

LANDELEMENTEMETHODE (REM) EINE EINFÜHRUNG

CHRISTOPH ERATH

1. EINLEITUNG

Um die Anzahl und damit die Kosten experimentiellen Versuche möglichst niedrig zu halten, versucht man ein (physikalisches) Problem mit einem mathematischen Modell zu beschreiben. Viele physikalische Probleme lassen sich durch Systeme linearer bzw. nichtlinearer Differential- oder Integralgleichungen beschreiben. Analytische Lösungen lassen sich dabei nur in wenigen Spezialfällen finden. In der Praxis erfordern Lösungen daher numerische Ansätze. Die Simulation soll dabei möglichst effektiv (Zeit) sein und zu hinreichend genauen und zuverlässigen Lösungen führen. Je nach mathematischen Modell des (z.B. physikalischen) Modells stehen uns verschiedene numerische Diskretisierungsverfahren zur Verfügung. Numerische Verfahren sind z.B. die Finite Differenzen Methode (FDM), die Finite Volumen Methode (FVM), die Finite Elemente Methode und die hier betrachtete Randelementemethode (BEM, engl. Boundary element Method). Jede dieser Methoden hat ihre Vor- und Nachteile, so spielen z.B. in der Festkörperphysik FDM und FVM eine untergeordnete Rolle. Die BEM unterscheidet sich bezüglich der Diskretisierung wesentlich von den drei anderen numerischen Verfahren. Während bei FDM, FVM und FEM das ganze zu betrachtende Gebiet diskretisiert wird, wird bei der BEM nur der Rand betrachtet. Je nach Komplexität des Gebietes kann dies zu erheblichen Zeitersparnissen führen, da dadurch die Verwaltung des Netzes einfacher wird. Ein entscheidender Vorteil der BEM ist auch, dass auch Außenraumprobleme (z.B. Schallausbreitung außerhalb eines Flugzeuges), bei denen partielle Differentialgleichungen in unbeschränkten Gebieten behandelt werden, behandelt werden können. Bei FDM, FVM und FEM basiert die Diskretisierung auf einem endlichen Teilraum. Ein Nachteil der REM ist unter anderem, dass von einem Problem die Fundamentallösung bekannt sein muß.

2. DARSTELLUNGSFORMEL

In diesem Abschnitt stellen wir die Darstellungsformel für das Laplace Problem $-\Delta u = f$ vor. Die Hauptaussage dabei ist, dass die Lösung eindeutig durch die *Cauchy-Daten* $(u, \partial u / \partial \mathbf{n})$ am Rand $\Gamma = \partial\Omega$ dargestellt werden kann. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, d.h., Ω ist ein beschränktes Gebiet, Ω liegt lokal nur auf einer Seite des Randes $\Gamma = \partial\Omega$ und Γ ist bezüglich einer beliebigen Zerlegung stückweise durch eine Lipschitz-stetige Funktion darstellbar.

Wir definieren zunächst die sogenannte Fundamentallösung für den Laplace-Operator (auch Newton-Kern):

$$(2.1) \quad G(z) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |z|, & \text{für } d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|z|}, & \text{für } d = 3. \end{cases}$$

$G(z)$ heißt auch Fundamentallösung des Laplace-Operators.

Lemma 2.1. (i) *Es gilt $G \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit der ersten und zweiten partiellen Ableitung*

$$d = 2: \quad \frac{\partial G(z)}{\partial z_j} = -\frac{1}{2\pi} \frac{z_j}{|z|^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z_j \partial z_k} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_{jk}|z|^2 - 2z_j z_k}{|z|^4} \quad 1 \leq j, k \leq 2,$$

$$d = 3: \quad \frac{\partial G(z)}{\partial z_j} = -\frac{1}{4\pi} \frac{z_j}{|z|^3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z_j \partial z_k} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta_{jk}|z|^2 - 3z_j z_k}{|z|^5} \quad 1 \leq j, k \leq 3,$$

(ii) *Für $z \neq 0$ gilt $-\Delta G(z) = 0$.*

Dabei ist δ_{jk} das Kronecker-Symbol.

Beweis. (i) ist elementares nachrechnen. (ii) folgt direkt aus (i). □

2.1. Die Darstellungsformel.

Satz 2.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit dem Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $f := -\Delta u \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann gilt für alle $x \in \Omega$*

$$(2.2) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x-y)f(y) dy + \int_{\Gamma} G(x-y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(y) ds_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} G(x-y) u(y) ds_y,$$

wobei \mathbf{n}_y die äußere Normale bei $y \in \Gamma$ bezeichnet.

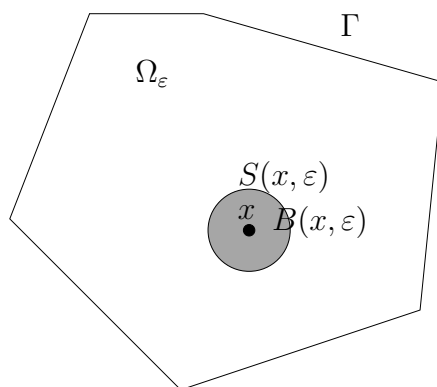


ABBILDUNG 2.1. Das Gebiet Ω_ε für den Beweis der Darstellungsformel von Satz 2.2.

Beweis. Wir beweisen die Darstellungsformel nur für den Fall $d = 2$. Ausgangspunkt ist die zweite Greensche Formel, die wir für u und $v(y) := -\frac{1}{2\pi} \log |x-y|$ anwenden:

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dy = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds_y \quad \text{für } u, v \in C^2(\bar{\Omega}).$$

Oder in kompakterer Schreibweise

$$(2.4) \quad (\Delta u, v)_\Omega - (u, \Delta v)_\Omega = \langle \partial u / \partial \mathbf{n}, v \rangle_\Gamma - \langle u, \partial v / \partial \mathbf{n} \rangle_\Gamma.$$

Da v für $x \in \Omega$ in $y = x$ nicht stetig ist, also nicht in $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, können wir (2.4) nicht ohne weiteres anwenden. Wir „schneiden“ die Singularität $y = x$ aus und betrachten (2.4) auf $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B(x, \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$, da $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{x\})$ (Lemma (2.1)). $B(x, \varepsilon)$ ist dabei eine Kugel mit Mittelpunkt x und Radius ε . Da x im Inneren von Ω liegt, finden wir immer ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Mit $\Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon$ gilt $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup S(x, \varepsilon)$, $(S(x, \varepsilon) = \partial B(x, \varepsilon))$, $\Gamma \cap S(x, \varepsilon) = \emptyset$ und wir erhalten

$$(\Delta u, v)_{\Omega_\varepsilon} - (u, \Delta v)_{\Omega_\varepsilon} = \langle \partial u / \partial \mathbf{n}, v \rangle_\Gamma + \langle \partial u / \partial \mathbf{n}, v \rangle_{S(x, \varepsilon)} - \langle u, \partial v / \partial \mathbf{n} \rangle_\Gamma - \langle u, \partial v / \partial \mathbf{n} \rangle_{S(x, \varepsilon)},$$

wobei \mathbf{n} in Bezug auf Γ_ε nach außen gerichtet ist.

Schritt 1. Es gilt $(\Delta u, v)_{\Omega_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\Delta u, v)_\Omega$.

Wir berechnen zuerst mittels Polarkoordinaten und partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{B(x, \varepsilon)} (\log |x - y|)^2 dy &= \int_{B(0, \varepsilon)} (\log |x|)^2 dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon (\log r)^2 r dr d\varphi = 2\pi \int_0^\varepsilon r (\log r)^2 dr \\ &= 2\pi \left\{ \left[\frac{r^2}{2} (\log r)^2 \right]_{0+}^\varepsilon - \int_0^\varepsilon r \log r dr \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\log \varepsilon)^2 - \left[\frac{r^2}{2} \log r \right]_0^\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr \right\} \\ &= \pi \left(\varepsilon^2 (\log \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \log \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Beachte, dass $\lim_{x \rightarrow 0+} x^n (\log x)^m = 0$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Aus der Hölderungleichung folgt

$$\int_{B(x, \varepsilon)} |\Delta u \log(x - y)| dy \leq \|\Delta u\|_{L^2(B(x, \varepsilon))} \|\log |x - y|\|_{L^2(B(x, \varepsilon))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Schritt 2. Es gilt $(u, \Delta v)_{\Omega_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Dies folgt direkt aus Lemma 2.1 ($\Delta v(y) = 0$).

Schritt 3. Es gilt $\langle \partial u / \partial \mathbf{n}, v \rangle_{S(x, \varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Für ein $y \in S(x, \varepsilon)$ gilt $|x - y| = \varepsilon$ und somit $v(y) = -\log \varepsilon / (2\pi)$. Mit Hilfe der partiellen Integration bekommen wir

$$(2.5) \quad \begin{aligned} - \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{2\pi} \log |x - y| ds_y &= - \frac{\log \varepsilon}{2\pi} \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \frac{\log \varepsilon}{2\pi} \int_{B(x, \varepsilon)} \Delta u dy \\ &= \frac{\log \varepsilon}{2\pi} \underbrace{|B(x, \varepsilon)|}_{=\pi \varepsilon^2} \int_{B(x, \varepsilon)} \Delta u dy = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \log \varepsilon \int_{B(x, \varepsilon)} \Delta u dy \end{aligned}$$

Das Minusvorzeichen fällt deshalb weg, da bei der partiellen Integration der Normalvektor \mathbf{n} nach außen zeigen muß. Unser \mathbf{n} ist der Normalvektor, der bezüglich Ω_ε nach außen zeigt, also zeigt er insbesondere in $B(x, \varepsilon)$ hinein, wir müssen daher $-\mathbf{n}$ nehmen. Es gilt für jeden

Lebesgue-Punkt x

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x, \varepsilon)} \Delta u \, dy = \Delta u(x)$$

und daher folgt in (2.5)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{2\pi} \log |x - y| \, ds_y = 0.$$

Schritt 4. Es gilt $\langle u, \partial v / \partial \mathbf{n} \rangle_{S(x, \varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} = u(x)$.

Da

$$\frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log |x - y| = \frac{1}{|x - y|^2} (y - x) \cdot \mathbf{n}_y$$

erhalten wir

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{S(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log |x - y| = -\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \int_{S(x, \varepsilon)} u(y) (y - x) \cdot \mathbf{n}_y \, ds_y.$$

Wir setzen $f(y) := u(y)(y - x)$ und wenden den Gaußschen Integralsatz¹

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{S(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log |x - y| &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \int_{S(x, \varepsilon)} f(y) \cdot \mathbf{n}_y \, ds_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \int_{B(x, \varepsilon)} \operatorname{div} f \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \int_{B(x, \varepsilon)} \nabla u(y) \cdot (y - x) \, dy + \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \int_{B(x, \varepsilon)} 2u(y) \, dy, \end{aligned}$$

da $\operatorname{div} f(y) = \nabla u(y) \cdot (y - x) + 2u(y)$. Das Minus erscheint wieder aufgrund der entgegengesetzten Richtung (nach innen gerichtet bzgl. $B(x, \varepsilon)$) von \mathbf{n} . Es gilt für die beiden Integrale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \left| \int_{B(x, \varepsilon)} \nabla u(y) \cdot (y - x) \, dy \right| &\leq \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} |B(x, \varepsilon)| \int_{B(x, \varepsilon)} |\nabla u(y)| \underbrace{|(y - x)|}_{\leq \varepsilon} \, dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B(x, \varepsilon)} |\nabla u(y)| \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \int_{B(x, \varepsilon)} 2u(y) \, dy = \frac{2 \overbrace{|B(x, \varepsilon)|}^{=\pi\varepsilon^2}}{2\pi\varepsilon^2} \int_{B(x, \varepsilon)} u \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(x).$$

Alle Schritte zusammen ergeben dann die Darstellungsformel (2.2). □

Die Darstellungsformel läßt sich auch unter schwächeren Bedingungen beweisen:

Satz 2.3. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz Gebiet mit dem Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und $u \in H^1(\Omega)$ mit $f := -\Delta u \in L^2(\Omega)$ (im distributionellen Sinne). Dann gilt für fast alle $x \in \Omega$ (2.2), u bzw. $\partial u / \partial \mathbf{n}$ werden als Spur in $H^{1/2}(\Gamma)$ bzw. Normalenableitung in $H^{-1/2}(\Gamma)$ verstanden/ersetzt.*

¹ $\int_{\Omega} \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Gamma} g \cdot \mathbf{n} \, ds$ für $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

2.2. Fundamentallösung.

Definition 2.4. Unter einer Fundamentallösung oder Greenschen Funktion des Laplace-Operators verstehen wir eine (formale) Lösung v_x der Distributionsgleichung

$$(2.6) \quad -v_x \Delta(\cdot) = \delta_x \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ sei der Raum der Testfunktionen (unendlich oft differenzierbar mit kompaktem Träger) und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ die Gesamtheit aller Distributionen. Wenn wir mit δ_x die Dirac-Distribution mit Träger x (d.h. $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$) bezeichnen, dann interpretieren wir die Schreibweise als

$$-\int_{\mathbb{R}^d} v_x(y) \Delta \varphi(y) dy = \delta_x(\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)).$$

Wenn nun $u = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dann folgt aus der Darstellungsformel - da alle Randintegrale verschwinden - schlicht

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log|x-y| \Delta \varphi(y) dy.$$

Das ist die ausgeschriebene Form der Gleichung (2.6) für $v_x := -\frac{1}{2\pi} \log|x-\cdot|$. Damit ist $-\frac{1}{2\pi} \log|x-\cdot|$ eine Fundamentallösung zum Laplace-Operator.

3. INTEGRALOPERATOREN: EINFACH- UND DOPPELSCHICHTPOTENTIAL

Im folgenden werden wir nur noch den zweidimensionalen Fall ($d = 2$) betrachten. Die Darstellungsformel lautet für $-\Delta u = f$ und $x \in \Omega$

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log(x-y) f(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log(x-y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(y) ds_y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log(x-y) u(y) ds_y,$$

Die Darstellungsformel läßt sich als Summe von drei linearen Integraloperatoren verstehen, die wir folgendermaßen definieren:

- das Newton-Potential von $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$$(Nf)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log|x-y| f(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2,$$

- das Einfachschichtpotential (engl. single layer potential) von $\phi : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$

$$(V\phi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log|x-y| \phi(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

- das Doppelschichtpotential (engl. double layer potential) von $\psi : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$

$$(K\psi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log|x-y| \psi(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

Wir können die Darstellungsformel deshalb als Operatorgleichung schreiben:

Korollar 3.1. Für $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ gilt

$$u = N(-\Delta u) + V(\partial u / \partial \mathbf{n}) - K(u) \quad \text{in } \Omega.$$

3.1. Newton Potential. Für ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f \in L^\infty(\Omega)$ ist das Newton-Potential $N(f) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Korollar 3.2. Für $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt $u = N(-\Delta u) = -\Delta(Nu)$.

3.2. Einfachschicht- Doppelschichtpotential. Wir beschreiben in diesem Abschnitt ein paar Eigenschaften für das Einfachschichtpotential $(V\phi)(x)$ und das Doppelschichtpotential $(K\phi)(x)$.

Satz 3.3. Für $\phi \in L^1(\Omega)$ gilt $V\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ und $-\Delta(V\phi) = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Für $\phi \in L^\infty(\Omega)$ gilt zusätzlich $V\phi \in C(\mathbb{R}^2)$.

Das Einfachschichtpotential $(V\phi)$ läßt sich also von Ω und $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ auf Γ stetig fortsetzen, wobei die Fortsetzungen gleich sind und wir schreiben deshalb für $x_0 \in \Gamma$

$$(V\phi)(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} (V\phi)(x).$$

Das Doppelschichtpotential $(K\psi)(x)$ läßt sich auch von Ω bzw. $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ auf Γ fortsetzen.

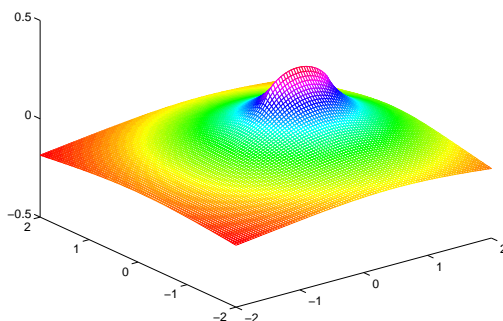


ABBILDUNG 3.1. Beispiel eines Einfachschichtpotentials mit $\phi := \chi_{[0,1] \times 0}$.

Satz 3.4. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\psi \in L^\infty(\Gamma)$, dann ist $K\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ beschränkt und es gilt $-\Delta(K\psi) = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Ist Γ ein stückweise C^2 -Rand, so existiert der Cauchy-Hauptwert

$$(K\psi)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma \setminus (B(x_0, \varepsilon))} \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log |x - y| \psi(y) dy$$

für alle $x \in \Gamma$. Für jeden Punkt $x_0 \in \Gamma$, in dem ψ stetig ist, treten folgende Sprünge auf

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (K\psi)(x) &= (K\psi)(x_0) - \frac{\alpha}{2\pi} \psi(x_0) && \text{für } x \in \Omega, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (K\psi)(x) &= (K\psi)(x_0) + \frac{\alpha}{2\pi} \psi(x_0) && \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

wobei α der Innenwinkel bei x_0 ist.

Anmerkung 1. Hat Γ in x_0 eine Normale (d.h. x_0 ist kein Eckpunkt), dann ist $\alpha = \pi$. Diese Tatsache spielt z.B. bei der Kollokationsmethode (vergleiche Kapitel 6), je nach dem, wo man die Kollokationspunkte wählt, eine Rolle!

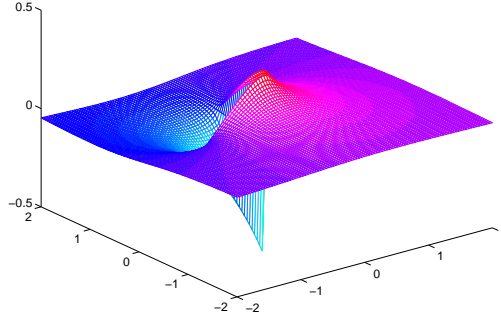


ABBILDUNG 3.2. Beispiel des Doppelschichtpotentials, wobei ψ eine Hutfunktion auf $\text{conv}\{(0, 0); (1, 0); (1, 1)\}$.

3.3. Adjungiertes (duales) Doppelschichtpotential und hypersingulärer Operator. Mit Hilfe der Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(V\phi)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(K\phi)$ des Einfachschichtpotentials bzw. Doppelschichtpotentials definieren wir zwei neue Integraloperatoren:

- das adjungierte (duale) Doppelschichtpotential von $\phi : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(V\phi)(x) = (K^*\phi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial_x}{\partial \mathbf{n}_x} \log|x-y| \phi(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

- den hypersingulären Integraloperator von $\psi : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(K\psi)(x) = (W\psi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial_x}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\Gamma} \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log|x-y| \psi(y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

Für das adjungierte Doppelschichtpotential gilt ähnliches wie für das Doppelschichtpotential:

Satz 3.5. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\phi \in L^\infty(\Gamma)$, dann ist $K^*\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ beschränkt und es gilt $-\Delta(K^*\phi) = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Ist Γ ein stückweise \mathcal{C}^2 -Rand, so existiert der Cauchy-Hauptwert

$$(K^*\phi)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma \setminus (B(x_0, \varepsilon))} \frac{\partial_x}{\partial \mathbf{n}_x} \log|x-y| \phi(y) dy$$

für alle $x \in \Gamma$. Für jeden Punkt $x_0 \in \Gamma$, in dem ϕ stetig ist, treten folgende Sprünge auf

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (K^*\phi)(x) &= (K^*\phi)(x_0) - \frac{\alpha}{2\pi} \phi(x_0) & \text{für } x \in \Omega, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (K^*\phi)(x) &= (K^*\phi)(x_0) + \frac{\alpha}{2\pi} \phi(x_0) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

wobei α der Innenwinkel bei x_0 ist.

Der Operator K^* ist L^2 adjungiert zu K in dem Sinne, dass für glatte Funktionen ϕ und ψ gilt

$$\langle K\phi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle \phi, K^*\psi \rangle_{L^2(\Gamma)}$$

Beim hypersingulären Integraloperator gilt für $x \in \Gamma$

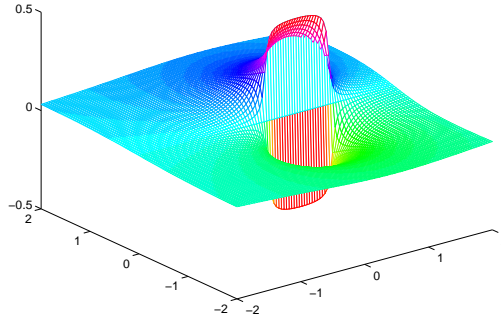


ABBILDUNG 3.3. Beispiel des adjungierten Doppelschichtpotentials mit $\phi := \chi_{[0,1] \times 0}$.

$$(W\psi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial_x}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\Gamma} \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log|x-y| \psi(y) dy$$

wobei $(W\phi)(x_0)$ in x stetig ist. Insbesondere springt $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(K\psi)(x)$ nicht!

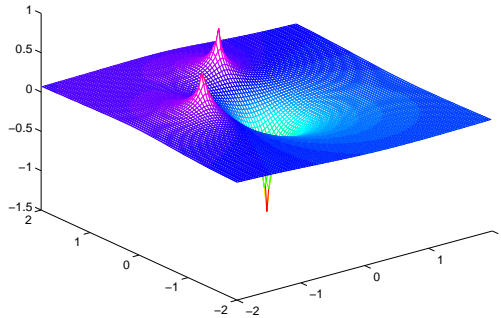


ABBILDUNG 3.4. Beispiel des hypersingulären Integraloperators, wobei ϕ eine Hutfunktion auf $\text{conv}\{(0,0); (1,0); (1,1)\}$ ist.

4. AUSSENRAUMPROBLEME

In unbeschränkten Gebieten müssen wir eine Bedingung bei „Unendlich“ fordern. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (Innenraum) wieder ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, dann heißt $\Omega_c := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ Außenraum. Eine typische Randbedingung bei ∞ ist die Abklingbedingung

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \{u(x) - b \log(x)\} = a,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ frei wählbar sind. Die Darstellungsformel lautet für $x \in \Omega_c$ und $\Delta v = 0$

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log(x-y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} v(y) ds_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial_y}{\partial \mathbf{n}_y} \log(x-y) v(y) ds_y + a \\ &= -V(\partial v / \partial \mathbf{n}) + K(v) + a. \end{aligned}$$

Wir betrachten folgendes Problem (in der starken Formulierung), wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Innenraum) ein Lipschitz-Gebiet sei, mit Ω_c bezeichnen wir den Außenraum. Mit $\Gamma = \partial\Omega$ notieren wir den Kopplungsrand, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(4.1) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$(4.2) \quad \Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega_c$$

$$(4.3) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \{v(x) - b \log(x)\} = a$$

$$(4.4) \quad u = v \quad \text{auf } \Gamma$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Satz 4.1. Die Cauchy-Daten des Außenraumproblems bezeichnen wir mit $(v \in H_{loc}^1(\Omega_c))$

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \partial v / \partial \mathbf{n} \end{pmatrix}_{|\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$$

Wenn v (4.2) und (4.3) erfüllt gilt

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + K & -V \\ -W & \frac{1}{2} - K^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und umgekehrt, für $(\xi, \phi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ existiert eine Funktion $v \in H_{loc}^1(\Omega_c)$, die (4.2) und (4.3) erfüllt, dann und nur dann wenn (4.7) erfüllt wird und es gilt die Darstellungsformel

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \phi(z) \log|x-z| ds_z - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \xi(z) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_z} \log|x-z| ds_z + a \quad \text{für } x \in \Omega_c.$$

Das System (4.7) wird auch als Calderon-System bezeichnet.

5. DIE SYMMISCHE INTEGRALGLEICHUNG

Für ein Problem der Form

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= k & \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Gamma)$, and $k \in L^2(\Gamma)$ bekommen wir mit Hilfe der Darstellungsformel (2.2) u in Ω . In der Regel sind die „Cauchy-Daten“ nicht vollständig, deshalb muß ein Teil approximiert werden. Wir stellen im folgenden die Lösung des reinen Dirichlet Problems mit der Randlementemethode vor.

5.1. Das reine Dirichlet Problem. Die schwache Lösung u des Dirichlet Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \Gamma_D = \Gamma \end{aligned}$$

für ein glatt berandetes, beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und $g \in H^{1/2}(\Gamma) := \{u|_{\Gamma} \mid u \in H^1(\Omega)\}$ liegt in $H^1(\Omega)$.

Die Darstellungsformel gibt uns eine Formel zu Berechnung von u in Ω an,

$$(5.1) \quad u = V(\phi) - K(u)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Mit ϕ bezeichnen wir dabei die unbekannte Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ am Rand Γ .

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit stückweise \mathcal{C}^2 -Rand. Dann sind $\phi = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ und g in $L^\infty(\Gamma)$. Wenn wir x in der Darstellungsformel (5.1) gegen Γ streben lassen, folgt mit der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials $\tilde{V}\phi$ und der Sprungrelation des Doppelschichtpotential

$$u(x) = g(x) = (V\phi)(x) - \left(K - \frac{1}{2}\right)g(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma.$$

Daraus erhalten wir

$$V\phi = \left(K + \frac{1}{2}\right)g \quad \text{fast überall auf } \Gamma.$$

Mit $\rho := \left(K + \frac{1}{2}\right)g \in H^{1/2}(\Gamma)$ erhalten wir folgendes Problem: Gesucht ist $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$(5.2) \quad V\phi = \rho$$

welche auch als *Symmsche Integralgleichung* bzw. Integralgleichung erster Art bezeichnet wird.

5.2. Diskretisierung. Aus Gleichung (6.1) suchen wir nun ϕ , welches wir mit Hilfe eines Galerkin-Verfahrens approximieren wollen: Finde ein $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$a(\phi, \eta) = \int_{\Gamma} (V\phi)\eta \, ds_x = \int_{\Gamma} \rho\eta \, ds_x \quad \text{für alle } \eta \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Wie bei der FEM, wird das zu betrachtende Gebiet unterteilt, wir betrachten also eine Partition \mathcal{T} des Randes Γ in Bogenstücke $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Auf jedem Element Γ_j betrachten wir Ansatzfunktionen, z.B. Polynome und bezeichnen den diskreten Raum mit \mathcal{S}_h . Für $\mathcal{S}_h \subseteq H^{-1/2}(\Gamma)$ lautet das diskrete Problem: Finde ein $\phi_h \in \mathcal{S}_h$ mit

$$(5.3) \quad \int_{\Gamma} (V\phi_h)(x)\psi_h(x) \, ds_x = \int_{\Gamma} \rho(x)\psi_h(x) \, ds_x \quad (\psi_h \in \mathcal{S}_h).$$

Es sei μ_1, \dots, μ_n eine Basis des endlich dimensionalen Raums \mathcal{S}_h und

$$\phi_h(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_j(x).$$

Dann führt (5.3) zu einem äquivalenten Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{\Gamma} (V\mu_j)(x)\mu_k \, ds_x = \int_{\Gamma} \rho(x)\mu_k \, ds_x \quad k = 1, \dots, n.$$

das als $n \times n$ -linearen Gleichungssystem $A\alpha = b$ mit der Steifkeitsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A_{jk} := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \log|x-y| \mu_j(y) \, ds_y \mu_k(x) \, ds_x$$

und der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^n$

$$b = \int_{\Gamma} \rho(x) \mu_k ds_x$$

Anmerkung 2. Die Steifkeitsmatrix A ist offensichtlich vollbesetzt und symmetrisch. Für das Laplace-Problem in 2D können die Integrale noch analytisch berechnet werden, vielfach führt kein Weg über umfangreiche numerische Verfahren zur Berechnung dieser Integrale vorbei. Wavelets oder \mathcal{H} -Matrizen, die im nächsten Vortrag vorgestellt werden, bilden eine Möglichkeit, Integrale dieser Art effizient zu berechnen.

6. KOLLOKATIONSVERFAHREN

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass für die Symmsche Integralgleichung

$$(6.1) \quad (V\phi)(x) = \rho(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma$$

eine Näherungslösung $\phi_h(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_j(x)$ in einem endlichdimensionalen (diskreten) Ansatzraum \mathcal{S}_h gefunden werden kann. Sicherlich werden wir nicht erreichen, dass $V\phi_h = \rho$ für alle Punkte des Randes erfüllt wird. Ist der Rand Γ wieder in n -Teilstücke $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ unterteilt, und wählen wir n verschiedenen Stellen x_1, \dots, x_n - Kollokationsstellen, z.B. jeweils in der Mitte oder am Rand von Γ_j - aus. Wir können fordern, dass die Symmsche Integralgleichung an den Stellen, also

$$(V\phi)(x_j) = \rho(x_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

erfüllt sein soll. Dadurch erhalten wir möglicherweise eine Näherung ϕ_h , die sich für wachsendes n der exakten Lösung ϕ nähert.

Wir wollen diesen Sachverhalt nochmals genauer aufschreiben:

$\phi_h = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_j$ sein eine Näherungslösung im Ansatzraum \mathcal{S}_h mit der Basis $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ und x_1, \dots, x_n die Kollokationsstellen. Dann lautet das Problem: Wir suchen die Näherungslösung $\phi_h \in \mathcal{S}_h$ für

$$(V\phi_h)(x_j) = \rho(x_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

gilt. Das läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |x_j - y| \phi_h(y) dy &= \rho(x_j) & \text{für } j = 1, \dots, n \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |x_j - y| \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k(y) dy &= \rho(x_j) & \text{für } j = 1, \dots, n \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |x_j - y| \mu_k(y) dy \right] &= \rho(x_j) & \text{für } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Eine entscheidene Rolle spielt dabei die Definition von ρ . Während wir beim Galerkinverfahren $\rho := (K + \frac{1}{2})g$ (fast überall) wählen, müssen wir beim Kollokationsverfahren

$$\rho(x_j) := \left(\left(K + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \right) g \right)(x_j)$$

wählen, denn ist z.B. x_j ein Eckpunkt, dann ist α der Innenwinkel bei x_j , besitzt Γ bei x_j eine Normale, dann ist $\alpha = \pi$ und wir erhalten $\rho := (K + \frac{1}{2})g$.

Beim Galerkinverfahren, das z.B. in Abschnitt 5.2 eingesetzt wurde, sind Ansatz- und Testraum gleich. Mit Hilfe der δ -Distribution kann gezeigt werden, dass das Kollokationsverfahren einen Testraum hat, der von den δ -Distributionen der Kollokationspunkte aufgespannt wird. Somit lassen sich das Kollokationsverfahren, als auch das Galerkinverfahren als Projektionsverfahren in der folgenden Form auffassen:

Gesucht wird $\phi_h \in \mathcal{S}_h$ mit

$$\langle V\phi_h, \eta \rangle = \langle \rho, \eta \rangle \quad \text{für alle } t \in T_h$$

wobei für das Galerkinverfahren $T_h = \mathcal{S}_h$, $\langle V\phi_h, \eta \rangle = \langle V\phi_h, \eta \rangle_{L^2(\Gamma)}$ und $\langle \rho, \eta \rangle = \langle \rho, \eta \rangle_{L^2(\Gamma)}$ gilt. Für das Kollokationsverfahren ist T_h der Raum, δ -Distributionen der Kollokationspunkte aufgespannt wird, und $\langle V\phi_h, \eta \rangle \delta_{x_j}(V\phi_h) = V\phi_h(x_j)$ bzw. $\langle \rho, \eta \rangle = \delta_{x_j}(\rho) = \rho(x_j)$.

E-mail address: Christoph.Erath@uni-ulm.de

UNIVERSITY OF ULM, INSTITUTE FOR NUMERICAL MATHEMATICS, HELMHOLTZSTRASSE 18, D-89069 ULM, GERMANY