.3.5, man kann sich aber auch verdeutlichen, dass Abgeschlossenheit und Beschränktheit bei endlichen Vereinigungen erhalten wird (vgl. diverse Übungsaufgaben).

Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Mengen aus $\mathbb{R}$ ist kompakt: **FALSCH**
In einer Übungsaufgabe wurde schon gezeigt, dass eine solche Vereinigung nicht mehr abgeschlossen zu sein braucht. Man kann übrigens *jede* Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ als Vereinigung kompakter Mengen darstellen, nämlich als

$$M = \bigcup_{x \in M} \{m\} .$$

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ auf (a,b) differenzierbar, so ist f auf $[a,b]$ stetig: **FALSCH**

Man kann nämlich jede auf $[a,b]$ differenzierbare Funktion nehmen und die Randpunkte „unstetig versetzen", beispielsweise

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{falls} \quad x \in \{0,1\} \end{cases} .$$

Jedes $f : \mathbb{R} \to M$ *mit* $M \subseteq \mathbb{R}$ *endlich ist stetig*: **FALSCH**
Dafür ist die Funktion aus der vorigen Aussage ebenfalls ein Gegenbeispiel.

Jedes $f : M \to \mathbb{R}$ *mit* $M \subseteq \mathbb{R}$ *endlich ist stetig*: **WAHR**
Denn eine solche Funktion ist nur auf isolierten Punkten definiert, und in isolierten Punkten ist jede Funktion stetig.

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 6 8 Punkte

Zeigen Sie: ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar mit $f''(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a + bx$.

Lösung

Nach Satz 5.4.2(i) ist $f'(x) = b$ konstant mit einem $b \in \mathbb{R}$. Wir setzen $a = f(0) \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach dem 1. Mittelwertsatz (den man anwenden darf, weil f als differenzierbare Funktion auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist) für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \;=\; f'(\xi) \;=\; b \quad (\xi = \xi(x) \text{ eine Zwischenstelle})$$

woraus $f(x) - f(0) = bx$ und damit $f(x) = a + bx$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 7 8 Punkte

Es seien $z = x + iy$ und $w = a + ib$ komplexe Zahlen mit konjugierten Zahlen $\bar{z}$ bzw. $\bar{w}$. Zeigen Sie: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

Lösung

Es sei $z = x + iy$ und $w = a + ib$ mit $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$\overline{z+w} = \overline{x + iy + a + ib} = \overline{(x+a) + i(y+b)} = (x+a) - i(y+b) = (x - iy) + (a - ib) = \bar{z} + \bar{w}\,.$

Ebenso ist

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(x+iy)(a+ib)} = \overline{xa + iya + xib + i^2 yb} \underset{i^2=-1}{=} \overline{xa - yb + i(ya + xb)}$$

$$= xa - yb - i(ya + xb) = xa - iya - xib + (-i)^2 yb = (x - iy)(a - ib) = \bar{z} \cdot \bar{w}\,.$$

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 8 **14 Punkte**

Überprüfen Sie (mit Beweis) diese Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } f_n(x) \;=\; \sqrt[n]{x^2+1} \quad , \quad \text{b) } g_n(x) \;=\; \frac{x^2+n^2}{n^2} \quad , \quad \text{c) } h_n(x) \;=\; \sin(nx)\,.$$

Lösung

Zu a): Da $y = x^2 + 1 \geq 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $\log(y) \geq 0$, und es ist

$$\sqrt[n]{x^2+1} \;=\; y^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(y)} \underset{e^x \text{ stetig}}{\longrightarrow} e^0 \;=\; 1$$

für festes x und $n \to \infty$. Damit konvergiert (f_n) punktweise gegen $f(x) = 1$ auf $\mathbb{R}$. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, denn sei $\varepsilon = 1$ und $x > 2n$ für beliebig großes n_0 und irgend ein $n > n_0$, dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \;=\; |\sqrt[n]{x^2+1} - 1| \;>\; \sqrt{4n^2+1} - 1 \;>\; \sqrt{4n^2} - 1 \;=\; 2n - 1 \;\geq\; 1 \;=\; \varepsilon\,.$$

Damit kann für jedes noch so große n_0 und alle $n > n_0$ das Funktionsargument x immer derart gewählt werden, dass $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$ ist.

Zu b): Es gilt

$$g_n(x) \;=\; \frac{x^2+n^2}{n^2} \;=\; 1 + \frac{x^2}{n^2} \;\longrightarrow\; 1$$

für festes x und $n \to \infty$ nach den Rechenregeln für Folgen. Damit konvergiert (g_n) punktweise gegen $g(x) = 1$. Andererseits ist

$$|g_n(x) - g(x)| \;=\; \left|\frac{x^2+n^2}{n^2} - 1\right| \;=\; \left|\frac{x^2}{n^2}\right| \;\longrightarrow\; \infty$$

für $x \to \infty$ für festes n nach den Rechenregeln für Grenzwerte. Damit ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da man für beliebig großes n_0 und $n > n_0$ den Abstand $|g_n(x) - g(x)|$ durch Wahl von x über jedes ε heben kann.

Zu c): Diese Funktionenfolge konvergiert überhaupt nicht, denn beispielsweise für $x = \frac{1}{2}\pi$ ist wegen der 2π-Periodizität der Sinusfunktion

$$h_n(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in \{0, 2, 4, \ldots\} \\ 1 & \text{falls} \quad x \in \{1, 5, 9, \ldots\} \\ -1 & \text{falls} \quad x \in \{3, 7, 11, \ldots\} \end{cases}\,.$$

Da $h_n(x)$ drei verschiedene Häufungswerte besitzt gibt es schon für den Punkt $x = \frac{1}{2}\pi$ keinen Limes, also auch keine punktweise oder gleichmäßige konvergenz gegen eine Grenzfunktion.

Matrikelnummer: ___________

Aufgabe 9 10 Punkte

Entscheiden Sie (ohne Beweis), welche dieser Mengen offen, abgeschlossen oder sogar kompakt sind:

$$A = (0,1) \cup (2,3) \quad , \quad B = [0,\infty) \quad , \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) > \frac{1}{2}\} \quad , \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \leq \frac{1}{2}\}\,.$$

Geben Sie eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ an, auf die alle drei Eigenschaften zutreffen (ohne Beweis).

Lösung

Die Menge A ist offen als Vereinigung offener Mengen. Sie ist nicht abgeschlossen, da die Folge $\frac{1}{n}$ für $n \geq 2$ in A liegt aber nicht der Grenzwert Null. Damit ist A auch nicht kompakt.

Die Menge B ist abgeschlossen, denn das Komplement $(-\infty, 0)$ ist offen. B ist aber nicht beschränkt und damit nicht kompakt. B ist auch nicht offen, denn keine ε-Umgebung von Null liegt komplett in B.

Es sei $x \in C$ beliebig, dann gilt $\sin(x) > \frac{1}{2}$, etwa $\sin(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit des Sinus gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|\sin(x) - \sin(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist falls $|x - y| < \delta$ ist (x ist fest). Dann gilt für alle solchen y aber auch $\sin(y) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon > \frac{1}{2}$, also $y \in C$. Also liegt $U_\delta(x)$ komplett in C. Damit ist C offen. Es sei $\eta = \arcsin(\frac{1}{2}) \in [0, \frac{1}{2}\pi]$. Offenbar ist $\eta \notin C$. Wegen der strengen Monotonie des Sinus auf $[0, \frac{1}{2}\pi]$ ist aber $(\eta, \frac{1}{2}\pi]$ eine Teilmenge von C. Damit liegt die Folge $\eta + \frac{1}{n}$ ab einem genügend großen n komplett in C, aber nicht ihr Grenzwert η. Damit ist C nicht abgeschlossen und auch nicht kompakt.

Offenbar gilt $x \in C \;\Leftrightarrow\; x \notin D$. Also ist D das Komplement von C. Da C offen und nicht abgeschlossen ist folgt, dass D abgeschlossen aber nicht offen ist. D ist aber nicht kompakt, denn D ist nicht beschränkt (es liegen alle $2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$ in D).

Die leere Menge $M = \emptyset$ ist offen, denn das Komplement $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen. Sie ist auch abgeschlossen, denn das Komplement $\mathbb{R}$ ist offen. Die leere Menge ist damit auch kompakt, denn sie ist abgeschlossen und offensichtlich beschränkt.

Übrigens ist $\emptyset$ die einzige Teilmenge von $\mathbb{R}$, die alle drei Eigenschaften erfüllt. Die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind die einzigen Mengen in $\mathbb{R}$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Analysis I - Probeklausur 31.01.2005

Matrikelnummer: __________

Aufgabe 10 12 Punkte

Überprüfen Sie (mit Beweis), welche dieser Funktionen stetig auf $[0,1]$ sind:

$$\text{a) } f(x) \;=\; \sqrt{x^3+1} \quad , \quad \text{b) } g(x) \;=\; x^2 \cdot \lfloor x \rfloor \quad , \quad \text{c) } h(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die Abrundung von x auf eine ganze Zahl ist, und $h_n(x) = x^n$ die n-te Potenz.

Lösung

Zu a): da x^3+1 als Polynom auf $[0,1]$ stetig ist laut Vorlesung, x^3+1 auf $[0,1]$ Werte in $[0,2]$ annimmt und die Wurzel dort stetig ist laut Vorlesung, ist $f(x)$ nach den Rechenregeln für stetige Funktionen stetig auf $[0,1]$.

Zu b): Offenbar gilt wegen der Definition der Abrundung

$$g(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{falls} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

Damit ist $g(x)$ nicht stetig auf $[0,1]$, da $f(1-) = 0$ aber $f(1) = 1$ ist (Satz 4.5.7).

Zu c): Es gilt $h_n(x) = x^n \longrightarrow 0$ für $x \in [0,1)$ und $n \to \infty$ wie man an der Darstellung

$$x^n \;=\; e^{n\cdot\log(x)} \;=\; \frac{1}{\underbrace{e^{n\cdot(-\log(x))}}_{\longrightarrow\infty}} \quad (-\log(x) > 0)$$

sieht. Andererseits ist offenbar $h_n(1) = 1$ für alle n. Also konvergiert (h_n) punktweise gegen die Grenzfunktion $h(x) = g(x)$ aus der vorigen Teilaufgabe. Diese Funktion ist aber nicht stetig (obwohl jedes h_n auf $[0,1]$ sogar gleichmäßig stetig ist).