

Partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. Karsten Urban

Universität Ulm
Abteilung Numerik
Sommersemester 2004

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1 Einführung und Beispiele	4
1.1 Was ist eine PDE?	5
1.2 Bezeichnungen	5
1.3 Einige Beispiele	5
1.4 Kategorisierung von PDEs	11
2 Die Laplace–Gleichung	14
2.1 Eine einfache Lösungsformel	14
2.2 Green’sche Formel und harmonische Funktionen	15
2.3 Das Dirichlet–Problem	19
3 Elementare Lösungsverfahren	26
3.1 Trennung der Variablen	26
3.2 Homogenisierung	28
3.3 Variablentransformation (am Beispiel der Wellengleichung)	28
3.4 Lösung mittels Fourier–Transformation	30
3.5 Die Laplace–Transformation	37
3.6 Das Superpositions–Prinzip	45
3.7 Lösung mit Hilfe der Green–Funktionen	48
3.8 MAPLE	52
4 PDEs erster Ordnung und Charakterisikentheorie	56
4.1 Cauchy–Probleme	56
4.2 Autonome Systeme	59
4.3 Gleichungen zweiter Ordnung	64
5 Maximum–Prinzipien	68
5.1 Das schwache Maximumprinzip für elliptische Probleme	68
5.2 Das starke Maximum–Prinzip für elliptische Probleme	70

5.3	A-priori-Schranken	73
5.4	Parabolische Operatoren	74
5.5	Nichtlineare Probleme	77
6	Differenzenverfahren	80
6.1	Diskretisierung	80
6.2	Diskretes Maximumprinzip	83
6.3	Konvergenztheorie	84
6.4	Randbedingungen höherer Art	87
6.5	Parabolische Probleme	88
7	Variationsformulierungen	91
7.1	Sobolev-Räume	91
7.2	Einbettungssätze	97
7.3	Variationsformulierung elliptischer RWP 2. Ordnung	100
7.4	Der Existenzsatz	102
7.5	Dualräume von Sobolev-Räumen	109
7.6	Regularitätssätze	113
7.7	Spursätze	117
7.8	Parabolische Probleme	120
7.9	Lösungsmethoden	124

Vorwort

Das vorliegende Skript ist eine leicht ausgearbeitete Fassung meines Vorlesungsmanuskriptes zur Vorlesung *Partielle Differentialgleichungen*, die ich Sommersemester 2004 an der Universität Ulm für Studierende im Hauptstudium der Diplom-Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik gehalten habe.

Dieses Skript soll in erster Linie denjenigen Studenten helfen, die eine Vorlesung *Numerik partieller Differentialgleichungen* hören möchten, jedoch keine Vorlesung *Partielle Differentialgleichungen* gehört haben. Sie finden die wesentlichen Grundlagen, vor allem über Variationsformulierungen partieller Differentialgleichungen in diesem Skript.

Das Skript erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit und kann in keinem Fall das eigene Literaturstudium ersetzen. Mittlerweile gibt es eine ganze Reihe von Lehrbüchern (teilweise auch in Deutsch) über partielle Differentialgleichungen. Einige davon sind im Literaturverzeichnis zusammengestellt.

Für Anregungen, Kommentare, Kritik oder Verbesserungen zu diesem Manuskript bin ich jederzeit dankbar: karsten.urban@mathematik.uni-ulm.de. Weiteres Material zur Vorlesung findet man unter:

<http://www.mathematik.uni-ulm.de/numerik/teaching/ss04/PartielleDgln/>

Abschließend möchte ich Herrn Dr. Kai Bittner danken, der die Vorlesung als Assistent begleitet hat und die Übungen geleitet hat. Er hat eine Reihe von Anregungen und Korrekturen gegeben, die allesamt sehr wertvoll waren. Den Studierenden der Vorlesung danke ich sehr herzlich für die engagierte Teilnahme an der Vorlesung, für Zwischenfragen und Kommentare, die auch in dieses Manuskript eingeflossen sind. Parallel zur Vorlesung hat es ein Praktikum gegeben, das Herr Dipl.-Math. oec. Michael Lehn organisiert und geleitet hat. Hierfür gilt ihm mein Dank. Schließlich wäre dieses Manuskript nicht ohne die Arbeit von Petra Hildebrand entstanden, die sich durch meine Handschrift gekämpft und das Manuskript in LaTeX geschrieben hat und vor allem meine teilweise gekritzeltten Zeichnungen in ein Computer-Format gebracht hat.

Ulm, den 4. Oktober 2004

Karsten Urban

Kapitel 1

Einführung und Beispiele

Zahlreiche Problemstellungen führen auf partielle Differentialgleichungen, z.B. aus den Bereichen

- Ingenieurwissenschaften
(Elastizitätstheorie, Aerodynamik, Elektrotechnik, ...)
- Medizin
(Strahlungssimulation, Laser, Heilungsprozesse, ...)
- Wirtschaftswissenschaften
(Bewertung von Optionen, Lebensversicherungen, ...)
- Naturwissenschaften
(Planetenbahnen, Wärmeleitung, ...)

Es ist sicher nicht übertrieben zu behaupten, dass viele Wissenschaftszweige ohne die Lösung von partiellen Differentialgleichungen nicht denkbar wären. In dieser Vorlesung wollen wir uns mit der mathematischen Untersuchung von Partiellen Differentialgleichungen beschäftigen z. B.

- Lösbarkeit
- Korrekt-Gestelltheit
- (Analytische) Lösungsmethoden
- Numerische Näherungsverfahren

Gerade in den Anwendungen ist das Zusammenspiel von *mathematischer Modellierung*, *mathematischer Analyse* und entsprechender *Lösung* bzw. *Simulation* von enormer Bedeutung. Mit Modellierung ist die Darstellung eines physikalischen o.a. Vorgangs mit Hilfe von mathematischen Formeln bzw. Gleichungen gemeint. Dies ist oftmals ein wesentlicher und alles andere als trivialer Schritt, da hier sowohl das Wissen des jeweiligen Anwendungsgebiets als auch fundierte mathematische Kenntnisse notwendig sind. Wir werden

uns hier vorwiegend mit der mathematischen Analyse und der Lösung von partiellen Differentialgleichungen beschäftigen. Die Simulation von Vorgängen, die durch partielle Differentialgleichungen modelliert werden, beruht meist auf numerischen Methoden. Dies ist Gegenstand der Numerik und wird in einer gesonderten Vorlesung betrachtet.

Auch wenn in der deutschsprachigen Literatur oftmals die Abkürzung “PDG” für Partielle Differentialgleichungen verwendet wird, bevorzuge ich die englische Abkürzung “PDE” (partial differential equations) und werde diese auch in diesem Manuskript durchgehend verwenden.

1.1 Was ist eine PDE?

Ganz allgemein kann man sagen, dass eine PDE eine Gleichung für eine gesuchte Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist, wobei das Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ offen ist (es kann ein Gebiet oder eine niederdimensionale Mannigfaltigkeit sein), die (partielle) Ableitungen von u enthält.

Wir stellen zunächst einige Bezeichnungen und wichtige Beispiele zusammen, die Sie vielleicht schon aus anderen Vorlesungen kennen. Diese stammen zum größten Teil aus [4].

1.2 Bezeichnungen

- Mit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir Vektoren im \mathbb{R}^d .
- Partielle Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$u_{x_i} := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, d$$

1.3 Einige Beispiele

1.3.1 Die Laplace–Gleichung

Die *Laplace–Gleichung* lautet $\Delta u = 0$, oft betrachtet man etwas allgemeiner die *Poisson–Gleichung*

$$\Delta u = f$$

mit einer gegebenen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Hier bezeichnet

$$\Delta u := \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u \tag{1.1}$$

den *Laplace–Operator*.

Physikalisch beschreibt die Poisson–Gleichung die Auslenkung einer eingespannten Membran unter der äußeren Kraft–Einwirkung f . Die Laplace–Gleichung $\Delta u = 0$ beschreibt

einen Gleichgewichtszustand. Allgemeiner beschreibt der Laplace–Operator physikalisch einen Diffusions–Vorgang. Daher ist dieser Differentialoperator auch ein wesentlicher Bestandteil in vielen partiellen Differentialgleichungen, wie wir im Folgenden noch sehen werden.

1.3.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Die Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei neben der Abhängigkeit von der Ortsvariablen $x \in \Omega$ zusätzlich *zeitabhängig*, d.h.

$$u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Wärme- und andere Ausbreitungsvorgänge werden oft modelliert als

$$u_t = \Delta u,$$

wobei Δu sich nur auf die Ortsvariable bezieht, d.h.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}.$$

1.3.3 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung lautet

$$u_{tt} = \Delta u$$

und beschreibt Wellen- und Schwingungsphänomene.

1.3.4 Die Korteweg–de Vries–Gleichung (KdV–Gleichung)

Diese Gleichung modelliert die Ausbreitung von Wellen auf der Oberfläche flacher Gewässer und wird daher auch die „Flachwassergleichung“ genannt. Sie lautet

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

und ist offenbar *nicht-linear* in u .

1.3.5 Die Monge–Ampère–Gleichung

Im zweidimensionalen Fall ($d = 2$) lautet diese

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f \quad [(x_1, x_2) = (x, y)]$$

und für $d \geq 2$

$$\det(u_{x_i x_j})_{i,j=1,\dots,d} = \det(H(u)) = f,$$

mit der *Hesse-Matrix*

$$H(u) = (u_{x_i x_j})_{i,j} = \begin{bmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{x_d x_1} & \cdots & u_{x_d x_d} \end{bmatrix}.$$

Die Monge–Ampère–Gleichung wird zur Bestimmung von Flächen mit vorgeschriebener Krümmung verwendet.

1.3.6 Die Minimalflächen–Gleichung

Die Modellierung von Flächen im \mathbb{R}^3 mit minimaler Krümmung geschieht über die Gleichung

$$(1 + u^2 y)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

1.3.7 Die Maxwell–Gleichungen

Die Maxwell–Gleichungen sind die Grundgleichungen der Elektro–Magnetik. Dabei werden folgende Symbole verwendet:

- $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$: elektrische Feldstärke
- $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$: magnetische Feldstärke
- $\vec{E}, \vec{B} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ (zeitabhängige Vektorfelder)

Für gegebene Konstanten ρ (die Ladungsdichte) und j (die magnetische Stromdichte) lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 && \text{(magneto–statisches Gesetz)} \\ \vec{B}_t + \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 && \text{(magneto–dynamisches Gesetz)} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho && \text{(elektro–statisches Gesetz)} \\ \vec{E}_t - \operatorname{rot} \vec{B} &= -4\pi j && \text{(elektro–dynamisches Gesetz)} \end{aligned}$$

Dabei ist für $\vec{u} := (u_1, u_2, u_3)$ wie üblich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} : &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} u_i, & \operatorname{rot} \vec{u} : &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} u_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} u_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} u_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} u_1 \end{pmatrix} \\ &= \nabla \cdot \vec{u} & &= \nabla \times \vec{u} \end{aligned}$$

mit dem *Nabla-Operator* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$ definiert.

Dies ist ein lineares *System* von PDEs, da es in jeder der Unbekannten linear ist und ein Gleichungssystem aus mehreren (gekoppelten) partiellen Differentialgleichungen besteht.

1.3.8 Die Navier–Stokes–Gleichungen

Dies sind die Grundgleichungen der Kontinuums-, Gas- und Strömungsmechanik. Zunächst führen wir wiederum die physikalischen Größen ein. Es bezeichne $\rho: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die *Dichte*, d.h. die Masse pro Volumeneinheit und $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld. Dabei bedeutet u_i die Komponente der Geschwindigkeit in die Koordinatenrichtung i . Die Geschwindigkeit ist also eine *gerichtete* Größe. Weiter ist $\rho\vec{u}$: die *Massenstromdichte*, d.h. der Impuls pro Volumeneinheit. Weiterhin bezeichne $e: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die *Energie* und ρe die *Gesamtmenge* pro Volumen (d.h. innere und kinetische Energie). Damit gilt nun folgender Erhaltungssatz

$$\vec{U}_t + \underbrace{\sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} \vec{F}_m}_{\text{„Konvektion“}} + \underbrace{\sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} \vec{G}_m}_{\text{„Diffusion“}} = 0, \quad (1.2)$$

wobei die auftauchenden Größen wie folgt definiert sind

$$\begin{aligned} \vec{U} &= [\rho, \rho\vec{u}, \rho e]^T : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^5 \quad \text{„Zustandsvektor“} \\ \vec{F}_m &= \begin{bmatrix} \rho u_m \\ \rho u_i \cdot \vec{u} + p \vec{\delta}_m \\ u_m \cdot (\rho e + p) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \vec{\delta}_m &:= (\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m})^T \\ & m\text{-ter Einheitsvektor} \\ (\vec{\delta}_1 &= (1, 0, 0)^T, \dots) \end{aligned} \\ \vec{G}_m &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\vec{\tau}_m \\ -\sum_{l=1}^3 u_l \tau_{m,l} + q_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Weiterhin sei $\tau_{m,l} := \mu \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) - \delta_{l,m} \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u}$, $\vec{\tau}_m = (\tau_{m,l})_{l=1}^3$ und μ die *dynamische Zähigkeit*, wobei wir das übliche Kronecker–Symbol verwenden, d.h.

$$\delta_{l,m} := \begin{cases} 1, & l = m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Schließlich ist $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$, $q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_m}$ der Vektor der *Wärmeströme*, T die Temperatur und λ die Wärmeleitfähigkeit.

Offenbar handelt es sich hier um ein *nicht-lineares* System von PDEs mit einer quadratischen Nichtlinearität.

Falls $\rho \equiv \text{const}$ gilt, d.h. aufgrund des konstanten Druckes ist das Medium *inkompressibel*, wird die 1. Komponente in (1.2), d.h.

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

zu folgender Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (1.3)$$

Man kann dann weiter nachrechnen, dass sich die übrigen Gleichungen zu

$$\rho \vec{u}_t + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \eta \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad (1.4)$$

vereinfachen, wobei

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right)_{i=1,2,3}$$

und der Laplace-Operator wird komponentenweise verstanden, d.h.

$$\Delta \vec{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)^T.$$

Die Gleichungen (1.3,1.4) heißen *Navier-Stokes-Gleichungen* für *inkompressible* Fluide.

1.3.9 Die Einstein'schen Feldgleichungen

Diese dürfen natürlich in einer Vorlesung über PDEs in Ulm nicht fehlen. Diese sind ein Bestandteil der allgemeinen Relativitätstheorie und geben die Krümmung der Metrik (g_{ij}) des Raum-Zeit-Kontinuums an:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = K T_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (t = x_0 : \text{Zeit}),$$

wobei

- K die Feldkonstante ist,

$$R_{ij} = \sum_{k=0}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^{(k)} - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^{(k)} + \sum_{l=0}^3 \left(\Gamma_{l,k}^{(k)} \Gamma_{ij}^{(k)} - \Gamma_{ij}^{(k)} \Gamma_{lk}^{(k)} \right) \right\}$$

mit

$$\Gamma_{i,j}^{(k)} := \frac{1}{2} \sum_{l=0}^3 g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right)$$

- $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$ (inverse Matrix)

- $R := \sum_{i,j=0}^3 g^{ij} R_{ij}$

(R und R_{ij} sind Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen der gesuchten Matrix g_{ij}).

1.3.10 Die Schrödinger-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung ist die Grundgleichung der Quantenmechanik und lautet

$$i \hbar \vec{u}_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{u} + V(x, \vec{u}),$$

wobei die einzelnen Größen gegeben sind durch

- $i = \sqrt{-1}$ (imaginäre Einheit),
- \hbar : die Planck'sche Konstante,
- m : Masse,
- V : ein gegebenes Potential.

Der Faktor i führt zu wesentlichen Unterschieden zur Wärmeleitungsgleichung, obwohl beide Gleichungen formal ähnliche Gestalt besitzen. Dies ist das erste Beispiel einer komplexwertigen PDE.

1.3.11 Die Platten-Gleichung

Die Platten-Gleichung beschreibt Auslenkung einer eingespannten Platte, die im Gegensatz zu einer Membran eine nicht zu vernachlässigende Dicke besitzt. Die Gleichung lautet

$$\Delta^2 u = \Delta \Delta u = f,$$

und ist offenbar eine Gleichung vierter Ordnung, da sie Ableitungen der Unbekannten der Ordnung vier beinhaltet.

1.3.12 Die Black-Scholes-Gleichung

Die Black-Scholes-Gleichung ist die von Merton, Black und Scholes hergeleitete, berühmte Gleichung zur Bewertung von Finanzderivaten. Sie lautet (in der linearen Form)

$$V_t(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS}(S, t) + (r - \delta) S V_S(S, t) - r V(S, t) = 0,$$

wobei

- V : der gesuchte Wert eines Derivates ist,
- S : Kurs des Basis-Wertes (z.B. ein Aktien- oder Währungskurs),
- σ^2 : Volatilität (Standard-Abweichung),
- r : Zinsrate
- δ : Dividendenrate

1.4 Kategorisierung von PDEs

Wir haben nun eine ganze Reihe von PDEs kennen gelernt. Diese haben teilweise total verschiedenen Eigenschaften. Zunächst stellt sich die Frage nach einer einheitlichen Theorie für diese verschiedenen Typen von PDEs. Es überrascht nicht, dass es eine solche universelle Theorie nicht gibt. Unterschiedliche Eigenschaften von PDEs führen zu unterschiedlichem mathematischen Eigenschaften und es wird sich zeigen, dass man die jeweiligen Eigenschaften auch für (numerische) Lösungsverfahren ausnutzen kann und muss.

Wie kann man also PDEs klassifizieren und wie kann man die jeweiligen Eigenschaften für Theorie und Lösung von PDEs ausnutzen?

Man unterscheidet zunächst folgende Kategorien

- I) Typ der Gleichung (d.h. deren algebraische Eigenschaften)
- II) Ordnung (höchste auftretende Ableitung)
- III) Typeneinteilung der PDE (für zweite Ordnung)
- IV) Lösbarkeit

Algebraische Eigenschaften. Bezüglich der algebraischen Eigenschaften unterscheidet man

- lineare Gleichungen und
- nicht-lineare Gleichungen,
bei denen vor allem folgende Spezialfälle näher untersucht werden:
 - + quasi-lineare Gleichungen
Diese sind linear in der höchsten auftretenden Ableitung. In unseren obigen Beispielen sind alle Gleichungen außer der Monge-Ampère-Gleichung quasi-linear.
 - + semi-lineare Gleichungen
Hier hängt der Term mit den höchsten auftretenden Ableitungen *nicht* mehr von u und Ableitungen niedriger Ordnung ab. Zum Beispiel ist die Minimalflächen-Gleichung quasi-linear, aber *nicht* semi-linear.

Die Ordnung einer PDE. Die Ordnung bestimmt sich aus dem Grad der höchsten Ableitung. Dabei kann es vorkommen, dass man zwischen Orts- und Zeitableitungen unterscheidet. Unsere obigen Beispiele sind

- | | |
|---|------------|
| 7.) | 1. Ordnung |
| 1.), 2.), 3.), 5.), 6.), 8.), 9.), 10.), 12.) | 2. Ordnung |
| 4.) | 3. Ordnung |
| 11.) | 4. Ordnung |

Typeinteilung von PDEs zweiter Ordnung. Für PDEs zweiter Ordnung kann man eine Typeinteilung vornehmen, die auch wesentliche Aussagen über deren mathematische Eigenschaften erlauben. Wir werden dies später im Detail untersuchen. Je nach den Eigenschaften der Koeffizienten einer PDE zweiter Ordnung der Form

$$F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) = 0 \quad (1.5)$$

erhält man ein anderes Verhalten. Um dies zu beschreiben, betrachtet man allgemeine Variablen $q = (q_i)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d$, $p = (p_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und

$$F(x, u, q, p)$$

und betrachtet die Matrix

$$K(x) = K(u; x) := \left(F_{p_{i,j}}(x, u(x), u_{x_i}(x), u_{x_i x_j}(x)) \right)_{i,j=1, \dots, d} \quad (1.6)$$

für $x \in \Omega$.

Definition 1.4.1 Die Gleichung (1.5) heißt dann

- (a) elliptisch in x , falls $K(x)$ positiv definit ist;
- (b) hyperbolisch in x , falls $K(x)$ genau einen negativen und $(d-1)$ positive Eigenwerte hat;
- (c) parabolisch in x , falls $K(x)$ positiv semi-definit, aber nicht definit ist und der Rang von $(K(x), (F_{q_i}(x, u(x), u_{x_i}(x), u_{x_i x_j}(x)))_i)$ gleich d ist.

Bemerkung 1.4.2:

- (a) Man beachte, dass K auch von der unbekanntem Funktion u abhängen kann.
- (b) Der Typ einer Gleichung kann *gemischt* sein, d.h. von $x \in \Omega$ abhängen.
- (c) Eine Gleichung der Form

$$u_t = F(t, x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j})$$

mit elliptischen F ist parabolisch.

□

Wir betrachten nun einige Beispiele.

Beispiel 1.4.3: Betrachte die Laplace- bzw. Poisson-Gleichung in 2D, also $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f$. Offenbar gilt hier $F(x, u, q, p) = p_{11} + p_{22} - f$, d.h.

$$F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - f,$$

also $F_{p_{11}}(\dots) = 1$, $F_{p_{22}}(\dots) = 1$, und alle andere Ableitungen verschwinden. Damit gilt

$$K \equiv K(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Gleichung ist elliptisch in *ganz* Ω . □

Beispiel 1.4.4: Die Monge–Ampère–Gleichung in 2D lautet: $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - f = 0$. Falls $u \in C^2(\Omega)$ gilt

$$u_{xy}u_{yx} = u_{xy}u_{xy} = u_{xy}^2,$$

also $F(x, u, q, p) = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} - f$ und

$$K(u; x) = \begin{pmatrix} u_{yy}(x) & -u_{yx}(x) \\ -u_{xy}(x) & u_{xx}(x) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Kriterium von Hurwitz ist die Gleichung also elliptisch, falls

- $u_{xx} > 0$
- $\det K(u; x) = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}u_{yx} = f > 0$

aufgrund der partiellen Differentialgleichung. □

Lösbarkeit. Betrachte wiederum die allgemeine Form der Gleichung in (1.5). Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung muss man Anfangsbedingungen stellen, um eine eindeutige Lösung zu sichern (nach dem Satz von Picard–Lindelöf), hier stellt man *Randbedingungen* an u oder Ableitungen von u auf dem Rand $\Gamma := \partial\Omega$.

Daraus ergeben sich sofort folgende Fragen: Ist das Randwertproblem (RWP) (im Sinne von Hadamard) korrekt gestellt? Also hat man Fragen nach

- Existenz,
- Eindeutigkeit,
- Stabilität, d.h. stetige Abhängigkeit von den Daten, zu beantworten, sowie die Frage
- welche Rand- bzw. Anfangsbedingungen man stellen kann

zu untersuchen.

Kapitel 2

Die Laplace–Gleichung

Die vielleicht einfachste partielle Differentialgleichung ist die Laplace–Gleichung. Sie erlaubt nicht nur eine weitreichende Analysis, sondern bietet auch eine Reihe von Lösungsverfahren. So nannte Ronald DeVore (University of South Carolina at Columbia) die Laplace–Gleichung “the fruit fly of numerical analysis”.

2.1 Eine einfache Lösungsformel

Wir betrachten die Laplace–Gleichung in 2D

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2.1)$$

die auch *Potential–Gleichung* genannt wird. Auf dem Einheits–Kreis

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \quad (2.2)$$

kann man (2.1) leicht in Polarkoordinaten transformieren

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Dann rechnet man leicht nach, dass

$$r^k \cos(k\varphi), \quad r^k \sin(k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(2.1) erfüllen. Zusätzlich zur Differentialgleichung (2.1) stellt man Randbedingungen. In Polarkoordinaten entspricht der Rand der Menge, für die $r = 1$ gilt. Wenn man nun annimmt, dass die Rand–Funktion in eine Fourier–Reihe entwickeln lässt, d.h.

$$u(\cos \varphi, \sin \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)),$$

dann lässt sich die Lösung im Inneren des Kreises mit Hilfe von Koeffizientenvergleich darstellen als

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)).$$

2.2 Green'sche Formel und harmonische Funktionen

Zunächst zur Erinnerung aus der Analysis 3 (oder aus der Höheren Mathematik):

Satz 2.2.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ regulär und beschränkt mit Oberfläche $\partial\Omega$, die aus endlich vielen geschlossenen, stückweise regulären, orientierbaren Flächen besteht, die sich höchstens in den Randpunkten treffen (regulär bedeutet Riemann-messbar mit Volumen $\text{Vol}(\Omega) \neq 0$). Dann gilt für jedes Vektorfeld $\vec{V} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{V}(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V}(z) \cdot \vec{n}(z) \, do(z), \quad (2.3)$$

wobei \vec{n} die äußere Normale an $\partial\Omega$ und do das Oberflächenelement von $\partial\Omega$ ist.

Beweis: Findet man in jedem Buch über Analysis 3. \square

Bemerkung 2.2.2: Falls $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, sind die Voraussetzungen des Satzes bzgl. Ω erfüllt. Dabei ist eine Mannigfaltigkeit von der Klasse C^1 , wenn sie Graph einer stückweisen C^1 -Funktion ist. \square

Eine wichtige Vorbereitung ist folgendes Resultat:

Lemma 2.2.3 Für $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ gelten:

(a) **Erste Green'sche Formel:**

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} v(z) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(z) \, do(z). \quad (2.4)$$

(b) **Zweite Green'sche Formel:**

$$\int_{\Omega} [v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)] \, dx = \int_{\partial\Omega} \left\{ v(z) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(z) - u(z) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} v(z) \right\} \, do(z). \quad (2.5)$$

Bemerkung 2.2.4: Die Formeln (2.4, 2.5) sind natürliche Verallgemeinerungen der partiellen Integration

$$\int_a^b v(x) u''(x) \, dx = - \int_a^b v'(x) u'(x) \, dx + v(z) u'(z) \Big|_{z=0}^b.$$

\square

Beweis von Lemma 2.2.3:

(a) Setze $\vec{V}(x) := v(x)\nabla u(x) = (v(x)u_{x_i}(x))_{i=1,2,3}$, also mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(x) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (v(x)u_{x_i}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^3 (v_{x_i}(x)u_{x_i}(x) + v(x)u_{x_i x_i}(x)) \\ &= \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) + v(x) \operatorname{div} \nabla u(x), \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus Satz 2.2.1.

(b) Vertausche in (2.4) die Rollen von u und v und subtrahiere beide Gleichungen voneinander. \square

Definition 2.2.5 Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonisch (in Ω), falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.

Beispiel 2.2.6:

- (i) Für $\Omega = \mathbb{R}^d$ sind alle konstanten und affin-linearen Funktionen harmonisch.
- (ii) Die Funktion $u(x) := x_1^2 - x_2^2$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ist ein harmonisches Polynom zweiter Ordnung.
- (iii) *Fundamental-Lösung* der Laplace-Gleichung, d.h.:

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(|x - y|) : = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x - y| & \text{für } d = 2, \\ \frac{1}{d(2-d)\omega_d} |x - y|^{2-d} & \text{für } d > 2, \end{cases} \quad (2.6)$$

für $x \neq y$, wobei ω_d das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$ ist (Übung). Die Bezeichnung ‘‘Fundamental-Lösung’’ wird später klar.

- (iv) Das Vektorfeld $\vec{W} = (u, v)^T \in C^1$ ist wirbel- und quellenfrei, d.h.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{w} = v_x - u_y = 0 &\Rightarrow \exists \text{ Potential } U(x, y) \\ \operatorname{div} \vec{w} = u_x + v_y = 0 &\quad \text{mit } U_x = u, \quad U_y = v, \end{aligned}$$

also

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = u_x + v_x = \operatorname{div} \vec{w} = 0,$$

daher der Name ‘‘Potentialgleichung’’.

(v) Es sei $f = u + iv$ holomorph, dann sind u und v holomorph. Mit den Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen (CR) gilt: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ und damit folgt sofort

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y \stackrel{(CR)}{=} v_{yx} - v_{xy} = 0, \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y \stackrel{(CR)}{=} -u_{yx} + u_{xy} = 0.\end{aligned}$$

□

Satz 2.2.7 Sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, einfach zusammenhängend, dann gilt: u ist harmonisch dann und nur dann, wenn eine holomorphe Funktion f existiert mit $u = \Re(f)$.

Beweis:

„ \Leftarrow “ Siehe Beispiel (v) oben.

„ \Rightarrow “ Sei $\Delta u = 0$ und betrachte $\vec{w} = (w_1, w_2)^T := (-u_y, u_x)^T$. Dann folgt wegen $\Delta u = 0$ sofort $(w_1)_y = -u_{yy} = u_{xx} = (w_2)_x$, die sogenannte „Integrierbarkeitsbedingung“. Also besitzt \vec{w} ein Potential

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{w} \, dx \, dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y \, dx + u_x \, dy) \quad (2.7)$$

und $v_x = -u_y$ sowie $v_y = u_x$, also die Cauchy–Riemann–Differentialgleichung für $f = u + iv$ und damit folgt, dass f holomorph ist. □

Bemerkung 2.2.8: Für $f = u + iv$ nennt man die Funktion v zu u *harmonisch konjugiert*, denn

$$\begin{aligned}\Delta u = 0 &\iff f = u + iv \text{ ist holomorph} \\ &\iff if = -v + iu \text{ ist holomorph} \\ &\iff \Delta v = \Delta(-v) = 0\end{aligned}$$

und f heißt *komplexes Potential* zu u . □

Satz 2.2.9 (Mittelpunktformel) Es sei f holomorph in $G \subset \mathbb{C}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset G$, dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \, dt. \quad (2.8)$$

Beweis: Analysis 4 (folgt direkt aus der Cauchy’schen Integralformel). □

Satz 2.2.10 (Mittelwerteigenschaft) *Es sei u auf*

$$\overline{B_r(x_0, y_0)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - (x_0, y_0)| \leq r\}, \quad r > 0\}$$

stetig und im Inneren $B_r(x_0, y_0)$ harmonisch, dann gilt

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt.$$

Beweis: Betrachte die holomorphe Funktion $f = u + iv$ und wende Satz 2.2.9 auf $z_0 = x_0 + iy_0$ an

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

und bilde auf beiden Seiten den Realteil. \square

Bemerkung 2.2.11: Die Stetigkeitsforderung an u kann durch die Forderung ersetzt werden, dass u messbar und lokal in Ω integrierbar ist. \square

Satz 2.2.12 (Maximumprinzip) *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes und beschränktes Gebiet und $u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\bar{G} := G \cup \partial G$) sei stetig und in G harmonisch. Dann gilt:*

- a) *u nimmt sein Maximum und Minimum auf dem Rand ∂G an.*
- b) *Besitzt u im Inneren (d.h. in G) ein lokales Maximum oder Minimum, so ist u konstant.*

Beweis: Wir beweisen zunächst Teil b), danach a).

- b) Betrachte $f = u + iv$, v sei zu u harmonisch konjugiert. Dann ist $F(z) = e^{f(z)}$ holomorph in G . Aus der Mittelpunkformel (2.8) folgt

$$|F(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z_0 + re^{it})| dt \quad \text{für alle } z_0 \in G.$$

Falls nun z_0 ein lokales Minimum ist, d.h.

$$|F(z_0)| \geq |F(z)| \quad \forall z \text{ mit } |z - z_0| > \varepsilon,$$

folgt also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z_0 + re^{it})| dt \leq |F(z_0)| \quad \text{für } r < \varepsilon,$$

also

$$|F(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z_0 + re^{it})| dt,$$

d.h.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{(|F(z_0 + re^{it})| - |F(z_0)|)}_{\leq 0, \text{ weil } z_0 \text{ Minimum ist}} dt = 0,$$

also ist F konstant.

Betrachte nun $|F(z)| = |e^{f(z)}| = e^u$, also hat u entweder kein Extremum in G oder u ist konstant.

- a) Da G beschränkt ist, nimmt u nach dem Satz von Weierstraß seine Extrema auf \bar{G} an. Falls U nicht konstant ist, können diese nach b) nur auf ∂G liegen. \square

Korollar 2.2.13 (Eindeutigkeits- und Stabilitätssatz) *Unter den obigen Voraussetzungen von Satz 2.2.12 gilt:*

- a) Falls $a \leq u(x, y) \leq b \quad \forall (x, y) \in \partial G$, dann gilt $a \leq u(x, y) \leq b \quad \forall (x, y) \in \bar{G}$
- b) Ist $h : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere stetige, in G harmonische Funktion, so gilt:
- $$h = u \text{ auf } \partial G \Rightarrow h = u \text{ auf ganz } \bar{G}$$
- $$|h - u| \leq \varepsilon \text{ auf } \partial G \Rightarrow |h - u| \leq \varepsilon \text{ auf ganz } \bar{G} \quad (\varepsilon > 0)$$

Beweis:

- a) Nach Satz 2.2.12 a) werden Minimum m und Maximum M auf ∂G angenommen. Daraus folgt $a \leq m \leq u(x, y) \leq M \leq b \quad \forall (x, y) \in \bar{G}$.
- b) Für $g := h - u$ gelten die Voraussetzungen von a) mit $a = b = 0$ und für $g := h - u$ gilt a) mit $a = -\varepsilon, b = \varepsilon$. \square

2.3 Das Dirichlet–Problem

Nach den obigen Vorbereitungen kommen wir nun zu weiteren Lösungsformeln.

Definition 2.3.1 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise regulärem Rand ∂G . Gegeben sei eine Randfunktion $U_0 : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$, die beschränkt und mit Ausnahme einer endlichen Punktmenge $N \subset \partial G$ stetig ist. Das folgende Problem heißt Dirichlet- (oder Poisson-)Problem:*

Gesucht ist $u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (i) $\Delta u = 0$ in G ,

(ii) u ist stetig in $\bar{G} \setminus N$ und beschränkt in \bar{G} ,

(iii) $u(x, y) = u_0(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial G \setminus N$.

Satz 2.3.2 (Dirichlet–Problem in der oberen Halbebene)

Das Dirichlet–Problem in $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ mit $u(x, 0) = \varphi(x)$ (mit auf \mathbb{R} stetigem und beschränktem φ) besitzt die eindeutige Lösung

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt, \quad y > 0. \quad (2.9)$$

Diese Formel heißt auch Poisson–Integralformel, vgl. Abb. 2.1.

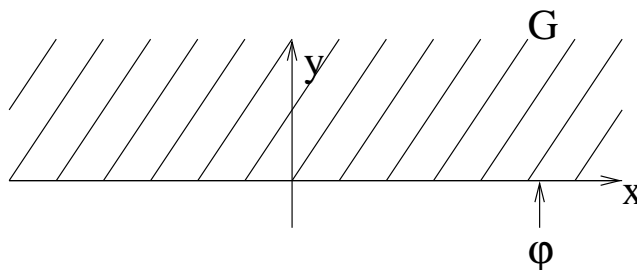


Abbildung 2.1: Dirichlet–Problem in der oberen Halbebene G : Randbedingungen φ werden auf der x –Achse gestellt.

Für den Beweis betrachtet man zunächst 2 Spezialfälle, auf die man dann den allgemeinen Fall zurückführt.

Beispiel 2.3.3: [Potentialsprung] Betrachte das Dirichlet–Problem auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ mit den Randwerten

$$\begin{cases} u_0(x, 0) = c_1, & x < x_1, \\ u_0(x, 0) = c_2, & x > x_1, \end{cases} \quad (2.10)$$

vgl. Abb. 2.2. Dieses hat die Lösung

$$u(x, y) = c_2 + \frac{1}{\pi}(c_1 - c_2) \operatorname{Arg}(x - x_1 + iy), \quad x \neq x_1, y \geq 0, \quad (2.11)$$

also insbesondere

$$u(x, y) = c_2 + \frac{1}{\pi}(c_1 - c_2) \operatorname{arccot} \left(\frac{x - x_1}{y} \right), \quad \text{falls } y > 0. \quad (2.12)$$

Denn: u ist als Realteil des komplexen Potentials

$$f(z) = c_2 - \frac{i}{\pi}(c_1 - c_2) \ln(z - x_1)$$

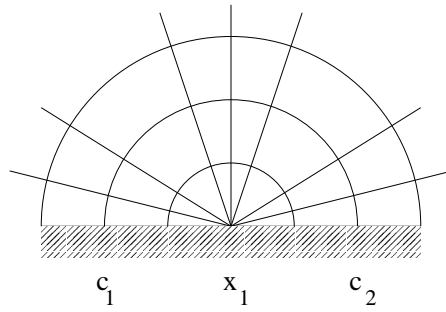


Abbildung 2.2: Potentialsprung.

einer Zirkulationsströmung um den Punkt $a = (x_1, 0)$ harmonisch.

Die Äquipotentiallinien $u(x, y) = \text{Arg}(x - x_1 + iy) \equiv \text{const}$ sind die aus a herausgehenden Halbgeraden. Damit folgt für $y = 0$:

$$u(x, 0) = c_2 + \frac{1}{\pi}(c_1 - c_2) \text{Arg}(x - x_1) = \begin{cases} c_2 + \frac{1}{\pi}(c_1 - c_2)\pi = c_1, & \text{falls } x < x_1, \\ c_2 + \frac{1}{\pi}(c_1 - c_2)0 = c_2, & \text{falls } x > x_1, \end{cases}$$

und daher ist (2.10) erfüllt. Die Feldlinien $\ln|z - x_1| \equiv \text{const}$ sind Halbkreise um x_1 . \square

Beispiel 2.3.4: Betrachtet man nun 2 Sprungstellen $x_1 < x_2$ und die Randbedingung

$$u(x, 0) = \begin{cases} c, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.13)$$

vgl. Abb. 2.3.

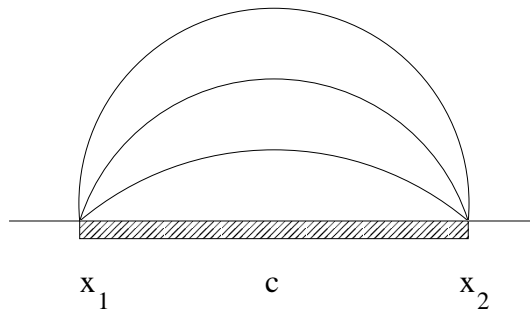


Abbildung 2.3: Zwei Sprünge.

Man erhält die Lösung durch Überlagerung der Lösungen aus Beispiel 2.3 mit $c_1 = -c$, $c_2 = 0$ bzw. $c_1 = c$, $c_2 = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -\frac{c}{\pi} \text{Arg}(x + iy - x_1), \\ u_2(x, y) &= \frac{c}{\pi} \text{Arg}(x + iy - x_2), \end{aligned}$$

also

$$u(x, y) = \frac{c}{\pi} [\operatorname{Arg} (x + iy - x_2) - \operatorname{Arg} (x + iy - x_1)]. \quad (2.14)$$

□

Beweis von Satz 2.3.2: Unterteile \mathbb{R} in Teilintervalle $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ und betrachte Randbedingungen

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}], \\ \varphi(\xi_i), & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

wobei ξ_i Zwischenpunkte aus dem Mittelwertsatz sind. Damit liefert die Überlagerung (d.h. Summation)

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(\xi_i)}{\pi} \left[\operatorname{arccot} \frac{x - x_{i+1}}{y} - \operatorname{arccot} \frac{x - x_i}{y} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(\xi_i)}{\pi} \frac{y}{(x - \xi_i)^2 + y^2} \Delta x_i \quad (2.15)$$

und die Grenzübergänge $x_0 \rightarrow -\infty$, $x_n \rightarrow \infty$, $\Delta x_i \rightarrow 0$ führen auf (2.9).

Die Eindeutigkeit folgt mit der Transformation von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ auf den Einheitskreis und dem Maximumsprinzip. □

Dirichlet–Problem in „beliebigen“ Gebieten

Für „realistische“ Anwendungen ist natürlich die obere Halbebene nicht ausreichend, oftmals hat es sogar mit komplizierten Gebieten zu tun. Betrachte nun das allgemeine Problem

$$\Delta \phi = 0 \text{ auf } G, \quad \phi = \phi_0 \text{ auf } \partial G \quad (2.16)$$

Idee: Transformiere G — falls möglich — auf ein „schönes“ Gebiet Ω und löse das Dirichlet–Problem dort. Damit hat man folgende Schritte:

1.) **Modell:**

Wähle $\Omega, \partial\Omega$ „schön“ mit bekanntem Lösungsverfahren (z.B. $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$)

2.) **Konforme Transformation:** („Verpflanzung“)

Bestimme eine umkehrbare analytische Abbildung

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit $f(G) = \Omega$, $f(\partial G) = \partial\Omega$, $f'(z) \neq 0$, $z \in G$. Dann werden die Randbedingungen übertragen:

$$\psi_0(u, v) = \psi_0(w) := \phi_0(f^{-1}(w)), \quad w = u + iv \in \partial\Omega$$

3.) **Lösung des Modellproblems:**

Bestimme ψ mit $\Delta\psi = 0$ auf Ω und $\psi = \psi_0$ auf $\partial\Omega$.

4.) **Rücktransformation:**

Die Funktion

$$\phi(x, y) = \phi(z) := \psi(f(z)) = \psi(u(x, y), v(x, y))$$

löst (2.16).

Begründung: Die Funktion ψ ist harmonisch und daher ist $F(w) = \psi(x) + i\Gamma(w)$, $w \in \Omega$ mit analytischem Γ holomorph ($\psi = \operatorname{Re}(F)$). Daher ist $F(f(z)) = \psi(f(z)) + i\Gamma(f(z))$ wegen der Kettenregel analytisch. Daher ist $\phi = \operatorname{Re}(F \circ f)$ harmonisch in G , d.h. $\Delta\phi = 0$. Für $z \in \partial G$ gilt $\phi(z) = \psi(f(z)) = \phi_0(f^{-1}(f(z))) = \phi_0(z)$ und die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. \square

Beispiel 2.3.5: Bestimme die stationäre Temperaturverteilung bei konstanter Temperatur 0° C auf dem unteren und 100° C auf dem oberen Halbkreis, vgl. Abb. 2.4. Hier haben wir:

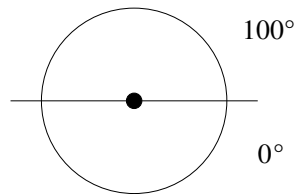


Abbildung 2.4: Kreis mit unterschiedlichen Temperaturen.

1.) Modell: $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

2.) Möbius-Transformation: $w = f(z) = \frac{1}{i} \frac{z-1}{z+1}$ mit der 6-Punkte-Formel

$$(-i \rightarrow -1, 1 \rightarrow 0, i \rightarrow 1),$$

d.h. der untere (bzw. obere) Halbkreis wird auf die negative (bzw. positive) Achse abgebildet und dies führt auch entsprechend auf stückweise konstante Randbedingungen.

3.) Nach Beispiel 2.3 lautet die Lösung des Modellproblems (mit $c_1 = 0$, $c_2 = 100$)

$$\psi(w) = 100 - \frac{100}{\pi} \operatorname{Arg}(w).$$

4.) Die Rückverpflanzung liefert die Lösung:

$$\phi(x, y) = 100 - \frac{100}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{1}{i} \frac{x + iy - 1}{x + iy + 1}$$

□

Daraus ergibt sich sofort folgendes Resultat.

Satz 2.3.6 (Poisson–Integralformel auf dem Kreis)

Die eindeutig bestimmte Lösung des Dirichlet–Problems

$$\Delta\phi(z) = 0 \quad \text{für } |z| < R \quad \text{und} \quad \phi(z) = \phi_0(z) \quad \text{für } |z| = R$$

wird (in Polarkoordinaten) dargestellt durch die Poisson–Integralformel

$$\phi(\rho e^{it}) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\phi_0(Re^{i\tau})}{R^2 - 2R\rho \cos(\tau - t) + \rho^2} d\tau \quad (2.17)$$

($0 \leq \rho < R$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

Beweis: (vgl. Beispiel 2.3, hier, der Einfachheit halber nur für $R = 1$).

Betrachte die Möbius–Transformation $w = f(z) = \frac{1}{i} \frac{z-1}{z+1}$ mit der 6–Punkte–Formel ($-i \rightarrow -1$, $1 \rightarrow 0$, $i \rightarrow 1$). Dann liefert Satz 2.3.2 und die Rücktransformation

$$\psi(u, v) = \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(s)}{(u-s)^2 + v^2} ds, \quad v > 0, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Für die Randwerte $w = (u, 0) \in \partial\Omega$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ gilt $f^{-1}(w) = \frac{i-w}{i+w}$ und damit

$$\varphi(s) = \phi_0(f^{-1}(s)) = \phi_0\left(\frac{i-s}{i+s}\right) = \phi_0(e^{i\tau})$$

mit $\rho = e^{i\tau} = \frac{i-s}{i+s}$ ($f(\rho) = s$). Weiter gilt

$$\begin{aligned} e^{i\tau}(i+s) = i-s &\iff i(e^{i\tau} - 1) = (-s)(1 + e^{i\tau}) \\ &\iff s = i \frac{1 - e^{i\tau}}{1 + e^{i\tau}} = \dots = \frac{\sin(\tau)}{1 + \cos(\tau)} = \tan\left(\frac{\tau}{2}\right), \end{aligned}$$

also $\tau = 2 \arctan(s)$ und $\frac{d\tau}{ds} = \frac{2}{1+s^2}$. Für $\rho = e^{i\tau}$ und $z = f^{-1}(w) = \frac{i-w}{i+w}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\rho + z}{\rho - z} &= \frac{\rho + \frac{i-w}{i+w}}{\rho - \frac{i-w}{i+w}} \\ &= \frac{w(\rho - 1) + i(\rho + 1)}{w(\rho + 1) + i(\rho - 1)} \\ &= \dots = \frac{1}{(u-s)^2 + v^2} [v(1 + s^2) + i(u - s + s(u^2 + v^2) - s^2u)] \end{aligned}$$

für $w = u + iv$, also mit der Substitution $\rho = e^{i\tau}$

$$\frac{v(1 + s^2)}{(u-s)^2 + v^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{\rho + z}{\rho - z} \right) = \frac{|\rho|^2 - |z|^2}{|\rho - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\tau} - z|^2},$$

sowie für $z = \rho e^{i\tau}$ ($|z| = \rho$)

$$\begin{aligned} |e^{i\tau} - z|^2 &= (\cos \tau - \rho \cos t)^2 + (\sin \tau - \rho \sin t)^2 \\ &= 1 - 2\rho(\cos \tau \cos t + \sin \tau \sin t) + \rho^2 \\ &= 1 - 2\rho \cos(\tau - t) + \rho^2, \end{aligned}$$

schließlich also mit der Substitutionen $s = \tan(\frac{\tau}{2}) = f(\rho)$ und $\varphi(s) = \phi_0(f^{-1}(s))$, also $\varphi(f(\rho)) = \phi(\rho)$

$$\begin{aligned} \phi(\rho e^{it}) &= \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(s) ds}{(u-s)^2 + v^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho)^2 \phi_0(e^{i\tau})}{1 - 2\rho \cos(\tau - t) + \rho^2} \frac{1}{2} d\tau, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Kapitel 3

Elementare Lösungsverfahren

In diesem Kapitel stellen wir eine ganze Reihe von Lösungsverfahren zusammen, die bei vielen Problemen bereits zum Ziel führen. Wichtig dabei ist, welches Verfahren für welche Art von Problemen eingesetzt werden kann.

3.1 Trennung der Variablen

Als Beispiel betrachten wir zunächst

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega \quad (3.1)$$

mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$, d.h. dem Einheitsquadrat, und den Randbedingungen:

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.3)$$

$$u(x, 1) = g(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.4)$$

vgl. Abb. 3.1.

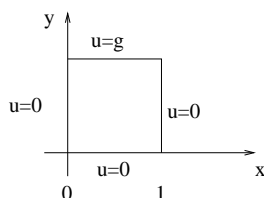


Abbildung 3.1: Randbedingungen für das Laplace–Problem auf dem Einheitsquadrat.

Als Lösungsansatz verwendet man folgenden Separationsansatz

$$\Delta u(x, y) = X(x)Y(y),$$

setzt dies in die PDE ein und erhält

$$\Delta u(x, y) = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Falls $X(x)Y(y) = u(x, y) \neq 0$ ergibt sich daraus

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (3.5)$$

Beachte nun, dass die linke Seite von (3.5) nicht von y abhängt, die rechte Seite hängt nicht von x ab, d.h. es muss eine x, y unabhängige Konstante λ sein.

Damit erhalten wir für X folgendes Eigenwertproblem:

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad (3.6)$$

was aus (3.2) folgt.

Da sich X in eine Fourier-Sinus-Reihe entwickeln lässt, brauchen wir aufgrund der Randbedingungen nur Funktionen der Art

$$X(x) := \sin(k\pi x), \quad k = 1, 2, \dots$$

zu betrachten, die in der Tat (3.6) erfüllen mit

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\lambda_k > 0).$$

Für Y ergibt sich zunächst bei Verwendung von (3.3) folgendes Problem

$$Y''(y) = \lambda Y(y), \quad 0 < y < 1, \quad Y(0) = 0. \quad (3.7)$$

Wir wissen schon, dass $\lambda > 0$ gilt, d.h. die allgemeine Lösung von (3.7) ergibt sich als Linearkombination der Funktionen

$$e^{\beta y}, \quad e^{-\beta y}, \quad \lambda = \beta^2.$$

Mit der Randbedingung $0 = \alpha_1 e^{\beta 0} + \alpha_2 e^{-\beta 0} = \alpha_1 + \alpha_2$ folgt $\alpha_2 = -\alpha_1$, also

$$Y(y) = \frac{1}{2}(e^{\beta y} - e^{-\beta y}) = \sin h(\beta y).$$

Damit erhalten wir mit $\beta = k\pi$ also partikuläre Lösungen der Form

$$u_k(x, y) = \sin(k\pi x) \sin h(k\pi x),$$

d.h.

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, y)$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$, die noch zu bestimmen sind.

Es fehlt noch die Randbedingung (3.4). Wir nehmen an, dass auch g eine Entwicklung als Sinus-Reihe besitzt:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin(k\pi x),$$

mit Fourier-Koeffizienten $g_k = 2 \int_0^1 g(x) \sin(k\pi x) dx$.

Also können wir einen Koeffizientenvergleich mit der Entwicklung von $u(x, y)$ für $y = 1$ durchführen und erhalten

$$g_k = c_k \sin h(k\pi),$$

also

$$c_k = \frac{g_k}{\sin h(k\pi)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

3.2 Homogenisierung

Streng genommen ist die Homogenisierung keine Lösungsmethode, sondern eine Möglichkeit ein Problem mit inhomogenen Randbedingungen auf homogene Randbedingungen zurück zu führen. Damit können wir uns in allen weiteren Untersuchungen auf homogene Randbedingungen beschränken.

Für einen beliebigen linearen Differentialoperator L betrachten wir das inhomogene Problem ($\hat{=}$ mit inhomogenen Randbedingungen $g \neq 0$)

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.8)$$

Man führt dieses Problem auf die Lösung eines homogenen Problems zurück, die sogenannte „Homogenisierung“.

Konstruiere hierzu eine Funktion (den sogenannten „Homogenisierer“) $\bar{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\bar{u} = g$ auf $\partial\Omega$ und \bar{u} hinreichend glatt für L . Löse dann das homogene Problem

$$Lv = \bar{f} := f - L\bar{u} \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.9)$$

Dann löst $u := v + \bar{u}$ das ursprüngliche Problem (3.8), denn

$$\begin{aligned} Lu &= Lv + L\bar{u} = \bar{f} + L\bar{u} = f - L\bar{u} + L\bar{u} = f \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= (v + \bar{u})|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} + \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0 + g = g. \end{aligned}$$

3.3 Variablentransformation (am Beispiel der Wellengleichung)

Oftmals kann man mit Hilfe einer geschickten Variablentransformation eine komplizierte partielle Differentialgleichung in eine einfachere umwandeln. Wenn man eine Lösung für diese einfachere PDE bestimmen kann, ergibt die Umkehrtransformation die gesuchte

Lösung. Natürlich kann es kein Patentrezept geben, wie man für jede beliebige PDE eine geeignete Transformation konstruiert, da dies stark von der jeweiligen PDE abhängt. Daher betrachten wir hier „nur“ ein Beispiel, die 1D Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx} \quad (3.10)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x) , \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (3.11)$$

und den gegebenen Funktionen f und g . Nun führen wir folgende Variablentransformation $(x, t) \leftrightarrow (\xi, \eta)$ durch gemäß

$$\xi = x + t , \quad \eta = x - t. \quad (3.12)$$

Dann folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \frac{d\xi}{dx} + u_\eta \frac{d\eta}{dx} = u_\xi + u_\eta \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_t &= u_\xi \frac{d\xi}{dt} + u_\eta \frac{d\eta}{dt} = u_\xi - u_\eta, \\ u_{tt} &= u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

also

$$u_{tt} - u_{xx} = (-4)u_{\xi\eta} = 0 \rightsquigarrow \boxed{u_{\xi\eta} = 0.}$$

Die allgemeine Lösung dieses Problems lautet

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta) = \phi(x + t) + \psi(x - t) \quad (3.13)$$

mit Funktionen ϕ, ψ , die zunächst beliebig sind und durch die Anfangsbedingungen (3.11) festgelegt werden. Setzt man diese ein, erhält man

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \phi'(x) - \psi'(x) = g(x).$$

Differenzieren der ersten Gleichung liefert $\phi'(x) + \psi'(x) = f'(x)$, also durch Addition der Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\phi'(x) &= f'(x) + g(x) \\ \Rightarrow \phi' &= \frac{1}{2}(f' + g) \Rightarrow \phi(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\xi} g(s) ds \end{aligned}$$

und bei Subtraktion

$$\psi' = \frac{1}{2}(f' - g) \Rightarrow \psi(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\eta} g(s) ds ,$$

also mit (3.13)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + t) + f(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds, \quad (3.14)$$

dies ist die bekannte *Lösungsformel von d'Alembert*.

Bemerkung 3.3.1:

- (a) Aus (3.14) folgt, dass die Lösung in (x, t) nur von den Anfangswerten ($t = 0$) im Intervall $[x - t, x + t]$ abhängt. Dies entspricht der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Phänomene, vgl. Abb. 3.2

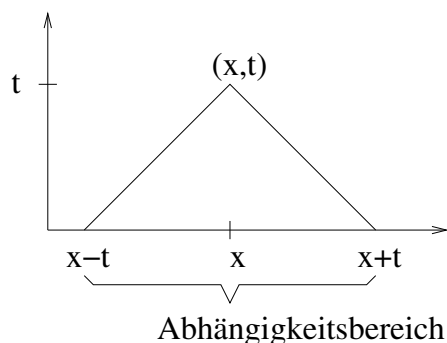


Abbildung 3.2: Abhängigkeitsbereich für den Punkt (x, t) .

- (b) Falls f und g nicht differenzierbar sind, ist (3.14) sinnvoll, aber die Funktion u ist *nicht* differenzierbar, was ein Widerspruch zu (3.10) ist bzw. zu sein scheint.

□

3.4 Lösung mittels Fourier–Transformation

Integraltransformationen wie z.B. Fourier- und Laplace–Transformation gehören zu den Standard–Hilfsmitteln zur Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Vor allem für Ingenieure gehören sie fast zum täglichen Handwerkszeug.

Definition 3.4.1 Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

die Fourier-Transformation (Spektralfunktion) von f .

Bemerkung 3.4.2: Die Fourier-Transformation transformiert ein Zeit-/Amplitudensignal $(t, f(t))$ in das Frequenzspektrum $(\omega, \hat{f}(\omega))$ eines Signals, d.h. $\hat{f}(\omega)$ ist der Anteil von Schwingungen mit Frequenz ω . \square

Beispiel 3.4.3:

(a) Der Rechteck-Impuls

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

vgl. Abb. 3.3. Es gilt

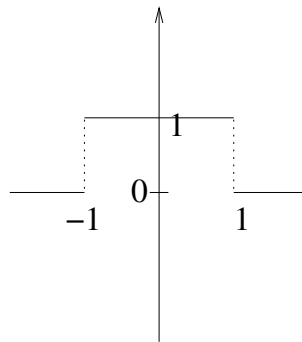


Abbildung 3.3: Der Rechteck-Impuls.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt \stackrel{\omega \neq 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{i\omega} [e^{-i\omega t}]_{t=-1}^{t=1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega} \end{aligned}$$

und $\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, also $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$, die sogenannte „sinc“-Funktion, siehe Abb. 3.4.

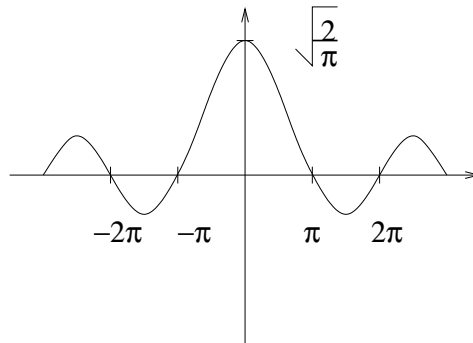


Abbildung 3.4: sinc-Funktion.

(b) Der exponentiell abfallende Impuls $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\alpha t} e^{-i\omega t}}_{=e^{-(\alpha+i\omega)t}} dt + \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\alpha t} e^{i\omega t}}_{=e^{-(\alpha-i\omega)t}} dt \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{(-1)}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{-\alpha + i\omega} e^{(-\alpha+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{\infty} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} \right\} = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha - i\omega + \alpha + i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.
 \end{aligned}$$

□

Satz 3.4.4 (Eigenschaften und Rechenregeln der Fouriertransformation)

Bei Existenz der auftretenden Fourier-Transformation gilt:

- (i) $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig mit $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$.
- (ii) Linearität: $\mathcal{F} \left[\sum_{k=1}^n c_k f_k \right] = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{F}[f_k]$
- (iii) Falls $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$ und falls f' existiert, folgt $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$
- (iv) $\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega) = (-i) \mathcal{F}[t \cdot f(\cdot)](\omega)$, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)| dt < \infty$.
- (v) $\mathcal{F}[f(\cdot - \alpha)](\omega) = e^{-i\alpha\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$.
- (vi) $\mathcal{F}[f(\alpha \cdot)](\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}[f] \left(\frac{\omega}{\alpha} \right)$, $\alpha \neq 0$.

Beweis: (hier nur (iii) und (iv), die anderen sind entweder trivial oder eine Übung)

(iii) Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f'(t)e^{-i\omega t} dt = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{t=-R}^R}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(t)e^{-i\omega t} dt}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} i\omega \hat{f}(\omega)},$$

woraus die Behauptung folgt.

(iv) Mittels Vertauschung von Differentiation und Integration folgt

$$\frac{d}{d\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = (-i) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)e^{-i\omega t} dt}_{=\mathcal{F}[t \cdot f(\cdot)](\omega)},$$

was (iv) beweist. \square

Einer der wesentlichen Gründe der Bedeutung der Fourier-Transformation liegt in folgenden Aussagen.

Satz 3.4.5 Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gilt:

(i) **Faltungsansatz:** $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$ für $h = f * g$, d.h. $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$ mit dem Faltungsprodukt

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds.$$

(ii) **Satz von Plancharel:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

(iii) **Parseval-Gleichung** (Energie-Erhaltung der Fourier-Transformation)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Beweis: Übung. \square

Bemerkung 3.4.6: Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Fourier-Transformation definiert als

$$\mathcal{F}[f](\omega) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\omega \cdot t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}^n,$$

($\omega \cdot t = \omega^T t$) und es gelten analoge Rechenregeln, z.B.

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} f \right] (\omega) = i\omega_k \mathcal{F}[f](\omega).$$

\square

Satz 3.4.7 (Fourier-Umkehrformel) Falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ (d.h. falls $f \in L^1(\mathbb{R})$), dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega =: \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Beweis: Nach Satz 3.4.4 (v) gilt

$$\widehat{g(\cdot - x)}(\omega) = e^{-ix\omega} \widehat{g}(\omega)$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} \widehat{g}(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f(\cdot + x)}(\omega) \widehat{g}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) g(t) dt, \end{aligned}$$

für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} h(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \hat{h}(t) dt \quad (\hat{h} = h) \\ &\stackrel{t \rightarrow -t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \hat{h}(-t) dt. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Wähle nun speziell

$$\psi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \psi(\omega),$$

(Beweis: Übung), also $\hat{\psi} = \psi$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 1 \quad \text{also} \quad \lim_{\mathbb{R} \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} \psi(x) dx = 0, \quad (3.16)$$

sowie $h_k(\omega) := \psi\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2}}$, $k = 1, 2, \dots$. Damit gilt

$$\hat{h}_k(\omega) = k\hat{\psi}(k\omega) = k\psi(k\omega) =: \psi_k(\omega).$$

Wegen (3.16) $\{\psi_k\}$ ist eine Dirac-Folge, d.h. $\psi_k(\omega) \rightarrow \delta_\omega$ ($k \rightarrow \infty$). Mit $\psi_k(\omega) = \psi_k(-\omega)$ folgt dann aus (3.15)

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}}_{=h_k(\omega)} d\omega}_{\substack{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \\ \text{(da } h_k(\omega) \nearrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ (} k \rightarrow \infty \text{))}}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \underbrace{\psi_k(t)}_{=\hat{h}_k(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \psi_k(t) dt \\ &= \underbrace{(f * \psi_k)(x)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)}, \end{aligned}$$

da ψ_k eine Dirac-Folge ist. \square

Bemerkung 3.4.8: Man kann (3.15) auch ohne die Umkehrformel mittels Vertauschung der Integrale zeigen. Dann benötigt man den Satz von Plancharel nicht zum Beweis. Dies wird in vielen Lehrbüchern auch so gemacht, da man dann die Umkehrformel für einen einfachen Beweis des Satzes von Plancharel verwenden kann. \square

Die Eigenschaften in Satz 3.4.4 können nun zur Lösung von Differentialgleichungen verwendet werden. Zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung:

Beispiel 3.4.9: Durchbiegung einer „unendlich langen Schiene“ unter eine spezifischen Last f

$$u^{(4)} + \alpha^4 u = f(x) \quad (3.17)$$

mit $\alpha > 0$ (also eine gewöhnliche Differentialgleichung).

Man stellt hier „asymptotische Randbedingungen“: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ (d.h. $f \in L^1(\mathbb{R})$), bildet man auf beiden Seiten von (3.16) die Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}[u^{(4)}](\omega) + \alpha^4 \hat{u}(\omega) \\ &= (i\omega)^4 \hat{u}(\omega) + \alpha^4 \hat{u}(\omega) = (\alpha^4 + \omega^4) \hat{u}(\omega), \end{aligned}$$

also

$$\hat{u}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\alpha^4 + \omega^4}.$$

Dies kann man nun mit Satz 3.4.7 zurücktransformieren:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{\alpha^4 + \omega^4} e^{ix\omega} d\omega .$$

□

Beispiel 3.4.10: [Anfangswertproblem der Wellengleichung auf \mathbb{R}]
 Betrachte nun wiederum die Gleichungen (3.15), (3.16), d.h.

$$u_{tt} = u_{xx} , \quad u(x, 0) = f(x) , \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

und definiere

$$\mathcal{U}(\omega, t) := \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\omega} dx,$$

d.h. die Fourier-Transformation bezüglich des Ortes x und damit

$$\mathcal{F}[u_{xx}(\cdot, t)](\omega) = -\omega^2 \mathcal{U}(\omega, t).$$

Mit $F(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega)$ und $G(\omega) := \mathcal{F}[g](\omega)$ wird das Anfangswertproblem (3.15), (3.16) transformiert zu:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{tt} + \omega^2 \mathcal{U} = 0 , & t \geq 0 , \\ \mathcal{U}(\omega, 0) = F(\omega) , \\ \mathcal{U}_t(\omega, 0) = G(\omega) , \end{cases} \quad (3.18)$$

also eine gewöhnliche (lineare) Differentialgleichung. Diese löst man mit bekannten Methoden (z.B. aus der Analysis 3, HM 3, ...) und erhält für $\omega \neq 0$

$$\mathcal{U}(\omega, t) = F(\omega) \cos(\omega t) + G(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}.$$

Setzt man dies unter Beachtung von

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) , \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

in die Rücktransformation ein, so erhält man die Formel von d'Alembert (3.14). (Übung).
 □

Beispiel 3.4.11: [Wärmeleitung in einem endlich langen Stab]
 Wir treffen zunächst folgende Annahmen:

- $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibe die Temperaturverteilung,
- der Stab sei isoliert, d.h. kein Hinzufügen oder Entweichen der Wärme,
- die Anfangstemperaturverteilung bei $t = 0$ sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir betrachten folgende PDE

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Analog zu Beispiel 3.4 betrachte

$$\mathcal{U}(\omega, t) := \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega),$$

also wird die PDE zu

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t(\omega, t) &= -a\omega^2 \mathcal{U}(\omega, t), \\ \mathcal{U}(\omega, 0) &= \hat{f}(\omega), \end{aligned}$$

d.h. wiederum eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\mathcal{U}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)e^{-a\omega^2 t}$$

und mittels Rücktransformation

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-a\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega. \quad \square$$

□

3.5 Die Laplace–Transformation

Wir haben gesehen, dass die Fourier–Transformation besonders für Probleme auf dem \mathbb{R}^n und periodische Randbedingungen geeignet ist, z.B.

$$-u''(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1).$$

Die Fourier–Transformation für periodische Funktionen wird in den Übungen behandelt. Die Laplace–Transformation ist eher für Anfangswertprobleme geeignet.

Definition 3.5.1 Für eine Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) heißt

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

die Laplace–Transformation von f (im Falle der Existenz des uneigentlichen Integrals). Man nimmt stets $f \in R[0, c] \forall c > 0$ an, wobei $R[a, b]$ die Menge der auf $[a, b]$ Riemann–integrierbaren Funktionen bezeichnet.

Bemerkung 3.5.2:

- (a) Man kann die Laplace–Transformation auch als Spektralfunktion in der komplexen Schreibweise schreiben.
- (b) Das Paar $f(t)$, $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ wird oft als *Laplace–Korrespondenz* bezeichnet und mit $f(t) \circ \bullet F(s)$ dargestellt.
- (c) Fourier- und Laplace–Transformationen sind sogar in der Deutschen Industrie–Norm unter DIN 5487 geregelt.

□

Beispiel 3.5.3:

- (i) Die Sprungfunktion (Heaviside–Funktion) ist definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Deren Laplace–Transformation lautet

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s},$$

für $\Re s > 0$ und $= \infty$ sonst.

- (ii) Komplexwertige Schwingung:

$$f(t) := e^{i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Für die Laplace–Transformation gilt

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{i\omega - s} e^{(i\omega - s)t} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s - i\omega} \quad \text{für } \Re s > 0. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die reellen Schwingungen als Spezialfälle:

- für $f(t) = \cos(\omega t) = \Re(e^{i\omega t}) = \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})$ erhält man

$$F(s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{für } \Re s > 0$$

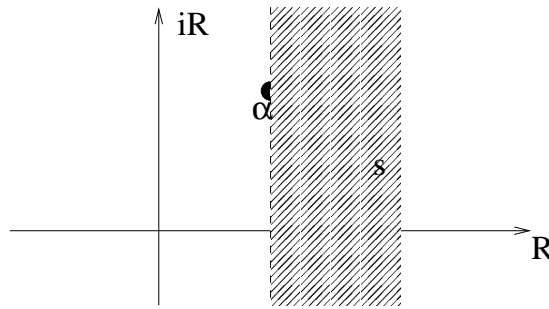


Abbildung 3.5: Existenzbereich der Laplace-Transformation

- und für $f(t) = \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega} - e^{-i\omega})$ folgt analog

$$F(s) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{für } \Re s > 0.$$

□

Es stellt sich natürlich die Frage wann die Laplace-Transformation existiert. Das wird natürlich auch den Rahmen bestimmen, in dem wir diese als Hilfsmittel zur Lösung von ODEs und PDEs einsetzen können.

Satz 3.5.4 *Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $\int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t} dt$ existiert. Dann existiert $\mathcal{L}[f](s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s > \Re \alpha$, vgl. Abb. 3.5.*

Beweis: Betrachte

$$\varphi(c) := \int_0^c f(t)e^{-\alpha t} dt \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t} dt < \infty$$

nach Voraussetzung. Nun sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s > \Re \alpha$, also $s - \alpha = \sigma + i\tau$ mit $\sigma > 0$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi_c(s) &:= \int_0^c f(t)e^{-st} dt = \int_0^c \underbrace{f(t)e^{-\alpha t}}_{=\varphi'(t)} e^{-\overbrace{(\sigma+i\tau)}{=s-\alpha}t} dt \\ &= \underbrace{\varphi(t)e^{-(\sigma+i\tau)t} \Big|_{t=0}^c}_{\xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0} + (s - \alpha) \underbrace{\int_0^c \varphi(t)e^{-(\sigma+i\tau)t} dt}_{\xrightarrow{c \rightarrow \infty} (s-\alpha) \int_0^\infty \varphi(t)e^{-(s-\alpha)t} dt} \\ &\quad \text{weil } \varphi(0) = 0 \text{ und } \varphi(c) \leq K(c \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

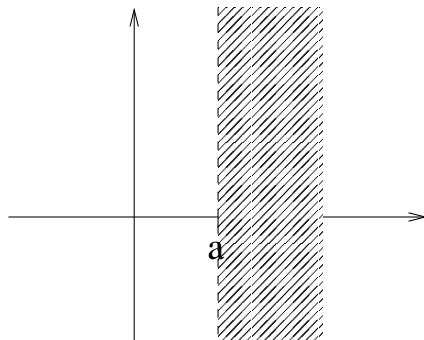


Abbildung 3.6: Konvergenzabszisse von $\mathcal{L}[f]$.

gleichmäßig für $\Re(s - \alpha) \geq \varepsilon > 0$ und $|s| \leq C_0$, denn wegen

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |(s - \alpha) \underbrace{\varphi(t)}_{\leq K} e^{-(s-\alpha)t}| dt &\leq K e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{t=0}^{\infty} \\ &\leq K e^{-\varepsilon} < \infty \end{aligned}$$

existiert $\mathcal{L}[f]$. \square

Daraus folgt auch, dass $F(s)$ für $\Re s > \Re \alpha$ holomorph ist.

Definition 3.5.5 Man nennt

$$\sigma_f := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \int_0^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} dt \text{ existiert} \right\}$$

die Konvergenzabszisse von $\mathcal{L}[f]$.

Bemerkung 3.5.6: Die Funktion $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ ist holomorph für $\Re s > \sigma_f$ und $\int_0^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} dt$ divergiert für $\Re s < \sigma_f$. \square

Um die Existenz zu sichern, nimmt man in der Regel ein gewisses Abklingverhalten von f an. Dies ist in den meisten Anwendungsfällen auch durchaus realistisch.

Definition 3.5.7 (a) Man sagt, dass $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ höchstens exponentiell wächst, falls $\exists C, k \geq 0$ mit $|f(t)| \leq C e^{kt} \forall t \geq 0$.

(b) Der Träger (engl. support) einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

(c) Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hat kompakten Träger, falls $\text{supp } f \subset \Omega$ kompakt ist.

Bemerkung 3.5.8:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt kompakten Träger $\iff \exists C > 0$ mit $f(x) = 0 \forall |x| \geq C$.

(b) Ist $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ auf beschränkten Intervallen stückweise stetig und von höchstens exponentiellem Wachstum, so existiert $\mathcal{L}[f](s)$ für alle $s > \sigma_f$ und umgekehrt ist f durch $\mathcal{L}[f](s)$ fast überall eindeutig bestimmt.

□

Satz 3.5.9 (Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace-Transformation)

Bei Existenz der auftretenden Laplace-Transformationen (mit $\sigma_f < \infty$) gilt

(i) $\lim_{\Re s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0,$

(ii) $\mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^n c_k f_k \right] = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{L}[f_k],$

(iii) $\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k}, \quad f \in C^n[0, \infty),$

(iv) $\left(\frac{d}{ds}\right)^2 \mathcal{L}[f](s) = (-1)^n \mathcal{L}[(\cdot)^n f](s),$

(v) $\mathcal{L}[f(\cdot - \alpha)](s) = e^{-\alpha s} \mathcal{L}[f](s), \quad \alpha > 0, \text{ falls } f(t) = 0 \text{ für } t < 0.$

Beweis: (nur (iii), der Rest als Übung)

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \underbrace{f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty}}_{=-f(0)} + s \underbrace{\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt}_{\mathcal{L}[f](s)}$$

Rest induktiv. □

Bemerkung 3.5.10: Für $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+^n = [0, \infty)^n$) ist die Laplace-Transformation definiert als

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t) e^{-s \cdot t} dt, \quad s \in \mathbb{C}^n$$

mit analogen Rechenregeln, z.B.

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} f \right] (s) = -f(s) \Big|_{s_k=0} + s_k \mathcal{L}[f](s).$$

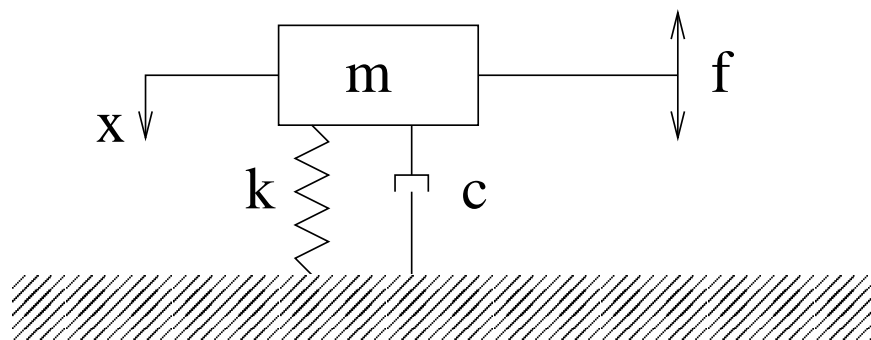


Abbildung 3.7: Lineare Schwingungsgleichung

□

Beispiel 3.5.11: [Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen]

Wir betrachten die *lineare Schwingungsgleichung*, vgl. Abb. 3.7. Diese beschreibt die zeitlich veränderliche Auslenkung $x(t)$ einer Masse m , die gegen die Erde gedämpft und gefedert ist. Mit der Federkonstanten k und der Dämpfung c lautet die Gleichung dann

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1,$$

wobei die Koeffizienten gegeben durch $a_1 = \frac{c}{m}$, $a_0 = \frac{k}{m}$.

Für die Laplace-Transformation $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ und $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ gilt damit

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x](s) \\ &= s^2 X(s) - \underbrace{s x(0)}_{=x_0} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=x_1} + a_1 s X(s) - a_1 \underbrace{x(0)}_{=x_0} + a_0 X(s) \\ &= (s^2 + a_1 s + a_0) X(s) - x_0 s - x_1 - a_1 x_0, \end{aligned}$$

also folgende algebraische Gleichung

$$X(s) = [F(s) + x_1 + (a_1 + s)x_0] \underbrace{\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}}_{=:G(s)}.$$

Die Funktion G heißt wiederum „Transferfunktion“ des „linearen Systems“. Damit haben wir eine explizite Formel für die Laplace-Transformierte der gesuchten Lösung $x(t)$.

Zur Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung brauchen wir jetzt noch eine Umkehrformel. □

Ohne Beweis geben wir folgenden Satz an. Den Beweis findet man in vielen Büchern über Höhere Analysis oder Ingenieurmathematik.

Satz 3.5.12 (Umkehrformel) Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar für $x \in [0, \infty)$ mit Konvergenzabszisse $\sigma_f < \infty$. Dann gilt für $\gamma > \sigma_f$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{L}[f](s)e^{xs} ds = \begin{cases} f(x) , & \text{für } x > 0 , \\ \frac{1}{2}f(0) , & \text{für } x = 0 , \\ 0 , & \text{für } x < 0 . \end{cases} \quad \square$$

Bemerkung 3.5.13:

- (a) Man berechnet die Umkehr–Transformation z.B. mit Hilfe des Residuensatzes, besonders bei rationalen Funktionen.
- (b) Sowohl für die Laplace–Transformation als auch für die Umkehr–Laplace–Transformation gibt es ausführliche Tabellen, z.B. in [8].

□

Beispiel 3.5 (Fortsetzung)

Für den Spezialfall einer freien, periodisch angeregten Schwingung, d.h. es liegt keine Dämpfung vor (und damit $c = 0$, also $a_1 = 0$) und $f(t) = \sin(\omega t)$ lautet die Gleichung und die Laplace–Transformation der rechten Seite

$$\ddot{x}(t) + a_0 x(t) = \sin(\omega t), \quad F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0.$$

Das führt dann wie oben auf folgende Gleichung

$$\begin{aligned} X(s) &= \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + s x_0 + x_1 \right) \frac{1}{s^2 + a_0} \\ &= \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + a_0)} + \underbrace{x_0 \frac{s}{s^2 + a_0}}_{x_0 \cos(\sqrt{a_0}t)} + \underbrace{x_1 \frac{1}{s^2 + a_0}}_{x_1 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \sin(\sqrt{a_0}t)} \\ &\quad \begin{cases} \omega \frac{1}{2\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) & \text{falls } \omega = \sqrt{a_0} \\ \omega \frac{\sqrt{a_0} (\sin \omega t - \omega \sin \sqrt{a_0} t)}{\omega \sqrt{a_0} (a_0 - \omega^2)} & \text{falls } \omega \neq \sqrt{a_0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $\omega = \sqrt{a_0}$ wächst also die Amplitude, da dann

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{x_1 + \frac{1}{2}}{\omega} \sin(\omega t) - t \cos(\omega t) ,$$

dies ist der „Resonanzfall“ (da hier keine Dämpfung vorliegt).

Beispiel 3.5.14: [Wärmeleitungsgleichung]

Wir betrachten das Rand–Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \Omega = (0, 1), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega = (0, 1), \\ u(0, t) = a(t) \quad u(1, t) = b(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Für die Laplace–Transformation bzgl. der Zeit t $U(x, s) := \mathcal{L}[u(x, \cdot)](s)$ gilt also

$$\mathcal{L}[u_t(x, \cdot)](s) = sU(x, s) - u(x, 0) = sU(x, s) - f(x)$$

und (3.20) wird zu einem Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\begin{cases} U_{xx} - sU = -f, & (x, s) \in \Omega \times \mathbb{C}, \\ U(0, s) = \mathcal{L}[a](s) =: A(s), & s \in \mathbb{C}, \\ U(1, s) = \mathcal{L}[b](s) =: B(s), & s \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Im Fall $f \equiv 0$ ist dies das bekannte Problem $U_{xx} = sU$, also

$$U(x, s) = A(s)U_1(x, s) + B(s)U_2(x, s)$$

mit

$$U_1(x, s) = \frac{\sinh \sqrt{s}(1-x)}{\sinh \sqrt{s}}, \quad U_2(x, s) = \frac{\sinh \sqrt{s}x}{\sinh \sqrt{s}}.$$

Nun benutzt man den *Faltungssatz*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] \quad (3.22)$$

mit der *Faltung* $(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$ (Beweis: *Übung*) und erhält

$$u(x, t) = (a * u_1(x, \cdot))(t) + (b * u_2(x, \cdot))(t),$$

mit

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}, \\ u_2(x, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\pi \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}, \end{aligned}$$

(mittels Partialbruchreihenentwicklung von U_i). Also ergibt sich z.B. für $a \equiv b \equiv 1$ folgende Lösung

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{2k+1} (1 - e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}). \quad (3.23)$$

Wegen $u(0, t=0) = a(t=0) = 1$ und $u(1, t=0) = b(t=0) = 1$ ergeben sich zwei Unstetigkeiten (beachte: $u(x, 0) = 0 \forall x \in \Omega$), d.h. (3.23) gilt nur für Ω , nicht auf $\partial\Omega$! \square

3.6 Das Superpositions–Prinzip

Oft kann man eine gegebene PDE (bzw. das dazugehörige Anfangs- bzw. Randwertproblem) in Teilprobleme „zerlegen“, die sich dann einfacher lösen lassen. Das Superpositions- (oder Überlagerungs-)Prinzip sagt dann, dass sich die Lösung eines linearen Problems dann durch Linearkombination der Lösungen der Teilprobleme ergibt. Bei Schwingungen kann man sich das so vorstellen, dass sich Teil–Schwingungen zu einer Gesamt–Schwingung überlagern.

Wir verdeutlichen dieses Prinzip hier wieder nur an einem Beispiel, weil das Prinzip damit hinlänglich deutlich wird. Als Beispiel betrachten wir das Anfangs–Randwertproblem für die Wärmeleitung in einem Stab $\Omega = (0, l)$, also

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x, t) \quad (\text{inhomogene Kraft}) \quad (3.24)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (\text{inhomogene Anfangswerte}) \quad (3.25)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t) \quad (\text{inhomogene Randwerte}) \quad (3.26)$$

Wir haben es hier also mit drei verschiedenen Inhomogenitäten zu tun, die wir nun separieren wollen, um einfachere Probleme zu erhalten.

Die Lösung von (3.24 - 3.26) kann man zusammensetzen (überlagern, superpositionieren) aus den Lösungen von 2 Teilwertproblemen

(A) Homogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen

$$(F \equiv 0, \quad g \equiv 0, \quad h \equiv 0)$$

(B) Inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen

$$(f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0)$$

Mittels Homogenisierung (vgl Kapitel 3.2) behandelt man dann die inhomogenen Randbedingungen. Wähle hierzu z.B.

$$w(x, t) = g(t) + \frac{x}{l}(h(t) - g(t)),$$

d.h. w erfüllt die Randbedingungen (3.26), und setze $u(x, t) := v(x, t) + w(x, t)$, wobei v die Lösung von

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - H(x, t) \text{ mit } H(x, t) := F(x, t) - (w_t(x, t) - a^2 w_{xx}(x, t)) \\ v(x, 0) = f(x) - w(x, 0) =: \tilde{f}(x) \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

ist. Nun sei $v^{(1)}$ eine Lösung von **(A)** mit $f = \tilde{f}$ und $v^{(2)}$ eine Lösung von **(B)** mit $F = H$, dann löst $v := v^{(1)} + v^{(2)}$ offenbar (3.27), denn:

$$\begin{aligned} v_t - a^2 v_{xx} &= \underbrace{v_t^{(1)} - a^2 v_{xx}^{(1)}}_{=0} + \underbrace{v_t^{(2)} - a^2 v_{xx}^{(2)}}_{=0} = H \\ v(x, 0) &= v^{(1)}(x, 0) + v^{(2)}(x, 0) = \tilde{f}(x) \\ v(0, t) = v(l, t) &= 0 \quad \Rightarrow \boxed{u = v^{(1)} + v^{(2)} + w.} \end{aligned}$$

Wie kommen nun zur Lösung der beiden Teilprobleme.

(A) Homogene Differentialgleichungen mit homogenen Randbedingungen

Wir betrachten also

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3.28)$$

Als Lösungsansatz verwenden wir Trennung der Variablen $u(x, t) = X(x)T(t)$ und erhalten $X\dot{T} = a^2 X''T$ und damit

$$\frac{\dot{T}}{T} \frac{1}{a^2} = \frac{X''}{X},$$

also die beiden Gleichungen

$$1) \quad X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

$$2) \quad \dot{T} + a^2 \lambda T = 0.$$

Diese beiden lösen wir nun separat. Gleichung 1) hat die Grundlösungen $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$, $k = 1, 2, \dots$ mit den Eigenwerten $\lambda_k = k^2 \frac{\pi^2}{l^2} > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Die Grundlösungen von 2) lauten

$$T_k(t) = e^{-\lambda_k a^2 t} = e^{-\mu_k^2 t} \text{ mit } \mu_k = \frac{ak\pi}{l}.$$

Also erhalten wir

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\mu_k^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Wiederum entwickelt man f in eine Fourier-Sinus-Reihe und erhält

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \\ &= f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \end{aligned}$$

also wiederum mit Koeffizienten-Vergleich

$$c_k = f_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right) d\xi.$$

(B) Inhomogene Differentialgleichungen mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen

Nun haben wir folgendes Problem zu lösen:

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3.29)$$

Wir wählen einen Ansatz mittels Sinus-Reihe, also

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Wir entwickeln F in die Fourier-Sinus-Reihe bzgl. x , also

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad \text{mit} \quad F_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi, t) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right) d\xi.$$

Dies setzt man in (3.29) ein und führt einen Koeffizientenvergleich durch:

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = - \underbrace{\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right)^2}_{=\mu_k} u_k(t) + F_k(t) \\ u_k(0) = 0, \quad \text{wegen } 0 = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad \text{für alle } x. \end{cases} \quad (3.30)$$

Gleichung (3.30) können wir direkt lösen

$$u_k(t) = \int_0^t \exp(-\mu_k^2(t - \tau)) F_k(\tau) d\tau.$$

Also zusammen: Die Funktion

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(t) + \frac{x}{l}(h(t) - g(t)) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \frac{2}{l} \int_0^l (f(\xi) - w(\xi, 0)) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right) d\xi \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \int_0^t \exp(-\mu_k^2(t - \tau)) \frac{2}{l} \int_0^l H(\xi, \tau) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (3.31)$$

ist die Lösung von (3.24 - 3.26).

Bemerkung 3.6.1:

- (a) Selbst wenn f nicht glatt ist, ist $u(\cdot, t)$ für alle $t > 0$ beliebig oft differenzierbar.
- (b) Die Anfangsdaten gehen über $\int_0^l f(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right) d\xi$ zu *jedem Zeitpunkt* $t > 0$ ein. Das heißt, die Lösung $u(x, t)$ hängt von *allen* Werten $u(\xi, 0)$, $\xi \in (0, l)$ ab. Also haben wir hier eine *unendliche Ausbreitungs-Geschwindigkeit*. In diesem Sinne ist (3.24) ein „unphysikalisches Modell“.

- (c) Analog löst man auch das Rand–Anfangswertproblem für die Wellengleichung (z.B. die schwingende Saite)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \varepsilon^2 u_{xx}, & u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), \\ x &\in (0, l) & u(0, t) &= u(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

- (d) Die physikalisch kohärente Modellierung von Wärmeleitprozessen ist immer noch Gegenstand der Forschung z.B. in der „realistischen erweiterten Thermodynamik“. Meist resultieren nicht–lineare hyperbolische PDEs.
- (e) Obige Bemerkungen gelten auch für die Black–Scholes–Gleichung, die sich mittels einer geschickten Variablen–Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung transformieren läßt.

□

3.7 Lösung mit Hilfe der Green–Funktionen

Auch dies ist eine Standard–Lösungsmethode, die auf dem Konzept der Distributionen und distributionellen Ableitungen beruht. Beides führen wir zunächst ein.

Definition 3.7.1 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

- (a) $C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } f \subset C \text{ kompakt}\}$
ist der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Dieser Raum wird oft als Raum der Testfunktionen bezeichnet: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)$
- (b) Eine Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{D}$ (in Zeichen $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$), falls
- (i) Es existiert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$, so dass $\text{supp } (\varphi_n), \text{supp } (\varphi) \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 - (ii) Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf K .
- (c) Eine Distribution in Ω ist eine stetige lineare Abbildung

$$T : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto T[\varphi].$$

Stetig heißt hier, dass aus $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ stets $T[\varphi_n] \rightarrow T[\varphi]$ folgt. Die Menge aller Distributionen ist ein Vektorraum und wird oft mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ (Dualraum, Menge aller linearen Funktionale) bezeichnet.

Beispiel 3.7.2:

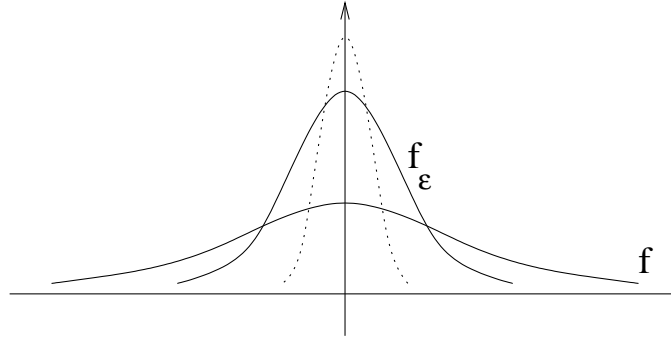


Abbildung 3.8: Approximation der Dirac- δ -Distribution.

- (a) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist $T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution.
- (b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\delta_a[\varphi] = \varphi(a)$ ist die sogenannte *Dirac- δ -Distribution*.

□

Der folgende Satz gibt ein Approximationsresultat für die Dirac- δ -Distribution.

Satz 3.7.3 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

vgl. Abb. 3.8. Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \text{d.h. } T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0.$$

(Dabei heißt $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}} T$ in \mathcal{D}' falls $T_n[\varphi] \rightarrow T[\varphi] \forall \varphi \in C_0^\infty$.)

Beweis: Setze $x = \varepsilon y$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(\varepsilon y) dy. \end{aligned}$$

Da $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass $M := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| < \infty$, also

$$|f(y)\varphi(\varepsilon y)| \leq M|f(y)| \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\varepsilon y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(0) dy.$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt dann

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\varepsilon y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(0) dy = \varphi(0),$$

und der Satz ist bewiesen. \square

Betrachte nun einen linearen Differentialoperator L

$$L[u] := au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu.$$

Zu L bestimmt man nun einen *adjungierten* Operator M definiert durch

$$vL[u] - uM[v] = \frac{\partial}{\partial x} A + \frac{\partial}{\partial y} B = \operatorname{div} (A, B)^T \quad (3.32)$$

mit Funktionen A und B . Man nennt L *selbstadjungiert*, falls $M = L$.

Beispiel 3.7.4:

(a) Wärmeleitungsgleichung: $u_t - a^2 u_{xx} = L[u]$. Hier gilt $M[v] := -v_t - a^2 v_{xx}$, denn

$$\begin{aligned} vL[u] - uM[v] &= vu_t - a^2 vu_{xx} + uv_t + a^2 uv_{xx} \\ &= (uv)_t - a^2 (u_x v - uv_x)_x, \end{aligned}$$

also $A = uv$, $B = u_x v - uv_x$.

(b) Poisson: $u_{xx} + u_{yy} = L[u] = M[u]$, denn

$$\begin{aligned} vL[u] - uL[v] &= vu_{xx} + vu_{yy} - uv_{xx} - uv_{yy} \\ &= (u_x v - uv_x)_x + (u_y v - uv_y)_y, \end{aligned}$$

also $A = u_x v - uv_x$, $B = u_y v - uv_y$.

\square

Wie kann man nun den adjungierten Operator zur Lösung einer PDE verwenden? Man integriert zunächst (3.32):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} vL[u] dx dy &= \iint_{\Omega} uM[v] dx dy + \iint_{\Omega} \operatorname{div} (A, B)^T dx dy \\ &= \iint_{\Omega} uM[v] dx dy + \int_{\partial\Omega} A dy - B dx. \end{aligned}$$

Sei nun das RWP

$$L[u] = g(x, y) + \text{RBen} \quad (3.33)$$

gegeben. Bestimme dann für jedes $(\xi, \eta) \in \Omega$ die Lösung $G(x, y; \xi, \eta)$ des „einfachen“ RWPs

$$M[v] = \delta(x - \xi, y - \eta) + \text{RBen an } v. \quad (3.34)$$

Die Funktion $G(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ heißt *Green-Funktion* des RWP (3.33). Setze $v = G$ in obige Gleichung ein

$$\iint_{\Omega} G(x, \xi; y, \eta) \underbrace{g(x, y)}_{=L[u]} dx dy = \underbrace{\iint_{\Omega} u(x, y) \underbrace{\delta(x - \xi, y - \eta)}_{M[v]} dx dy}_{=u(\xi, \eta)} + \text{bekannte Funktionen}$$

also eine Lösungsformel für u !

Die Arbeit liegt also hauptsächlich in der Berechnung der von Ω und L abhängigen Green-Funktion.

Beispiel 3.7.5: [Wärmeleitung im beidseitig unbegrenzten Stab] Betrachte

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= f(x, t), \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Betrachte nun zunächst den endlichen Bereich

$$\Omega_a := [0, T] \times [-a, a] \quad (x \sim t, y \sim x)$$

und erhalte

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_a} (vL[u] - uM[v]) dx dt &= - \int_{\partial\Omega_a} (uv) dx + a^2(u_x v - u v_x) dt \\ &= - \int_{-a}^a u(x, 0)v(x, 0) dx + \int_a^a u(x, T)v(x, T) dx \\ &\quad - a^2 \underbrace{\int_0^T [u_x(x, t)v(x, t) - u(x, t)v_x(x, t)]_{x=-a}^a dt}_{a \rightarrow \infty 0}. \end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass u und v für $x \rightarrow \pm\infty$ schnell abklingen, folgt

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} vL[u] \, dx \, dt = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} uM[v] \, dx \, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{u(x,0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{bekannt} \\ = u_0(x)}} v(x,0) - \underbrace{u(x,T)}_{\substack{\uparrow \\ \text{unbekannt} \\ \Rightarrow \text{verwende} \\ \text{RB } v(x,T)=0}} v(x,T) \right) dx,$$

also erhalten wir

$$M[v] = \delta(x - \xi, t - \tau), \quad v(x, T) = 0. \tag{3.35}$$

Die Lösung von (3.35) kann man z.B. mittels Fourier-Transformation bzgl. x bestimmen.

Mit der Heaviside-Funktion $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

lautet diese

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{h(\tau - t)}{\sqrt{4\pi a^2(\tau - t)}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(\tau - t)} \right]$$

(Übung). Damit folgt die Lösungsformel:

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} Gf \, dx \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} G(x, 0; \xi, t)u_0(x) \, dx \\ &= \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, t)}{\sqrt{4\pi a^2(\tau - t)}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(\tau - t)} \right] dx \, dt \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2\tau} \right] dx. \end{aligned}$$

□

3.8 MAPLE

MAPLE bietet eine Reihe von Möglichkeiten zur (analytischen) Lösung von PDEs. Einige dieser Möglichkeiten werden im Folgenden aufgezeigt. Diese sind auch auf der Webpage der Vorlesung als MAPLE-Worksheet Kapitel 3.mws zu finden.

```
> restart:
> with(PDEtools):
```

Laplace-Gleichung in 2D in kartesischen Koordinaten

```
> LAPLACE := diff(u(x,y),x,x) + diff(u(x,y),y,y) = 0;
> ans := pdsolve(LAPLACE); # hier sind _F1 und _F2 beliebig!
> pdetest(ans,LAPLACE);
```

$$LAPLACE := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)\right) = 0$$

$$ans := u(x, y) = _F1(y + x I) + _F2(y - x I)$$

```
> _F1 := z -> c1/Pi*argument((-I)*z);
> _F2 := z -> c2-c2/Pi*argument(conjugate(I*z));
```

$$_F1 := z \rightarrow \frac{c1 \operatorname{argument}(-I z)}{\pi}$$

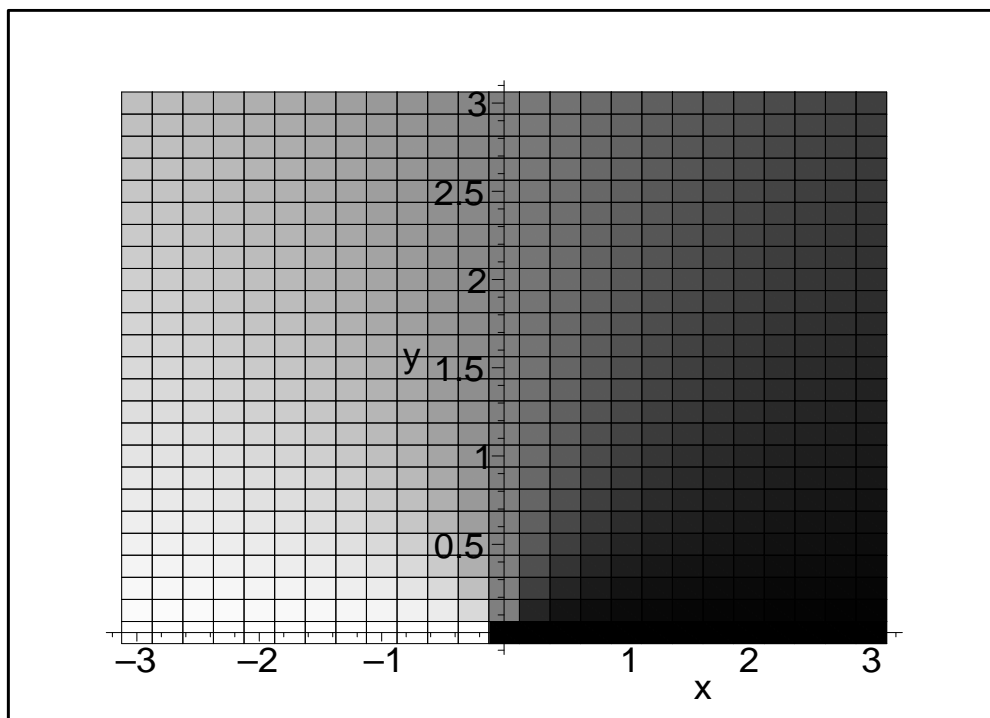
$$_F2 := z \rightarrow c2 - \frac{c2 \operatorname{argument}(\overline{(z I)})}{\pi}$$

```
> c1:=-1:
> c2:=1:
> evalc(ans);
```

$$u(x, y) = -\frac{2 \arctan(-y, x)}{\pi} + 1$$

```
> with(plots): densityplot(-2/Pi*arctan(-y,x)+1,x=-3..3,y=0..3);
```

Beachte: Das ist genau die Lösung aus Beispiel 2.3 (dem Potentialsprung).



Das Ganze in Polarkoordinaten

```
> LAPLACE_POLAR := Diff(r^2*diff(F(r,t,p),r),r)
> + 1/sin(t)*Diff(sin(t)*diff(F(r,t,p),t),t)
> + 1/sin(t)^2*diff(diff(F(r,t,p),p),p) = 0;
> ans := pdsolve(LAPLACE_POLAR);
```

$LAPLACE_POLAR :=$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} F(r, t, p)\right)\right)\right) + \frac{\frac{\partial}{\partial t} (\sin(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} F(r, t, p)\right))}{\sin(t)} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial p^2} F(r, t, p)}{\sin(t)^2} = 0$$

$$ans := (F(r, t, p) = _F3(r) _F4(t) _F5(p)) \&where \left[\left\{ \frac{d^2}{dp^2} _F5(p) = -_F5(p) _c2, \right. \right.$$

$$\left. \frac{d^2}{dr^2} _F3(r) = \frac{_F3(r) _c1}{r^2} - \frac{2 \left(\frac{d}{dr} _F3(r)\right)}{r}, \right.$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} _F4(t) = -_F4(t) _c2 + \frac{_F4(t) _c2}{\sin(t)^2} - \frac{\cos(t) \left(\frac{d}{dt} _F4(t)\right)}{\sin(t)} \right]$$

```
> #build(ans); # jetzt erhält man eine explizite (aber längliche
> Lösungsformel)
```

Also ist das Ganze auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert worden, die man analog lösen kann (siehe auch das Beispiel der Black-Scholes-Gleichung unten)

Nun die homogene lineare PDE erster Ordnung

```
> LINEAR_Ordnung1 := diff(u(x,t),t) + a*diff(u(x,t),x) = 0;
> pdsolve(LINEAR_Ordnung1); # also genau die Charakteristik
```

$$LINEAR_Ordnung1 := \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\right) + a \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\right) = 0$$

$$u(x, t) = _F3\left(\frac{t a - x}{a}\right)$$

```
> LINEAR_Ordnung1_variabel := diff(u(x,t),t) + x*diff(u(x,t),x) = 0;
> pdsolve(LINEAR_Ordnung1_variabel); # also wiederum genau die
> Charakteristik
```

$$LINEAR_Ordnung1_variabel := \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\right) + x \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\right) = 0$$

$$u(x, t) = _F3(t - \ln(x))$$

Die Burgers-Gleichung ist nicht-linear von erster Ordnung:

```
> BURGERS := diff(u(x,t),t) + u(x,t)*diff(u(x,t),x) = 0;
> pdsolve(BURGERS);
```

$$BURGERS := \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\right) + u(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\right) = 0$$

$$u(x, t) = \text{RootOf}(_F3(_Z) _Z - t _Z + x)$$

Nun die Black-Scholes-Gleichung

```
> BLACK_SCHOLES := diff(V(S,t),t) + sigma^2/2*S^2*diff(V(S,t),S,S) +
> (r-delta)*S*diff(V(S,t),S) -r*V(S,t) = 0;
> ans := pdsolve(BLACK_SCHOLES);
```

BLACK_SCHOLES :=

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} V(S, t)\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} V(S, t)\right) + (r - \delta) S \left(\frac{\partial}{\partial S} V(S, t)\right) - r V(S, t) = 0$$

$$ans := (V(S, t) = _F3(S) _F4(t)) \&where \left[\left\{ \frac{d}{dt} _F4(t) = -\frac{1}{2} _F4(t) _c1 + r _F4(t), \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{d^2}{dS^2} _F3(S) = \frac{_F3(S) _c1}{S^2 \sigma^2} - \frac{2 \left(\frac{d}{dS} _F3(S)\right) (r - \delta)}{\sigma^2 S} \right\} \right]$$

Jetzt bleiben also noch 2 gewöhnliche Dgln übrig, die man mit dsolve lösen kann:

```
> P1 := diff(F1(S),S,S) - a/S*diff(F1(S),S) - b/S^2*F(S) = 0;
> ans1 := dsolve(P1);
```

$$P1 := \left(\frac{d^2}{dS^2} F1(S)\right) - \frac{a \left(\frac{d}{dS} F1(S)\right)}{S} - \frac{b F(S)}{S^2} = 0$$

$$ans1 := F1(S) = \int (b \int S^{(-2-a)} F(S) dS + _C1) S^a dS + _C2$$

```
> P2 := diff(F2(t),t) + c*F2(t) = 0;
> ans2 := dsolve(P2);
```

$$P2 := \left(\frac{d}{dt} F2(t)\right) + c F2(t) = 0$$

$$ans2 := F2(t) = _C1 e^{(-ct)}$$

Die Wellengleichung. Die Formel von d'Alembert kann man bei etwas gutem Willen daraus erkennen, wenn man $_F3 := (f+G)/2$ und $_F4 := (f-G)/2$ definiert, wobei G die Stammfunktion von g bezeichnet. Wiederum erkennt man die Charakteristiken (später...).

```
> WAVEEQ := diff(u(t,x),t,t) - diff(u(t,x),x,x) = 0;
> pdsolve(WAVEEQ);
```

$$WAVEEQ := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)\right) = 0$$

$$u(t, x) = _F3(x + t) + _F4(x - t)$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird mittels Trennung der Variablen behandelt.

```
> HEATEQ := diff(u(t,x),t) - diff(u(t,x),x,x) = 0;
> pdsolve(HEATEQ);
```

$$HEATEQ := \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)\right) = 0$$

$$(u(t, x) = _F3(t) _F4(x)) \&where [\left\{ \frac{d^2}{dx^2} _F4(x) = _c1 _F4(x), \frac{d}{dt} _F3(t) = _c1 _F3(t) \right\}]$$

Kapitel 4

PDEs erster Ordnung und Charakterisikentheorie

Wir haben bislang verschiedene PDEs gesehen. Einige Male haben wir Anfangsbedingungen gestellt, manchmal Randbedingungen, ab und zu beides. Bislang ist keine Systematik zu erkennen gewesen, wann man welche Art von Nebenbedingungen stellt. Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu stellt die Charakterisikentheorie dar. Diese wird übrigens auch als Grundlage für einige numerische Lösungsverfahren verwendet, vgl. z.B. [7]. Zunächst brauchen wir hierzu aber einige Ergebnisse über PDEs erster Ordnung, die wir bislang ja eher vernachlässigt hatten.

4.1 Cauchy–Probleme

Unter einem Cauchy–Problem versteht man ein AWP auf ganz \mathbb{R} . Wir betrachten zunächst folgende homogene PDE 1. Ordnung

$$u_t(x, t) + a(x, t) u_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

mit einer gegebenen (glatten) Funktion ϕ . Der sogenannte *variable Koeffizient* $a = a(x, t)$ sei ebenfalls glatt.

Wir suchen nun sogenannte *Charakteristiken*, d.h. Kurven in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ entlang derer die Lösung z.B. (wenn möglich) konstant ist, vgl. Abb. 4.1.

Ansatz: Gegeben $x_0 \in \mathbb{R}$, betrachte folgende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = a(x(t), t), \quad t > 0, \quad (4.3)$$

$$x(0) = x_0. \quad (4.4)$$

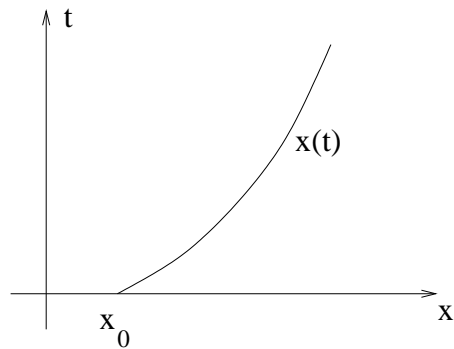


Abbildung 4.1: Charakteristik aus x_0 .

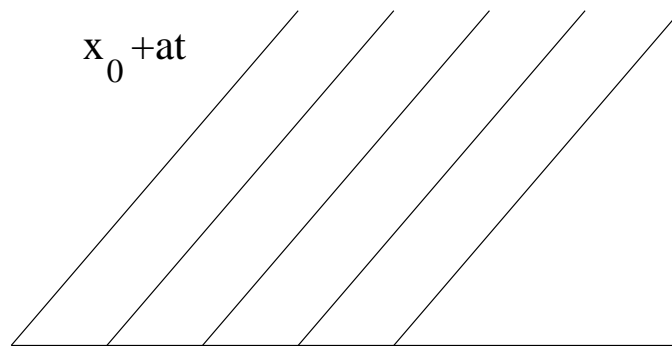


Abbildung 4.2: Charakteristiken der konstanten Transportgleichung.

Betrachte nun u entlang der Kurve $x(t)$ wie in Abb. 4.1 dargestellt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= u_x \frac{d}{dt}x(t) + u_t \\ &\stackrel{(4.3)}{=} u_x a(x(t), t) + u_t \stackrel{(4.1)}{=} 0, \end{aligned}$$

also ist u entlang $x(t)$ konstant und nimmt folgenden Wert an

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = \phi(x_0) \quad \forall t \geq 0.$$

Man kann also (4.1 - 4.2) durch die gewöhnliche Differentialgleichung (4.3 - 4.4) lösen.

Beispiel 4.1.1:

(a) Betrachte die *konstante Transportgleichung*

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 > t, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit konstanten Koeffizienten $a \equiv \text{const.}$

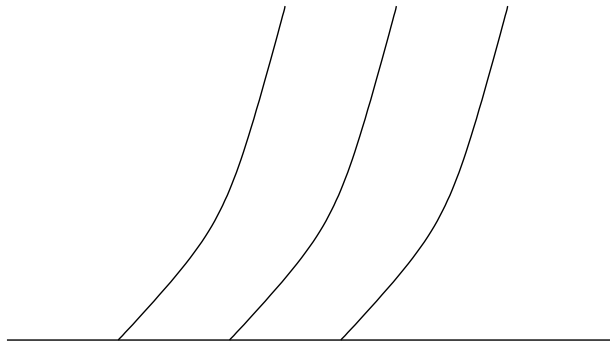


Abbildung 4.3: Charakteristiken der linearen Transportgleichung.

Die Charakteristiken sind, wie in Abb. 4.2 dargestellt, Geraden, denn die Lösung von $\dot{x}(t) = a$, $x(0) = x_0$ führt auf $x(t) = x_0 + at$ für $t \geq 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x, t) &= u(x(t), t) = \phi(x_0) \\ &= \phi(x(t) - at) \\ &= \phi(x - at), \end{aligned}$$

also

$$u_t = (-a)\phi'(x - at), \quad u_x = \phi'(x - at),$$

und somit $u_t + au_x = 0$.

(b) Die *lineare Transport-Gleichung* lautet

$$u_t + xu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dies führt auf die Gleichung $\dot{x}(t) = x(t)$, $x(0) = x_0$, deren Lösung offenbar $x(t) = x_0 e^t$ lautet. Damit gilt also $x_0 = x e^{-t}$ dann und nur dann, wenn $\ln(x) - t \equiv \text{const}$ gilt. Daraus folgt $u(x(t), t) = \phi(x_0) = \phi(x e^{-t})$, vgl. Abb. 4.3.

□

Interpretation: Die Anfangsdaten werden entlang der Charakteristiken transportiert. Dies führt auf Transport-Vorgänge (Konvektion). Dies wiederum gibt uns nun auch Aufschluss über die geeignete Wahl der Anfangsdaten!

Für das inhomogene Problem

$$u_t + a(x, t)u_x = b(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

löst man wiederum

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t), \quad x(0) = x_0$$

und erhält analog $\frac{d}{dt}u(x(t), t) = b(x(t), t)$. Dies entspricht der Geschwindigkeit, die hier wie eine äußere Kraft wirkt. Damit folgt

$$u(x(t), t) = \phi(x_0) + \int_0^t b(x(\tau), \tau) d\tau.$$

Die Bestimmung der Lösung eines AWP oder RAWP mittels Charakteristiken heißt auch *Charakteristiken-Methode*.

Beispiel 4.1.2: Betrachte folgende Gleichung

$$u_t + u_x = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dies führt wie oben auf $x(t) = x_0 + t$ ($x_0 = x - t$) und damit

$$\begin{aligned} u(x(t), t) &= \phi(x_0) + \int_0^t x(\tau) d\tau \\ &= \phi(x_0) + \int_0^t b(x_0 + \tau) d\tau \\ &= \phi(x_0) + x_0 t + \frac{1}{2} t^2 \\ &= \phi(x - t) + (x - t)t. \end{aligned}$$

□

4.2 Autonome Systeme

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (4.5)$$

heißt *autonom*, wenn v nicht explizit von t abhängt. Sei v ein C^1 -Vektorfeld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Zu jedem $a \in \Omega$ gibt es dann eine maximale Lösung, die zur Zeit $t = t_0$ durch a geht: $x(t) = \Phi(t, a)$. Die Spur dieser Bahn heißt auch *Trajektorie* oder *Phasenbahn*. Die Menge aller Trajektorien heißt auch *Phasenportrait*.

Die Durchlaufrichtung ist durch den Tangentenvektor $\dot{x} = v(x)$ bestimmt.

In 2D kann man die Trajektorien explizit angeben

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (4.6)$$

Sei $x = x(t)$ auf einem Intervall monoton (und damit umkehrbar). Dann gilt $t = t(x)$ und damit $t = x^{-1}$, also insbesondere $t' = \frac{1}{\dot{x}}$. Mit $y = y(t(x)) =: y(x)$ folgt dann

$$y'(x) = \frac{d}{dt}y \quad t'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad f(x, y) \neq 0.$$

Die Differentialgleichung

$$g(x, y) - f(x, y)y' = 0 \tag{4.7}$$

heißt *Phasen-Differentialgleichung* von (4.6).

Beispiel 4.2.1: Die nichtlineare Schwingung: $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$. Transformation in ein System erster Ordnung ergibt $u = x$, $v = \dot{x}$. Damit erhalten wir das System

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= f(u, v), \end{aligned}$$

also lautet die Phasen-Differentialgleichung

$$v'(x) = \frac{f(u, v)}{v}, \quad v \neq 0.$$

□

Wir wollen nun Charakteristiken von (4.5) bestimmen.

Definition 4.2.2 Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Charakteristik von (4.5), wenn u längs jeder Lösungskurve konstant ist, d.h.

$$u(a) = u(\phi(t, a)) \quad \forall a \in \Omega$$

und alle t aus dem maximalen Definitionsintervall.

Wir bestimmen die Charakteristiken nun zunächst für den Spezialfall der sogenannten *Rumpf-Differentialgleichung*

$$a_1(x)u_{x_1} + a_2(x)u_{x_2} + \dots + a_n(x)u_{x_n} = 0, \tag{4.8}$$

in anderer Form $a(x) \cdot \nabla u(x)$, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$. Die Kettenregel liefert

$$\frac{d}{dt}u(x(t)) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x(t))\dot{x}_i(t) = \dot{x} \cdot \nabla u(x),$$

also bestimme Kurven $x(t)$ in Ω mit

$$\dot{x} = a(x), \tag{4.9}$$

denn dann gilt

$$\frac{d}{dt}u(x(t)) = \dot{x}(t) \cdot \nabla u(x(t)) = a(x(t))\nabla u(x(t)) = 0.$$

Man nennt (4.9) *charakteristisches Differentialgleichungs-System* und dessen Lösung sind die Charakteristiken.

Beispiele (Fortsetzung der obigen Beispiele)

- (a) Für die konstante Transportgleichung $u_t + au_x = 0$ folgt $(x_1 = t, x_2 = x, a(x) = (1, a)^T, x = (t, x))$ und damit

$$\dot{x} = a(x), \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

also $\dot{t} = 1$ und $\dot{x} = a$ (s.o.)

- (b) Bei der linearen Transport-Gleichung $u_t + a(x)u_x = 0$ erhalten wir $\dot{t} = 1, \dot{x}(t) = a(x(t))$ (oben $a(x) = x$).

Beispiel 4.2.3: Für quasi-lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in 2D der Form

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u) = 0 \tag{4.10}$$

geht man so vor. Die gesuchte Niveaufläche sei implizit

$$f(x, y, u) \equiv \text{const.}$$

angesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}f(x, y, u(x, y)) = f_x + f_u u_x \\ 0 &= \frac{d}{dy}f(x, y, u(x, y)) = f_y + f_u u_y, \end{aligned}$$

also

$$u_x = -\frac{f_x}{f_u}, \quad u_y = -\frac{f_y}{f_u}.$$

Einsetzen in (4.10) ergibt

$$a(x, y, u)f_x + b(x, y, u)f_y - c(x, y, u)f_u = 0, \tag{4.11}$$

oder in anderer Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \end{pmatrix}}_{=A(x,y,u)} \cdot \nabla f = 0 \quad f = f(x, y, u).$$

Wie oben erhält man das charakteristische Differentialgleichungs-System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = A(x, y, u) = \begin{pmatrix} a(x, y, u) \\ b(x, y, u) \\ -c(x, y, u) \end{pmatrix}$$

und die Lösungen (hier also Kurven im \mathbb{R}^3) sind die Charakteristiken. □

Die Projektion in die (x, y) -Ebene nennt man *Grundcharakteristiken* (oft auch nur Charakteristiken).

Bislang haben wir ausschließlich lineare Gleichungen untersucht. Wir kommen nun zur einfachsten, aber für viele Anwendungen wichtigen, nichtlinearen Gleichung.

Beispiel 4.2.4: [Die quasi-lineare Transportgleichung (Burgers-Gleichung)]

Diese Gleichung lautet

$$u_t + u u_x = 0,$$

sie ist also quadratisch in u . Zunächst ein paar Bemerkungen zur Herleitung dieser Gleichung. Es sei $u(x, t)$ die Geschwindigkeit eines Teilchen in (x, t) , wobei wiederum x die Ortskoordinate und t die Zeit bezeichnet. Wenn keine Beschleunigung vorliegt, erhalten wir

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_x \dot{x} + u_t = u_x u + u_t = 0,$$

also

$$x = x, \quad y = t, \quad a(x, t, u) = u, \quad b(x, t, u) = 1, \quad c(x, t, u) = 0$$

und damit $\dot{x} = u$, $\dot{t} = 1$ und $\dot{u} = 0$, also

$$\frac{d}{dt}x(t) = u(x(t), t), \quad \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0$$

mit Lösungen

$$\begin{aligned} u &\equiv \text{const.} \\ x(t) &= tu(x(t)) + \text{const.} \end{aligned}$$

also $x - ut \equiv \text{const.}$, $u \equiv \text{const.}$. Die allgemeine implizite Lösung hat also die Form

$$F(u, x - ut) \equiv \text{const.}$$

mit einer beliebigen C^1 -Funktion F , z.B.

$$u(x, t) = \varphi(x - u(x, t)t)$$

(wenn man F so wählt, dass nach der ersten Variablen aufgelöst werden kann).

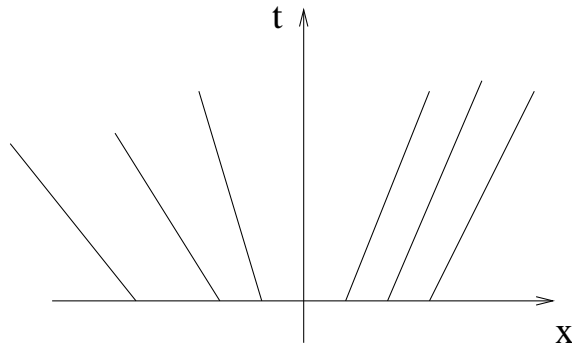


Abbildung 4.4: Verdünnungswelle.

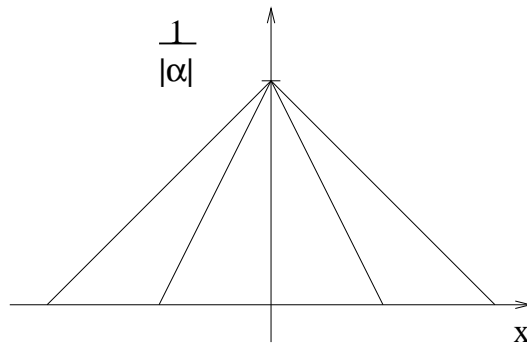


Abbildung 4.5: Schock.

Der Spezialfall $\varphi(x) = \alpha x$.

Hier gilt also $u(x, t) = \alpha x - \alpha t u(x, t)$ und damit $u(x, t) = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \equiv c$. Falls $\alpha > 0$ gilt, erhalten wir

$$c(1 + \alpha t) = \alpha x \quad \text{also} \quad \boxed{x = ct + \frac{c}{\alpha}}$$

Der Gasstrom wird „verdünnt“ \rightarrow „Verdünnungswelle“ vgl. Abb. 4.4

Hingegen gilt im Falle $\alpha < 0$ für $t = \frac{1}{|\alpha|}$ also $1 + \alpha t = 0$. Das bedeutet, dass Teilchen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit zum gleichen Zeitpunkt $\frac{1}{|\alpha|}$ aufeinander treffen. Es entsteht ein „Schock“ (Implosion), vgl. Abb. 4.5 □

Bemerkung 4.2.5: Aus obigem folgt, dass eine PDE erster Ordnung in (x, t) genau dann eindeutig lösbar ist, wenn es genau eine Charakteristik durch (x, t) gibt, auf der ein Wert vorgegeben ist (Anfangsbedingung). □

Bemerkung 4.2.6: Für quasi-lineare Systeme erster Ordnung der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_n} u_i = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^N a_{ij}^k(f) \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + b_i(f), \quad i = 1, \dots, N,$$

mit $f := (x_1, \dots, x_{n-1}, u_1, \dots, u_N)$ und analytischen a_{ij}^k, b_i gilt der Satz von Cauchy–Kovalevskaja. Dieser sichert die lokale Existenz einer eindeutigen Lösung für analytische Anfangsbedingungen auf nicht charakteristischen Kurven.

Diese äußerst starken Voraussetzungen der analytischen Daten können *nicht* abgeschwächt werden, es gibt auch keine Unterscheidung für schlecht gestellte Probleme. Deshalb besitzt der Satz kaum praktische Relevanz und wir verzichten hier auf den Beweis. Auf der anderen Seite

- liefert der Satz historisch gesehen das erste allgemeine Existenz–Resultat,
- ist er eines der wenigen Resultate, das ohne Funktionalanalysis bewiesen werden kann, [5, pp. 46–61].

□

4.3 Gleichungen zweiter Ordnung

Betrachte lineare und quasi-lineare PDEs zweiter Ordnung in 2D der Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F, \quad (4.12)$$

mit Funktionen A, B, C, F , die zunächst nur von x und y abhängen.

Es stellt sich die Frage, ob sich (4.12) eindeutig lösen lässt, wenn man Werte auf einer Kurve im \mathbb{R}^2 vergibt? Als Beispiele denken wir Anfangsbedingungen, Randbedingungen, oder Anfangs–Randbedingungen. Wann muss man welche Bedingungen auf welcher Kurve stellen?

Betrachte eine solche Kurve:

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \xi(x, y) = (0, 0)\}$$

mit einer Funktion $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Als Beispiel denke man z.B. an

$$\begin{aligned} \xi_1(x, y) &= x - ay, \quad a \in \mathbb{R} \\ \xi_2(x, y) &= x. \end{aligned}$$

Um nun Werte auf Γ vergeben zu können, betrachten wir Γ als Achse eines krummlinigen Koordinatensystems. Dies führt also auf eine Kurvenschar: $\Gamma_\xi := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \xi(x, y) = \xi\}$ und eine weitere Schar „transversaler“ Kurven

$$\Lambda_\eta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \eta(x, y) = \eta\}.$$

Also bilden die Paare (ξ, η) ein lokales Koordinatensystem, falls die Normalen $(\xi_x, \xi_y)^T$ und $(\eta_x, \eta_y)^T$ nicht parallel sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$ regulär ist, also genau dann, wenn

$$\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0. \quad (4.13)$$

Dies sei im Folgenden stets vorausgesetzt. Beachte: dies ist eine Bedingung an Γ , d.h. man muss eine Funktion ξ finden, so dass (4.13) erfüllt ist.

Um „zulässige“ Kurven Γ zu bestimmen, drücken wir nun (4.12) in den neuen Koordinaten (ξ, η) aus.

Reduktion auf Normalform

Führe eine allgemeine Koordinatentransformationen ein

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad U(\xi, \eta) := u(x, y).$$

Dann besagt die Kettenregel:

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x, \quad u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y$$

und weiter

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} &= U_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \eta_x^2 \\ u_{yy} &= U_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \eta_y^2 \\ u_{xy} &= U_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + U_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} + \text{Terme niedriger} \\ \text{Ordnung in } \xi \text{ und } \eta. \end{array}$$

Damit ergibt sich nun

$$aU_{\xi\xi} + 2bU_{\xi\eta} + cU_{\eta\eta} = f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \quad (4.14)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2, \\ b &= A\xi_x\xi_y + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y = A\left(\xi_x + \frac{B}{A}\xi_y\right)\left(\eta_x + \frac{B}{A}\eta_y\right) \quad (A \neq 0), \\ c &= A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2. \end{aligned}$$

Sind nun $U(0, \eta)$, $U_\xi(0, \eta)$ bekannt, schreibt man — falls U hinreichend glatt ist —

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^l U(0, \eta) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^l U_\xi(0, \eta)$$

vor (diese ergeben sich aus $U(0, \eta)$, $U_\xi(0, \eta)$). Dann folgt aus (4.14)

$$aU_{\xi\xi}(0, \eta) = \underbrace{f(0, \eta, U(0, \eta), U_\xi(0, \eta), U_\eta(0, \eta)) - 2bU_{\xi\eta}(0, \eta) - cU_{\eta\eta}(0, \eta)}_{\text{bekannt (auf } \Gamma_0)}$$

also können wir $U_{\xi\xi}(0, \eta)$ berechnen, falls $a \neq 0$. In der Tat, man kann nun also „Randwerte“ $U(0, \eta), U_\xi(0, \eta)$ vergeben, d.h. auf $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \xi(x, y) = 0\}$.

„Normalform“ heißt auch, dass man (4.14) in „unabhängige“ Gleichungen bezüglich ξ und η aufteilen kann, also (vgl. Formeln für a und c)

$$Az_x^2 + 2Bz_xz_y + Cz_y^2 = 0, \quad (4.15)$$

dann bliebe nur der „gemischte Teil“ b .

Formal kann man (4.15) schreiben als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}}_{=\nabla \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

also wie eine Rumpf-Differentialgleichung. Mann nennt (4.15) daher *charakteristische Differentialgleichungen* zu (4.12) und die Lösungen *Charakteristiken*.

Offenbar hängt die Lösbarkeit (z.B. für $A \neq 0$) von der *Diskriminante*

$$d := AC - B^2 \quad (4.16)$$

von (4.12) ab, denn

$$\begin{aligned} z_{x(1,2)} &= -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{A^2}z_y^2 - \frac{C}{A}z_y^2} \\ &= \frac{1}{A}z_y \underbrace{\sqrt{B^2 - AC}}_{=-d} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Diskriminante kann man nun also verschiedene Typen von PDEs zweiter Ordnung unterscheiden.

Definition 4.3.1 Die PDE (4.12) heißt

- (a) parabolisch, falls $d = 0$,
- (b) hyperbolisch, falls $d < 0$,
- (c) elliptisch, falls $d > 0$.

Bemerkung 4.3.2: Wir vergleichen dies nun mit Definition 1.4.1. Die Form von (4.12) lautet in diesem Fall

$$\underbrace{Au_{xx} + \overbrace{2Bu_{xy}}^{=Buxy+Buyx} + Cu_{yy}}_{\text{Terme 2. Ordnung}} - F = 0,$$

also

$$\mathcal{K}(x) = F_{\varphi_{ij}}(x, u(x), u_{x_i}(x), u_{x_i x_j}(x)) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

O.B.d.A. sei $A > 0$, ansonsten multipliziert man mit (-1) . Dann gilt

- $\mathcal{K}(x)$ ist positiv definit $\iff AC - B^2 > 0 \iff$ elliptisch.
- $\mathcal{K}(x)$ hat einem positiven und einen negativen Eigenwert $\iff AC - B^2 < 0 \iff$ hyperbolisch.
- $\mathcal{K}(x)$ positiv semidefinit, aber nicht positiv definit $\iff AC - B^2 = 0 \iff$ parabolisch.

Also stimmen beide Definitionen tatsächlich überein. □

Bemerkung 4.3.3:

- Für die Charakteristiken gilt $a = 0$, also kann man nur „Randwerte“ auf Kurven vorgeben, die *keine* Charakteristiken sind!
- Bei parabolischen PDEs gibt es genau eine Charakteristik, man hat also ein RAWP, wobei die Randwerte *nicht* entlang der Charakteristik vorgegeben werden dürfen!
- Bei hyperbolischen PDEs hat man zwei verschiedene Charakteristiken. Also tritt ein Problem auf, falls die Charakteristiken sich schneiden oder auseinander laufen. Dann tritt ein Schock oder eine Verdünnungswelle auf.
- Bei elliptische PDEs gibt es keine Charakteristik, d.h. man hat eine reines Randwertproblem.
- Eine Gleichung $u_t + Lu = f$ mit elliptischem L ist parabolisch.

□

Kapitel 5

Maximum–Prinzipien

In Satz 2.2.12 haben wir ein Maximum–Prinzip für harmonische Funktionen bewiesen. Maximum–Prinzipien sind ein wesentliches Hilfsmittel, um die Eindeutigkeit einer Lösung eines Randwertproblems zu zeigen. Daher wollen wir diese Prinzipien auf allgemeine Gebiete und Differentialoperatoren erweitern.

5.1 Das schwache Maximumprinzip für elliptische Probleme

Wir betrachten Operatoren zweiter Ordnung der Form

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u + c(x)u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

wobei $a_{i,j}, b_i, c \in C^0(\bar{\Omega})$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Satz 5.1.1 *Angenommen $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1}^n$ ist s.p.d. $\forall x \in \bar{\Omega}$ (d.h. L ist elliptisch) und $Lu \geq 0$ (bzw. $Lu \leq 0$) in dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Falls $c(x) = 0$ in Ω , dann wird das Maximum (bzw. das Minimum) von u auf $\partial\Omega$ angenommen.*

Beweis: Falls $Lu > 0$ in Ω , dann kann u sein Maximum nicht auf Ω annehmen: angenommen, dies sei in x_0 , dann gilt $\nabla u(x_0) = 0$ sowie

$$Lu = \text{tr}(A(x)H(u; x)) + \underbrace{b(x) \nabla u(x)}_{=0} + \underbrace{c(x)u}_{=0} = A(x)H(u; x)$$

mit der Hesse–Matrix

$$H(u; x) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) \right)_{i,j=1}^n.$$

Im Maximum gilt $H(u; x_0) \leq 0$ (d.h., $H(u; x_0)$ ist negativ semi-definit). Daraus folgt $Lu(x_0) \leq 0$.

Im allgemeinen Fall $Lu \geq 0$ betrachte die Funktionenschar $u_\varepsilon := u + \varepsilon \exp(\gamma x_1)$ für $\varepsilon > 0$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \Omega$. Dann gilt

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon(\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1) \exp(\gamma x_1)$$

und wähle γ so groß, dass $\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1 > 0$ auf Ω (dies ist möglich, da $a_{11} > 0$ und stetig auf $\bar{\Omega}$). Dann folgt

$$Lu_\varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \max_{x \in \Omega} u_\varepsilon(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

und betrachte $\varepsilon \rightarrow 0^+$. \square

Bemerkung 5.1.2: Im Falle $c \neq 0$ gilt der Satz i.A. *nicht*. Für den Fall $\Omega = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ erfüllt $u(x_1, x_2) := \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ die Gleichung $-\nabla u - 2\pi^2 u = 0$ in Ω , aber es gilt $u = 0$ auf $\partial\Omega$. \square

Bemerkung 5.1.3: Der Eindeutigkeits-Beweis gilt auch unter schwächeren Voraussetzungen an $A(x)$: $A(x)$ sei positiv semi-definit und es existiere ein $\xi \in \Omega$, $\xi \neq x \in \bar{\Omega}$ mit $\xi_i a_{ij} \xi_j > 0$. Denn: definiere dann $u_\varepsilon := u + \varepsilon \exp(\gamma \xi \cdot x)$

$$\Rightarrow Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon(\gamma^2 \xi_i a_{ij} \xi_j + \gamma b^T \xi) \exp(\gamma \xi).$$

Dies wird später für parabolische Probleme von Bedeutung sein. \square

Korollar 5.1.4 *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $c \leq 0$ in Ω . Falls $Lu \geq 0$ (bzw. $Lu \leq 0$), gilt*

$$\max_{x \in \Omega} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u^+(x) \quad \left(\text{bzw.} \quad \min_{x \in \Omega} u(x) \geq \min_{x \in \partial\Omega} u^-(x) \right)$$

mit $u^+(x) = \max(u, 0)$, $u^-(x) = \min(u, 0)$.

Insbesondere, falls $Lu = 0$ in Ω , dann gilt $\max_{x \in \Omega} |u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)|$.

Beweis: Falls $u \leq 0$ auf ganz Ω ist die Aussage trivial. O.B.d.A. sei also $\Omega^+ := \Omega \cap \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \neq \emptyset$. Dann gilt $-cu \geq 0$ und damit

$$\underbrace{a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}}_{=: \tilde{L}u} = -cu \geq 0 \quad \text{an} \quad \Omega^+.$$

Wende nun Satz 5.1.1 auf \tilde{L} und Ω^+ an und erhalte:

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \Omega^+} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u^+(x),$$

da $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$. \square

Korollar 5.1.5 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und $c \leq 0$. Falls $Lu = Lv$ in Ω und $u = v$ auf $\partial\Omega$, dann folgt $u = v$ in Ω .

Falls $Lu \leq Lv$ in Ω und $u \geq v$ auf $\partial\Omega$, dann folgt $u \geq v$ in Ω . \square

5.2 Das starke Maximum–Prinzip für elliptische Probleme

Satz 5.1.1 sagt, das Maximum wird auf dem Rand angenommen. Es können aber viele Maxima (auch im Inneren) auftreten. Dies wollen wir nun näher untersuchen.

Bemerkung 5.2.1: Ist das Maximum negativ, ist Korollar 5.1.4 wertlos. Als Beispiel betrachte $\Omega = (-2, 2)^2$ und $u(x_1, x_2) = -(e^{x_1} + e^{-x_1} + e^{x_2} + e^{-x_2})$. Das Maximum liegt in $(0, 0)$: $u(0, 0) = -4$, aber auf $\partial\Omega$ gilt $u < e^{-2}$ ($e^2 \sim 7.39$). \square

Das starke Maximumprinzip schließt dieses aus, falls $u \neq \text{const}$. Für den Beweis benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen.

Lemma 5.2.2 (Hopf–Lemma) *Angenommen, Ω liegt auf einer Seite von $\partial\Omega$. (Ω sei zusammenhängend), $Lu \geq 0$, $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x) \forall x \in \Omega$ und*

- $\partial\Omega$ ist C^2 in $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$
- u ist differenzierbar in x_0

Falls entweder

- 1) $c = 0$, oder
- 2) $c \leq 0$ und $u(x_0) \geq 0$, oder
- 3) $u(x_0) = 0$

dann gilt $\frac{\partial}{\partial n} u(x_0) > 0$ (dabei bezeichnet n die äußere Normale, d.h. $n(x_0) = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|}$), $y \in \Omega$.

Beweis: Der Rand $\partial\Omega$ ist lokal C^2 , also existiert eine Umgebung $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$. Für $x \in \Omega$, $0 \leq r = |x - y| \leq R$ definiere

$$v(x) := \exp(-\alpha r^2) - \exp(-\alpha R^2), \alpha > 0, \quad r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2.$$

Dann gilt $v > 0$ in $B_R(y)$ und $v = 0$ auf $\partial B(y; R)$. Weiterhin gilt $\frac{\partial}{\partial n} v(x) = -2\alpha(x-y)^T e^{-\alpha r^2}$ und damit

$$\begin{aligned} Lv(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) [4\alpha^2(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha\delta_{ij}] e^{-\alpha r^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n b_i(x)(-2\alpha)(x_i - y_i)e^{-\alpha r^2} + c(x)v(x) \\ &= (e^{-\alpha r^2}) [4\alpha^2(x - y)^T A(x)(x - y) - 2\alpha \text{Spur}(A(x)) + 2\alpha b(x)^T(x - y) - c(x)] \\ &\quad - c(x)e^{-\alpha r^2}. \end{aligned}$$

Betrachte nun eine Kugel $\mathcal{U}_\rho(x_0)$ und wähle ρ so klein, dass

$$(x - y)^T A(x)(x - y) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}_\rho(x_0)$$

(dies ist möglich wegen $n(x_0)^T A(x_0)n(x_0) > 0$, folgt aus $Lu(x_0) \geq 0$). Definiere $D := \mathcal{U}_\rho(x_0) \cap \mathcal{U}_R(y)$ und wähle $\alpha > 0$ so groß, dass $Lv \geq 0$ in D . Setze

$$u_\varepsilon(x) := u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x), \quad \varepsilon > 0,$$

und damit gilt für alle $x \in D$:

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon(x) &= Lu(x) - c(x)u(x_0) + \varepsilon Lv(x) \\ &= \underbrace{L(u + \varepsilon v)(x)}_{\geq 0} - c(x)u(x_0) \geq -c(x)u(x_0) \geq 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung und wegen $u_\varepsilon(x) \leq 0$ auf $\partial D \cap \partial \mathcal{U}_R(y)$ (da hier $v = 0$ und $u(x_0) > u(x)$ nach Voraussetzung).

Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $u_\varepsilon(x) \leq 0$ auch auf $\partial D \cap \partial \mathcal{U}_\rho(x_0)$ (dies ist möglich, da $\partial D \cap \partial \mathcal{U}_\rho(x_0)$ kompakt und $u(x_0) > u(x)$). Daraus folgt, dass $u_\varepsilon \leq 0$ auf ∂D und $Lu_\varepsilon \geq 0$ in D .

Nun sei $c \leq 0$ (Fälle 1,2)

Das schwache Maximumprinzip (Korollar 5.1.5) besagt, dass $u_\varepsilon \leq 0$ auf D und wegen $u_\varepsilon(x_0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial}{\partial n} u_\varepsilon(x_0) &= \frac{\partial}{\partial n} u(x_0) + \varepsilon \underbrace{\frac{\partial}{\partial n} v(x_0)}_{< 0} \\ &= -2\alpha(x_0 - y)^T n(x_0) e^{-\alpha|x_0 - y|^2} \\ &= -2\alpha R e^{-\alpha R^2} < 0, \end{aligned}$$

also folgt

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial}{\partial n} v(x_0) > 0.$$

Fall 3: $u(x_0) = 0$:

Nach Voraussetzung gilt $0 = u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega$ (also ist u negativ). Mit $d(x) := \max\{c(x), 0\} \geq 0$ folgt dann $(L - d)u = Lu - \underbrace{d(x)u}_{\geq 0} \geq Lu \geq 0$ nach Voraussetzung und

$$(L - d)u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i} u + \underbrace{(c - d)}_{\leq 0} u$$

und $u(x_0) = 0$, womit die Aussage auf Fall 2 reduziert ist. \square

Satz 5.2.3 (Starkes Maximumprinzip) Sei $Lu \geq 0$ (bzw. $Lu \leq 0$) in Ω (nicht unbedingt beschränkt) und $u \not\equiv \text{const}$.

- (a) Falls $c = 0$, dann nimmt u sein Maximum (Minimum) nicht im Inneren an.
- (b) Falls $c \leq 0$, dann kann u kein nicht-negatives Maximum (nicht-negatives Minimum) im Inneren annehmen.
- (c) Kein inneres Extremum kann 0 sein.

Beweis: Angenommen, es gebe ein $x \in \Omega$ mit $M := \max_{y \in \Omega} u(y) = u(x)$. Da $u \not\equiv \text{const}$, folgt

$$\Omega^- := \Omega \cap \{u < M\} = \{x \in \Omega : u(x) < M\} \neq \emptyset.$$

Setze $\Omega^M := \Omega \setminus \Omega^- = \Omega \cap \{u = M\}$ und Ω^- ist offen. Also ist Ω^M nicht offen (da sonst Ω Vereinigung von zwei offenen Mengen $\Omega^- \dot{\cup} \Omega^M$ wäre und somit Ω nicht zusammenhängend wäre).

Sei $\tilde{x} \in \Omega^M \cap \partial\Omega^-$, dann existiert ein $y \in \Omega^-$ nahe \tilde{x} mit

$$\text{dist}(y, \Omega^M) < \text{dist}(y, \partial\Omega).$$

Sei r die größte Zahl mit

$$B_r(y) \subset \Omega^-,$$

(d.h. $r := \text{dist}(y, \Omega^M)$) dann existiert $x_0 \in \partial B_r(y)$ mit $u(x_0) = M = \max_{y \in \Omega} u(y)$. Daraus folgt einerseits

$$\nabla u(x_0) = 0.$$

Aus dem Lemma von Hopf folgt aber andererseits in $B_r(y)$, dass $\nabla u(x_0) = \frac{\partial}{\partial n}(x_0) \neq 0$. \square

Definition 5.2.4 Der Differentialoperator L aus (5.1) heißt

- (a) gleichmäßig elliptisch, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x)\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega.$$

- (b) schwach elliptisch, wenn $\xi^T A(x)\xi \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ und es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi^T A(x)\xi > 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.

Bemerkung 5.2.5:

- (a) Wir haben obige Sätze für schwach elliptische Operatoren bewiesen, in der Literatur findet man oft Formulierungen für gleichmäßig elliptische Operatoren.
- (b) Satz 5.2.3 gilt auch für unbeschränkte Gebiete Ω , allerdings gilt dann i.A. das schwache Maximumprinzip nicht.

\square

5.3 A-priori-Schranken

Mit Hilfe des Maximumprinzips erhält man punktweise Abschätzungen für Lösungen von $Lu = f$ in beschränkten Gebieten. Hierzu definiere

$$\lambda(x) := \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T A(x) \xi}{|\xi|^2}, \quad \beta := \max_{x \in \bar{\Omega}} \frac{|b(x)|}{\lambda(x)}. \quad (5.2)$$

Satz 5.3.1 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und in einem Streifen der Breite d zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten. Falls $c \leq 0$ und $Lu = f$, dann gilt

$$\underbrace{\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|}_{=\|u\|_{\infty, \bar{\Omega}}} \leq \underbrace{\max_{x \in \partial\Omega} |u(x)|}_{=\|u\|_{\infty, \partial\Omega}} + C \underbrace{\max_{x \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x)|}{\lambda(x)}}_{=\|f/\lambda\|_{\infty, \bar{\Omega}}}$$

mit $C = \exp((\beta + 1)d) - 1$.

Bemerkung: Dieser Satz sichert also die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten.

Beweis: Wir zeigen, dass aus $Lu \geq f$ stets $\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u^+ + C \max_{x \in \bar{\Omega}} \frac{|f^-(x)|}{\lambda(x)}$ folgt. Die Aussage des Satzes folgt dann durch Anwendung auf u und $-u$.

Da λ und β rotations-invariant sind (für eine Rotation Q gilt bekanntlich $\|Q\| = 1$), können wir annehmen, dass $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < d\}$ gilt.

Mit $L_0 := L - c$ gilt für $\alpha \geq \beta + 1$

$$\begin{aligned} L_0[\exp(\alpha x_1)] &= (\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1) \exp(\alpha x_1) \\ &\geq \underbrace{(\lambda \alpha^2 - \alpha \lambda \beta)}_{=\lambda(x)} \underbrace{\alpha}_{\geq 1} \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\geq 1} \underbrace{\exp(\alpha x_1)}_{\geq 1} \geq \lambda(x) \quad \forall x_1. \end{aligned}$$

Sei nun

$$v(x) := \max_{\tilde{x} \in \partial\Omega} u^+(\tilde{x}) + \underbrace{(\exp(\alpha d) - \exp(\alpha x_1))}_{\geq 0} \underbrace{\max_{\tilde{x} \in \bar{\Omega}} \frac{|f^-(\tilde{x})|}{\lambda(\tilde{x})}}_{\geq 0},$$

dann gilt $v \geq u$ auf $\partial\Omega$ und $v \geq 0$ in Ω . Damit gilt einerseits

$$L(v - u) = L_0 v + \underbrace{cv}_{\leq 0} - \underbrace{Lu}_{=f},$$

sowie

$$L_0 v(x) = \left(\max_{\tilde{x} \in \bar{\Omega}} \frac{|f^-(\tilde{x})|}{\lambda(\tilde{x})} \right) \underbrace{(-1)L[\exp(\alpha x_1)]}_{\leq -\lambda(x)} \leq -\lambda(x) \max_{\tilde{x} \in \bar{\Omega}} \frac{|f^-(\tilde{x})|}{\lambda(\tilde{x})}$$

andererseits und damit $L(v - u) \leq 0$. Nach Korollar 5.1.5 gilt $v \geq u$ auf ganz Ω und daher $C = \exp(\alpha d) - 1$, wenn man den Grenzübergang $x_1 \rightarrow 0+$ betrachtet. \square

Aus diesen Sätzen folgt (etwas technisch, daher verzichten wir hier auf den Beweis):

Satz 5.3.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit C^2 -Rand. Dann besitzt das Problem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

für jedes $g \in C(\partial\Omega)$ genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Beweis: [5, p. 111–117]. \square

Bemerkung 5.3.3: Da Satz 5.3.1 auf dem schwachen Maximumprinzip beruht, gilt die Aussage i.A. *nicht* für unbeschränkte Gebiete Ω , ebenso Satz 5.3.2. \square

5.4 Parabolische Operatoren

Wir betrachten nun Operatoren der Form

$$-\partial_t + L,$$

wobei l auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ elliptisch ist (mit Koeffizienten $A(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$). Mit

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T]$$

heißt

$$\Sigma := (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$$

der *parabolische Rand* von Ω_T .

Definition 5.4.1 Der Operator $-\partial_t + L$ heißt gleichmäßig parabolisch in Ω_T , wenn es ein $\alpha > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x, t) \xi \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, (x, t) \in \Omega_T.$$

Satz 5.4.2 (Schwach Maximumprinzip) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ und $a_{ij}, b_i, c \in C^0(\bar{\Omega})$, sowie $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$. Falls $L_t = -\partial_t + L$ glm. parabolisch ist mit $c(x) = 0$ und $L_t u \geq 0$ (bzw. $L_t u \leq 0$), dann wird das Maximum (Minimum) von u auf Σ angenommen.

Beweis: Aufgrund des schwachen Maximumprinzipes (Satz 5.1.1) für $-\partial_t + L$ auf $\Omega \times (0, T)$, wissen wir, dass das Maximum auf $\partial\Omega_T$ angenommen wird.

Nun sei $L_t u > 0$, dann kann das Maximum nicht auf $\Omega \times \{T\}$ angenommen werden: Sei $x_0 \in \Omega \times \{T\}$ so, dass

$$u(x_0, T) = \max_{(x, T) \in \Omega \times \{T\}} u(x, T).$$

Dann folgt

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_0) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \underbrace{\text{tr} \left(A(x_0) H(u; x_0) \right)}_{>0} + \underbrace{b(x_0) \nabla u(x_0)}_{=0} \leq 0,$$

und damit $0 < (-\partial_t + L)u(x_0, T) = -\partial_t u(x_0, T) + \underbrace{Lu(x_0, T)}_{\leq 0} \leq -\partial_t u(x_0, T)$. Daraus folgt

$\partial_t u < 0$, also kann das Maximum nicht auf $\Omega \times \{T\}$ liegen.

Im allgemeinen Fall $L_t \geq 0$ betrachte

$$u_\varepsilon := u + \varepsilon \exp(-t) \Rightarrow Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon \exp(-t) > 0,$$

also nach obigem $\max_{(x,T) \in \bar{\Omega}_T} u_\varepsilon(x, T) = \max_{(x,T) \in \Sigma} u_\varepsilon(x, T)$ und die Behauptung folgt mit $\varepsilon \rightarrow 0+$. \square

Bemerkung 5.4.3: Offenbar zu Korollar 5.1.4 und Korollar 5.1.5 entsprechende Aussagen ganz analog bewiesen werden. \square

Satz 5.4.4 (Starkes Maximumprinzip) *Es sei Ω offen und $L_t = -\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch mit $L_t u \geq 0$ ($L_t u \leq 0$) sowie $M = \sup_{(x,t) \in \Omega_T} u(x, t)$ ($M = \inf_{(x,t) \in \Omega_T} u(x, t)$). Angenommen, es gebe einen Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit $u(x_0, t_0) = M$, so dass eine der folgenden Eigenschaften gilt*

- 1) $c = 0$ und M beliebig
- 2) $c \leq 0$ und $M \geq 0$ ($M \leq 0$)
- 3) $M = 0$ und c beliebig.

Dann gilt $u = M$ auf $\bar{\Omega}_T$.

Für den Beweis benötigen wir drei Lemmata. Wir nehmen nun stets $L_t u \geq 0$ an (der analoge Fall $L_t u \leq 0$ ergibt sich durch Ersetzung von u durch $-u$).

Lemma 5.4.5 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Kugel mit $\bar{U} \subset \Omega_T$ und sei $u < M$ in U sowie $u(x_0, t_0) = M$, $(x_0, t_0) \in \partial U$. Dann $u(x_0, t_0) = \max_{(x_0,t) \in \bar{U}} u(x_0, t)$ oder $u(x_0, t_0) = \min_{(x_0,t) \in \bar{U}} u(x_0, t)$.*

Beweis: Folgt aus dem Hopf-Lemma 5.2.2 für L_t auf U : Gäbe es ein $(x^*, t^*) \in \partial U$ mit $u(x^*, t^*) > M$, dann würde im Maximum $\frac{\partial}{\partial n} u(x_0, t^*) = 0$ gelten. Lemma 5.2.2 besagt aber $\frac{\partial}{\partial n} u(x_0, t) > 0$. \square

Lemma 5.4.6 *Angenommen, es gelte $u(x_0, t_0) < M$ mit $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in (0, T)$, dann gilt $u(x, t_0) < M$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Angenommen $\Omega \times \{t_0\}$ enthält Punkte mit $u = M$. Dann existieren $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $u(x_1, t_0) = M$ und $u(x_2, t_0) < M$ und das Geradenstück g von (x_1, t_0) nach (x_2, t_0) liegt in $\Omega \times \{t_0\}$. Durch Bewegen von x_1 sichert man $u < M$ in ganz g außer (x_1, t_0) . Sei $\delta := \min\{|x_1 - x_2|, \text{dist}(g, \partial\Omega_T)\}$. Für $(x, t_0) \in g$ mit $0 < |x - x_1| < \delta$ sei

$$d(x) := \text{dist}((x, t_0), \Omega \times (0, T) \cap \{u = M\}) \Rightarrow 0 < d(x) \leq |x - x_1|.$$

Nach Lemma 5.4.5 ist der nächste Punkt zu (x, t_0) in $\Omega \times (0, T) \cap \{u = M\}$ von der Form (x, t) , also entweder $u(x, t_0 + d(x)) = M$ oder $u(x, t_0 - d(x)) = M$.

Sei n ein Einheitsvektor in Richtung g . Dann gilt für $|\varepsilon|$ klein genug, dass $d(x + \varepsilon n)$ wohldefiniert ist und nach dem Satz von Pythagoras folgt $d(x + \varepsilon n)^2 \leq \varepsilon^2 + d(x)^2$ (je nach Verlauf von $\{u = M\}$). Daraus folgt

$$d(x + \varepsilon n) \leq \sqrt{\varepsilon^2 + d(x)^2} \quad (5.3)$$

und analog $d(x) \leq \sqrt{\varepsilon^2 + d(x + \varepsilon n)^2}$, also

$$d(x + \varepsilon n) \geq \sqrt{d(x)^2 - \varepsilon^2}. \quad (5.4)$$

Wegen (5.3) und (5.4) gilt $\frac{\partial}{\partial n} d(x + \varepsilon n)|_{\varepsilon=0} = 0$ und daher ist $d(x)$ konstant entlang $g \cap \{0 < |x - x_1| < \delta\}$.

Dies ist aber ein Widerspruch, denn $d(x) \neq 0$, aber $d(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_1} 0$. \square

Und nun das letzte Lemma, das wir hier brauchen:

Lemma 5.4.7 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.4.4. Sei $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$ und es gelte $u < M$ in $\Omega \times (t_0, t_1)$, dann gilt*

$$u < M \text{ in } \Omega \times \{t_1\}.$$

Beweis: Angenommen, es gelte $u(x_1, t_1) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Definiere

$$v(x, t) := e^{-|x-x_1|^2 - \alpha(t-t_1)} - 1.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L_t v(x, t) &= e^{-|x-x_1|^2 - \alpha(t-t_1)} [\alpha + 4(x - x_1)^T A(x)(x - x_1) \\ &\quad - 2 \operatorname{spur} A(x) - 2b^T(x)(x - x_1) + c(x)] \\ &\quad - c(x). \end{aligned}$$

Wähle $\alpha > 0$ so groß, dass

$$L_t v > 0 \text{ in } U_\rho(x_1, t_1) \cap \{t \leq t_1\} =: V$$

für ein hinreichend kleines $\rho > 0$. Betrachte nun das Paraboloid

$$P := \{(x, t) : |x - x_1|^2 \leq \alpha(t_1 - t)\} \text{ und } U := V \cap P.$$

Für

$$u_\varepsilon(x, t) := \underbrace{u(x, t) - M}_{\leq 0} + \varepsilon v(x, t)$$

gilt $u_\varepsilon \leq 0$ auf ∂U für kleines $\varepsilon > 0$, da $v = 0$ auf ∂P und $u < M$ auf $\partial U \setminus \partial P$ nach Voraussetzung.

In den Fällen 1) und 2) folgt aus Satz 5.4.2 (schwaches Maximumprinzip), dass

$$u_\varepsilon \leq 0 \text{ in } U .$$

und weiter (wegen $u_\varepsilon(x_1, t_1) = 0$ und $u_\varepsilon \leq 0$ in U)

$$0 \leq \partial_t u_\varepsilon(x_1, t_1) = \partial_t u(x_1, t_1) + \underbrace{\varepsilon \partial_t v(x_1, t_1)}_{\substack{=-\alpha \\ <0}} .$$

Daraus folgt einerseits $\partial_t u(x_1, t_1) > 0$. Andererseits gilt im Punkt (x_1, t_1) auch

$$\begin{aligned} 0 &\leq (-\partial_t + L)u = -\partial_t u + \underbrace{\text{spur}(AD^2u) + b^T \nabla u + cu}_{\leq 0, \text{ da } (x_1, t_1) \text{ Max. bzgl. } x} \\ &\leq -\partial_t u + \underbrace{cu}_{\leq 0} \leq -\partial_t u, \end{aligned}$$

also $\partial_t u(x_1, t_1) \leq 0$. Wie im Beweis des Hopf-Lemmas wird Fall 3 auf diesen Fall zurückgeführt. \square

Nun haben wir alle Hilfssätze zusammen.

Beweis von Satz 5.4.4: Wegen Lemma 5.4.6 gilt für jedes $t > 0$ entweder $u(x, t) < M$ für alle $x \in \Omega$ oder $u(x, t) = M$ für alle $x \in \Omega$. Die Menge $I := \{t \in (0, T) : u(x, t) < M\}$ ist offen, also existieren abzählbar viele offene Intervalle $I_k = (a_k, b_k)$ mit $\bigcup_k I_k = I$ und die Mengen I_k sind paarweise disjunkt.

Nach Lemma 5.4.7 kann $u(x, b_k) = M$ mit $b_k < T$ nicht auftreten, also gilt $I = (0, T)$ und wiederum nach Lemma 5.4.7 folgt dann $u(x, T) < M$. \square

Bemerkung 5.4.8: Aus dem Maximum-Prinzip folgt die *Eindeutigkeit* einer klassischen Lösung des parabolischen AWP:

$$\begin{aligned} -\partial_t Lu &= f \text{ in } \Omega \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega \\ u(x, t) &= g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

indem man Satz 5.4.4 auf die Differenzen $u_1 - u_2, u_2 - u_1$ zweier Lösungen anwendet. \square

5.5 Nichtlineare Probleme

In begrenztem Maße gelten auch für einige nichtlineare Probleme Maximum-Prinzipien. Allgemein muss man bei nicht-linearen Problemen mit mehrdeutigen Lösungen rechnen. Deren Verhalten werden in der sogenannten „Verzweigungstheorie“ untersucht. Daher markieren die Resultate in diesem Abschnitt so etwas wie die Grenze der Theorie.

Wir betrachten nun eine allgemeine PDE der Form

$$F[u] := F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad (5.5)$$

mit $F : S := \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S(d, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$S(d, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} : A = A^T\} .$$

Wir erinnern uns (5.5) heißt elliptisch (bei u), falls

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_{ij}} F(x, u, Du, D^2x) \right)_{i,j=1,\dots,d} \text{ positiv definit ist.}$$

Bemerkung: Die Monge–Ampère–Gleichung

$$u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u_{x_1x_2}^2 = f \text{ in } \Omega$$

ist in diesem Sinne elliptisch.

Satz 5.5.1 (Vergleichssatz) *Es seien $u_0, u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ und es gelte*

(i) $F \in C^1(S)$

(ii) F ist elliptisch bei allen $tu_1 + (1-t)u_0$, $0 \leq t \leq 1$

(iii) Für jedes feste (x, q, p) ist F monoton fallend in u .

Gilt dann $u_1 \leq u_0$ auf $\partial\Omega$ und $F[u_1] \geq F[u_0]$ in Ω , so ist entweder $u_1 < u_0$ in Ω oder $u_0 \equiv u_1$ in Ω .

Beweis: Setze $v := u_1 - u_0$, $u_t = tu_1 + (1-t)u_0$, $0 \leq t \leq 1$, sowie

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x)) dt, \\ b_i(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial q_i}(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x)) dt, \\ c(x) &:= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u}(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x)) dt, \end{aligned}$$

(beachte, dass aufgrund der Kettenregel die totale Ableitung $\frac{d}{dt}F(x, u_t(x), Du_t(x), D^2u_t(x))$ nach t integriert wird, dies führt also auf einen Ausdruck durch Randterme (*)). Weiter sei

$$Lv := \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)v_{x_ix_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)v_{x_i}(x) + c(x)v(x),$$

also gilt nach Voraussetzung $Lv = F[u_1] - F[u_0] \geq 0$.

Wegen (ii) ist L elliptisch und wegen (iii) gilt $c(x) \leq 0$. Damit folgt die Behauptung aus dem Maximumprinzip (Satz 5.2.3). \square

Bemerkung 5.5.2: Für $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ kann man Satz 5.5.1 auf die Minimalflächengleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \quad (5.6)$$

anwenden falls die Differenz $u_0 - u_1$ zweier Lösungen von (5.6) im Inneren ein Extremum besitzt, so ist

$$u_0 - u_1 \equiv \text{const. in } \Omega .$$

\square

Satz 5.5.3 (Maximumprinzip) *Es sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ und $F \in C^2(S)$. Es gelte für ein $\lambda > 0$ die Elliptizitätsbedingung*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u, q, p) \xi_i \xi_j$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$, $(x, u, q, p) \in S$ und es gebe Konstanten μ_1, μ_2 , so dass

$$\frac{\text{sign}(u)}{\lambda} F(x, u, q, p) \leq \mu_1 |q| + \frac{\mu_2}{\lambda} .$$

Gilt dann $F[u] \geq u$ in Ω , so ist

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)| + c \frac{\mu_2}{\lambda}$$

mit $c = c(\text{diam}(\Omega), \mu)$.

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 5.5.1 durch Reduktion auf ein lineares Problem, vgl. [4, p. 46–48]. \square

Kapitel 6

Differenzenverfahren

Differenzenverfahren sind das einfachste Verfahren zur numerischen Lösung von PDEs. Mit Hilfe eines **diskreten Maximumprinzipes** liefern sie aber auch Existenz–Resultate.

6.1 Diskretisierung

Der Einfachheit halber sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt. Über Ω legen wir ein Gitter der Gitterweite $h > 0$

$$\Omega_h := \{(x, y) \in \Omega : x = kh, y = lh \text{ mit } k, l \in \mathbb{Z}\}$$

$$\partial\Omega_h := \{(x, y) \in \partial\Omega : x = kh \text{ oder } y = lh \text{ mit } k, l \in \mathbb{Z}\},$$

vgl. Abb. 6.1.

Man bestimmt nun Näherungswerte $u_h(x_h) \approx u(x_h)$, $x_h \in \Omega_h$. Dies hat folgende Konsequenzen:

- Für jedes $z_i = (x_i, y_i) \in \Omega_h$ erhält man durch Auswertung von $Lu = f$ an z_i eine Gleichung.

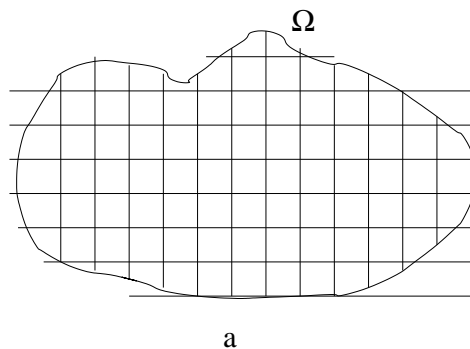


Abbildung 6.1: Diskretisierung eines beliebigen Gebietes mit einem regelmäßigen Gitter.

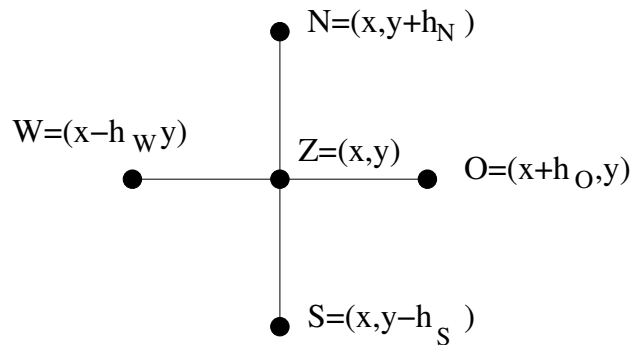


Abbildung 6.2: Fünf-Punkte-Stern.

- Approximiere die Ableitungen durch Differenzenquotienten. Dies führt auf eine *Differenzengleichung* der Form

$$u_{xx} = \frac{2}{h_0(h_0 + h_W)}u_0 - \frac{2}{h_0h_W}u_Z + \frac{2}{h_W(h_0 + h_W)}u_W + O(h) , \quad u \in C^3;$$

wobei die Fehlerordnung aus dem Satz von Taylor folgt, vgl. Abb. 6.2.

Falls $h = h_0 = h_N = h_W = h_S$ dann gilt sogar $u_{xx} = \frac{1}{h^2}(u_0 - 2u_Z + u_W) + O(h^2)$ für $u \in C^4(\Omega)$ und damit

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}(u_0 + u_W + u_N + u_S - 4u_Z) + O(h^2)$$

für $u \in C^4(\Omega)$

In einer abkürzenden Matrixform kann man dies schreiben als

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & -1 & \end{bmatrix} \quad \text{„Fünf-Punkte-Stern“}.$$

Eine Approximation höherer Ordnung liefert die

$$\text{„Mehrstellenformel“} \quad \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 6.1.1: Für $\Omega = (0,1)^2$ und $h = \frac{1}{N}$ mit $N \gg 1$ erhält man folgende Diskretisierung.

Zunächst müssen wir uns über die Nummerierung der Gitterpunkte einigen. Typischerweise wählt man die *lexikographische Nummerierung*, d.h.

$$z_k = (x_i, y_j) , \quad k = (j - 1)(N - 1) + i \quad x_i = ih , \quad y_j = jh.$$

Die Näherungswerte $u_h = (u_h(z_k))_{k=1, \dots, (N-1)^2}$ sind dann gegeben durch

$$A_h u_h = f_h$$

mit $f_h = (f(z_k))_{k=1, \dots, (N-1)^2}$

$$A_h = \begin{bmatrix} B_h & C_h & & 0 \\ B_h & B_h & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & C_h \\ 0 & & C_h & B_h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times (N-1)^2} \quad B_h = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C_h = \text{drag}(-1),$$

Die Matrix A_h ist eine „Block-Tridiagonalmatrix“. □

Algorithmus 6.1.2 (Differenzenverfahren für $-\Delta u = f$ in Ω $u = g$ auf $\partial\Omega$)

- 1) Wähle eine Schrittweite $h > 0$, bestimme Ω_h , $\partial\Omega_h$.
- 2) $n := \#\Omega_h$, $m := \#\partial\Omega_h$
Wähle eine Nummerierung (z.B. lexikographisch) für Ω_h von $1, \dots, n$
und für $\partial\Omega_h$ von $n+1, \dots, n+m$.
- 3) Setze die Randwerte ein: $u_{h,i} := g(z_i)$, $i = n+1, \dots, n+m$
- 4) Für jeden Punkt $z_i \in \Omega_h$ approximiere $Lu(z_i) = f(z_i)$ durch

$$\sum_{l \in \{Z, N, S, O, W\}} \alpha_l u_l = f(z_i)$$

(z.B. $\alpha_Z = 4$ $\alpha_N = \alpha_S = \alpha_W = \alpha_0 = -1$)

und bringe alle eventuell auftretenden Randterme auf die rechte Seite.

- 5) Löse das Gleichungssystem $A_h u_h = f_h$ und verwende z.B. die lineare Interpolation von u_h als Näherung für u .

Beispiel 6.1.3: Wir betrachten ein Dreieckgebiet wie in 6.3 und folgendes Problem: $\Delta u = 0$ in Ω , $u = g$ auf $\partial\Omega$. Als Gitterweite wählen wir $h = 2$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} u_1 - \frac{1}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_3 &= \frac{1}{4}u_4 + \frac{1}{4}u_{11}, \\ 2u_2 - \frac{1}{3}u_1 &= \frac{1}{3}u_5 + \frac{2}{3}u_6 + \frac{2}{3}u_7, \\ 2u_3 - \frac{1}{3}u_1 &= \frac{1}{3}u_{10} + \frac{2}{3}u_9 + \frac{2}{3}u_8, \end{aligned}$$

denn $\frac{2}{h_0 h_W} = 1$ ergibt den Faktor 2 und $\frac{2}{h_0(h_0+h_W)} = \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{h_W(h_0+h_W)} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$. □

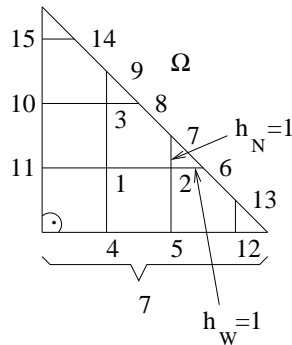


Abbildung 6.3: Diskretisierung eines Dreieckgebietes.

6.2 Diskretes Maximumprinzip

Beim 5-Punkte-Stern ist der Wert im Zentrum maximal. Dies ist ein Spezialfall der Theorie der Differenzensterne.

Lemma 6.2.1 (Stern-Lemma) Sei $k \geq 1$ und für Zahlen α_i, p_i , $0 \leq i \leq k$ gelte $\alpha_i < 0$ für $i = 1, 2, \dots, k$, $\sum_{i=0}^k \alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^k \alpha_i p_i \leq 0$, und entweder $p_0 \geq 0$ oder $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$. Dann folgt aus $p_0 \geq \max_{1 \leq i \leq k} p_i$ die Gleichheit $p_0 = p_1 = \dots = p_k$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{i=1}^k \underbrace{\alpha_i}_{>0} \underbrace{(p_i - p_0)}_{\leq 0} = \sum_{i=0}^k \alpha_i (p_i - p_0) = \underbrace{\sum_{i=0}^k \alpha_i p_i}_{\leq 0} - p_0 \underbrace{\sum_{i=0}^k \alpha_i}_{\geq 0} \leq 0$$

und damit $\alpha_i (p_i - p_0) = 0$, $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow p_0 = p_i \forall i$. \square

Beachte: Die topologische Struktur von Ω kann durch die Diskretisierung verändert werden! Dies müssen wir zunächst ausschließen.

Definition 6.2.2 Ω_h heißt diskret zusammenhängend, wenn zu jedem Paar $(x_h, y_h) \in \Omega_h^2$ ein Streckenzug existiert, der entlang der Gitterlinien und ganz in Ω verläuft.

Satz 6.2.3 (Diskretes Maximum-Prinzip) Sei Ω_h ein Gitter auf Ω und der Differenzenstern erfülle

- (i) Alle Koeffizienten außer α_Z sind nicht positiv,
- (ii) $\alpha_Z < 0$,

(iii) Die Summe aller Koeffizienten ist nicht negativ.

Falls u_h die Lösung von $A_h u_h = f_h$ der elliptischen Gleichung $Lu = f$ in Ω mit $f \leq 0$ ist, dann gilt

$$\max_{z_i \in \Omega_h} u_{h,i} \leq \max \left\{ \max_{z_j \in \partial\Omega_h} u_{h,i}, 0 \right\} .$$

Wenn das Maximum im Inneren angenommen wird, die Koeffizienten $\alpha_S, \alpha_N, \alpha_0, \alpha_W$ negativ sind und Ω_h diskret zusammenhängend ist, dann ist u_h konstant.

Beweis:

- 1) Angenommen, das Maximum wird in $z_i \in \Omega_h$ angenommen. Wende das Stern-Lemma auf

$$p_0 = u_{h,z} , p_1 = u_{h,0} , p_2 = u_{h,S}, \dots$$

an (nur bzgl der $\alpha \neq 0$). Dann stimmt $u_{h,i}$ mit den Werten an den Nachbarnpunkten überein.

- 2) „Marschieren zum Rand“

Betrachte alle Gitterpunkte in $\partial\Omega_h \cup \Omega_h$, die auf derselben horizontalen Linie wie z_i liegen. Induktiv folgt aus 1), dass das Maximum an allen inneren Punkten auf dieser Linie angenommen wird.

- 3) Wenn Ω_h diskret zusammenhängend ist, wählt man von jedem Punkt $z_k \in \Omega_h$ einen Streckenzug nach z_i , geht wie in 2) vor und schließt $u_{h,k} = u_{h,i} \Rightarrow u \equiv \text{const}$. \square

Korollar 6.2.4 *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.2.3 ist das lineare Gleichungssystem $A_h u_h = f_h$ eindeutig lösbar.*

Beweis: „Numerikbeweis“: Betrachte $A_h u_h = 0$, d.h. eine homogene PDE mit Nullrandbedingungen. Nach Satz 6.2.3 folgt $u_h \equiv 0$ und damit besitzt $A_h u_h = 0$ nur die triviale Lösung. \square

„Alternativ“: Zeige, dass A_h s.p.d. ist (z.B. mit dem Satz von Gerschgorin), woraus dann die Behauptung folgt.

6.3 Konvergenztheorie

Für klassische Lösungen erhält man „relativ“ leicht eine Konvergenztheorie. Dazu brauchen wir einige Begriffe.

Im Folgenden sei L_h die Differenzenapproximation von L und für $u \in C(\Omega)$ sei $L_h u$ die Auswertung des Differenzenoperators auf Ω_h .

Definition 6.3.1 (a) *Ein Differenzenverfahren L_h heißt konsistent mit der elliptischen Gleichung $Lu = f$, wenn*

$$Lu - L_h u \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0 \quad (Lu - L_h u = o(x)) \quad \text{für alle } u \in C^2(\bar{\Omega}) .$$

(b) Ein Verfahren hat die Konsistenzordnung m , wenn

$$Lu - L_h u = O(h^m) \quad \text{auf } \Omega_h \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad \text{für alle } u \in C^{m+2}(\bar{\Omega}) .$$

Beispiel 6.3.2: Der allgemeine 5-Punkte-Stern hat die Ordnung 1, der symmetrische ($h = h_0 = h_W = h_S = h_N$) Ordnung 2. \square

Definition 6.3.3 (a) Die Größe $\|r_h\|_{\infty, h} = \|Lu - L_h u\|_{\infty, h}$ heißt lokaler Fehler bezüglich der diskreten Maximumsnorm

$$\|v\|_{\infty, h} := \max_{z_h \in \Omega_h} |v(z_h)|$$

(b) Die Größe $\|\eta_h\|_{\infty, h}$ mit $\eta_h(z_h) := u(z_h) - u_h(z_h)$ heißt globaler Fehler.

Lemma 6.3.4 (Zusammenhang von lokalem und globalem Fehler)
Der globale Fehler η_h erfüllt die Differenzengleichung

$$L_h \eta_h = -r_h \quad \text{in } \Omega_h, \quad \eta_h = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_h .$$

Beweis: Aufgrund der Linearität von L_h gilt

$$\begin{aligned} (L_h \eta_h)_i &= L_h u(z_i) - L_h u_h(z_i) \\ &= L_h u_h(z_i) - (A_h u_h)_i = L_h u_h(z_i) - f(z_i) \\ &= L_h u(z_i) - Lu(z_i) = -(r_h)_i \end{aligned}$$

und für $z_h \in \partial\Omega_h$

$$\eta_h(z_h) = u(z_h) - u_h(z_h) = 0. \quad \square$$

Bemerkung 6.3.5: Falls L_h konsistent ist, folgt $r_h \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0^+$), also konvergiert das Verfahren nach Lemma 6.3.4, falls

$$\|L_h^{-1}\| < \infty \quad \text{für } h \rightarrow 0^+ .$$

\square

Definition 6.3.6 Ein Differenzenverfahren heißt stabil, falls

$$\|L_h^{-1}\| \leq C < \infty \quad \forall h > 0 .$$

Bemerkung 6.3.7:

(a) Stabilität bedeutet, dass kleine Störungen der Eingabe nur kleine Störungen der Ausgabe bewirken.

(b) Offenbar gilt: Stabilität + Konsistenz \Rightarrow Konvergenz.

□

Satz 6.3.8 (Konvergenzsatz) Falls $-\Delta u = f$ in Ω mit $u \in C^2(\Omega)$ und die Ableitungen u_{xx}, u_{yy} gleichmäßig stetig sind, gilt für $L_h u_h = f_h$ ($L_h \hat{=}$ 5-Punkte-Stern)

$$\|u_h - u\|_{\infty, h} \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 .$$

Für den Beweis benötigen wir zunächst einen Hilfssatz.

Lemma 6.3.9 Es gelte $\Omega \subset U_R(0)$, $U_R(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ und v_h sei Lösung von

$$L_h v_h = 1 \quad \text{in } \Omega_h, \quad v_h = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_h \quad (6.1)$$

mit dem 5-Punkte-Stern L_h . Dann gilt

$$0 \leq v_h(x_i, y_i) \leq \frac{1}{4}(R^2 - x_i^2 - y_i^2) \quad \forall (x_i, y_i) \in \Omega_h . \quad (6.2)$$

Beweis: Betrachte $W(x, y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)$, $w_i := W(x_i, y_i)$, $W \in \mathcal{P}_2$. Nun gilt $L_h W(x_i, y_i) = (L_h w)_i = 1 = L_h v_h$ und — da $\Omega \subset U_R(0)$ — $W \geq 0$ auf $\partial\Omega$, also $L_h(w - v_h) = 0$, $w - v_h \geq 0$ auf $\partial\Omega$

Mit dem Maximumprinzip (Satz 6.2.3) folgt $w \geq v_h$ auf Ω sowie aus $L_h v_h = 1 \geq 0$, $v_h = 0$ auf Ω . □

Bemerkung 6.3.10: Wichtig in (6.2) ist, dass die Konstante $\frac{1}{4}$ nicht von h abhängt. Der Satz lässt sich auf andere L, L_h verallgemeinern mit einer Konstanten, die von der Elliptizitätskonstanten abhängt. □

Beweis von Satz 6.3.8: Aus der Taylor-Restgliedformel folgt

$$\begin{aligned} L_h u(x_i, y_i) &= \frac{1}{h^2} [4u(x_i, y_i) - u(x_i - h, y_i) - u(x_i + h, y_i) \\ &\quad - u(x_i, y_i + h) - u(x_i, y_i - h)] \\ &= -u_{xx}(\xi_i, y_i) - u_{yy}(x_i, \eta_i) \end{aligned}$$

mit einem Zwischenpunkt $\xi_i \in (x_i - h, x_i + h)$, $\eta_i \in (y_i - h, y_i + h)$. Der Grenzübergang für $h \rightarrow 0$ liefert $-\Delta u(x_i, y_i)$ aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von u . Daher gilt

$$\|L_h \eta_h\|_{\infty, h} = \max_i |(r_h)_i| = \max_i |L_h u(z_i) - Lu(z_i)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Nun löst $\tilde{\eta}_h := -\frac{\eta_h}{\|r_h\|_{\infty, h}}$ wegen Lemma 6.3.4 das Problem $L_h \tilde{\eta}_h = 1$ in Ω_h , $\tilde{\eta}_h = 0$ auf $\partial\Omega_h$, also nach Lemma 6.3.9: $\tilde{\eta}_h(x_i, y_i) \leq \frac{1}{4}(R^2 - x_i^2 - y_i^2)$ und damit

$$\|\eta_h\|_{\infty, h} = \|r_h\|_{\infty, h} \|\tilde{\eta}_h\|_{\infty, h} \leq \frac{R^2}{4} \|r_h\|_{\infty, h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

und der Satz ist bewiesen. \square

Bemerkung 6.3.11: Die Voraussetzung u_{xx}, u_{yy} gleichmäßig stetig ist sehr stark und in der Praxis oft nicht zu erfüllen. Als Beispiel betrachte $\Delta u = 0$ in $\Omega = U_1(0)$ mit Randwerten

$$u(\cos \varphi, \sin \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \cos(k\varphi).$$

Dieses Problem hat die Lösung

$$u(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^k}{k(k-1)} \cos(k\varphi),$$

aber

$$u_{xx}(x, 0) = \sum_{k=2}^{\infty} x^{k-2} = \frac{1}{1-x} \nearrow \infty$$

für $h \rightarrow 0+$. \square

Bemerkung 6.3.12: Um Resultate über die Konvergenzgeschwindigkeit des Differenzenverfahren zu beweisen, braucht man oft sogar $u \in C^4(\Omega)$ um $\|u - u_h\| = O(h^2)$ zu bekommen! \square

6.4 Randbedingungen höherer Art

Wir haben bislang stets Probleme der Art

$$Lu = f \text{ in } \Omega \tag{6.3}$$

$$u = g \text{ auf } \partial\Omega \tag{6.4}$$

betrachtet. Derartige RBen heißen *Dirichlet-Randbedingungen* oder RBen *1. Art*. Oft nennt man (6.3, 6.4) auch *Dirichlet-Problem*.

Hat man keine Randwerte, sondern Werte für die Änderung einer Größe am Rand (z.B. Ausströmbedingungen) gegeben, sind diese durch

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u = \Psi \text{ auf } \Gamma \tag{6.5}$$

modelliert, wobei $n(x)$ die äußere Normale und Ψ eine gegebene Funktion ist. Die Gleichung (6.5) heißt dann *Neumann-RB* und (6.3, 6.5) *Neumann-Problem*.

Gemischte (oder *Robin*) RBend (auch RBen *2. Art*) lauten

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = \Psi \text{ mit } \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0.$$

Oftmals treten auch mehrere Typen von RBen auf: $Lu = f$ in Ω mit $u = g$ in Γ^{Dir} , $\frac{\partial u}{\partial n} = \Psi$ in Γ^{Neu} , wobei $\Gamma := \partial\Omega = \Gamma^{\text{Dir}} \cup \Gamma^{\text{Neu}}$.

Diskretisierung: In einem Randpunkt sei die Randbedingung

$$\nu \cdot \nabla u + \sigma u = \Psi \quad \text{auf } \Gamma$$

zu diskretisieren, wobei ν nicht tangential zu Γ ist.

- $\nu = n$, $\sigma = 0$ entspricht Neumann-Bedingungen,
- $\nu = n$, $\sigma \neq 0 \Rightarrow$ entspricht Robin-Bedingungen.

Betrachte nun folgende Gerade $g: y - y^* = \frac{\nu_1}{\nu_2}(x - x^*) \iff \nu_1(x - x^*) - \nu_2(y - y^*) = 0$. Der Schnittpunkt mit der ersten Gitterlinie sei P' . Verwende diesen Punkt, um durch $\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u(P) - u(P')}{|PP'|}$ ein Approximation 1. Ordnung zu erklären.

- $P' \in \Omega_h$ setzen $u(P')$ ein,
- $P' \notin \Omega_h$ bilde eine lineare Interpolation von $u(P_1)$ und $u(P_2)$.

6.5 Parabolische Probleme

Als Beispiel betrachten wir das RAWP

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & \text{in } (0, 1) \times (0, T) = \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u_1(t), u(1, t) = u_2(t), t \in (0, T) \end{cases} \quad (6.6)$$

Verwende ein äquidistante Gitter in Ort und Zeit, d.h.

$$\begin{aligned} x_i = ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N} = \Delta x \\ t^j = j\Delta t, \quad j = 0, \dots, M, \quad \Delta t = \frac{T}{M} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow (x_i, t^j) \in \Omega_{T,h}$$

Für $g: \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ sei $g_i^k := g(x_i, t^k)$ definiert.

Wie bisher verwende eine Differenzenapproximation für die auftretenden Ableitungen:

- $u_{xx}(x_i, t^k) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k) = D^+ D^- u_i^k$
mit $(D^+ u)(x) := \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$, $(D^- u)(x) := \frac{1}{h}(u(x) - u(x-h))$
- $\tilde{f}_i^k \approx f(x_i, t^k)$ (naheliegend, aber nicht notwendig ist $\tilde{f}_i^k = f_i^k$)
- für einen zunächst noch freien Parameter σ , $0 \leq \sigma \leq 1$, sei $\frac{1}{\Delta t}(u_i^{k+1} - u_i^k) = D^+ D^-(\sigma u_i^{k+1} + (1-\sigma)u_i^k) + \tilde{f}_i^k$ und $u_i^0 = u_0(x_i)$, $u_0^k = u_1(t^k)$, $u_N^k = u_2(t^k)$.

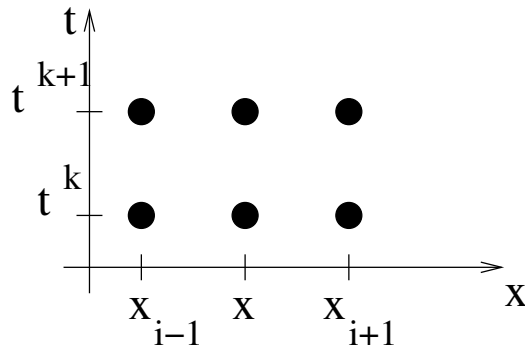


Abbildung 6.4: 6-Punkte-Schema

Man erhält das *6-Punkte-Schema*.

Wir betrachten jetzt folgende **wichtige Spezialfälle**: (mit $\gamma := \frac{\Delta t}{h^2}$)

- 1) *Explizites Verfahren*: $\sigma = 0$, $\tilde{f}_i^k = f_i^k$

$$u_i^{k+1} = (1 - 2\gamma)u_i^k + \gamma(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) + \Delta t f_i^k$$

\rightsquigarrow direkte Berechnung von $(u_i^{k+1})_i$ aus $(u_i^k)_i$

- 2) *Rein implizites Verfahren*: $\sigma = 1$, $\tilde{f}_i^k = f_i^k$

$$(1 + 2\gamma)u_i^{k+1} - \gamma(u_{i+1}^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) = u_i^k + \Delta t f_i^k$$

\rightsquigarrow Lösung des linearen Gleichungssystems $A_h u^{k+1} = \bar{f}^k$ mit

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 + 2\gamma & -\gamma & & 0 \\ -\gamma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\gamma \\ 0 & & -\gamma & 1 + 2\gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$$

$$u^{k+1} = (u_i^{k+1})_i, \quad \bar{f}^k = (u_i^k + \Delta t f_i^k)_i$$

in *jedem* Zeitabschnitt (z.B. mit sparse Cholesky: $O(N)$)

- 3) *Crank-Nicholson-Verfahren* ($\sigma = \frac{1}{2}$, $\tilde{f}_i^k = f(x_i)$, $t^k + \frac{\Delta t}{2}$)

$$2(\gamma + 1)u_i^{k+1} - \gamma(u_{i+1}^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) = 2(1 - \gamma)u_i^k + \gamma(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + 2\Delta t f(x_i, t^k + \frac{\Delta t}{2})$$

\rightsquigarrow wiederum Gleichungssystem analog zu oben

Definition 6.5.1 Eine Funktion $v : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ liegt in der Klasse $C^{k,m}(\Omega_T)$, falls $v(\cdot, t) \in C^k(0, 1)$ für alle $t \in (0, T)$ und $v(x, \cdot) \in C^m(0, T)$ für alle $x \in (0, 1)$ liegt.

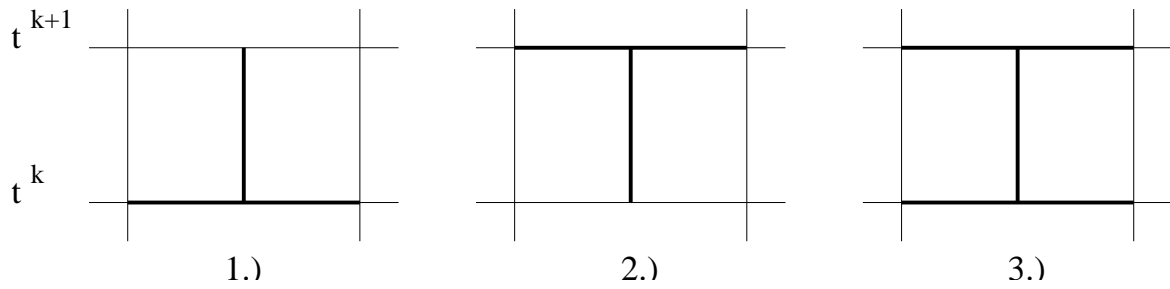


Abbildung 6.5: Abhängigkeiten bei Differenzenverfahren.

Folgenden Satz, der eher der Numerik zuzurechnen ist, geben wir ohne Beweis an.

Satz 6.5.2 *Es gelte die Stabilitätsbedingung*

$$(1 - \sigma) \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (6.7)$$

$u \in C^{4,2}(\bar{\Omega}_T)$ sowie $\tilde{f}_i^k := f(x_i, t^k)$, dann gilt

$$\max_{i,k} |u(x_i, t^k) - u_i^k| = O(h^2 + \Delta t). \quad (6.8)$$

Für das Crank–Nicholson–Verfahren gilt unter der Voraussetzung

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq 1 \quad (6.9)$$

$\max_{i,k} |u(x_i, t^k) - u_i^k| = O(h^2 + \Delta t^2)$ für $u \in C^{4,3}(\bar{\Omega}_T)$. \square

Bemerkung 6.5.3:

- (a) Für das rein-implizite Verfahren ($\sigma = 1$) ist (6.7) stets erfüllt, für Crank–Nicholson ist (6.7) gerade (6.9). Beides sind Restriktionen an die Wahl von Δx und Δt .
- (b) Ähnliche Aussagen gelten auch für allgemeinere parabolische Probleme.
- (c) Verfahren höherer Ordnung sind z.B. Runge–Kutta–Verfahren \rightarrow Numerik II.
- (d) Ob man explizit oder implizit diskretisieren muss hängt von der sogenannten „Steifheit“ des Systems ab \rightarrow Numerik II.

\square

Kapitel 7

Variationsformulierungen

Die klassische Formulierung einer PDE muss nicht immer sinnvoll sein.

Beispiel 7.0.1: Betrachte

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega &= (0, 1)^2 \\ u &= x^2 & \text{auf } \Gamma &= \partial\Omega \end{aligned}$$

Aufgrund der Konvergenz des Differenzenverfahrens existiert eine eindeutige klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Diese kann aber nicht in $C^2(\bar{\Omega})$ liegen (erst recht nicht in $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $m \geq 2$): Aufgrund der RBen gilt $u_{xx}(0, 0) = 2$, $u_{yy}(0, 0) = 0$, was im Widerspruch zur PDE $u_{xx} + u_{yy} = 0$ steht (auf $(\bar{\Omega})$). \square

Beispiel 7.0.2: Im sogenannten L -Gebiet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2 \setminus [0, \frac{1}{2})^2$ löst die Funktion (in Polarkoordinaten)

$$u(r, \varphi) = r^{2/3} \sin\left(\frac{1}{3}(2\varphi - \pi)\right)$$

das RWP

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= r^{2/3} \sin\left(\frac{1}{3}(2\varphi - \pi)\right) & \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

(u ist als Realteil von $z^{2/3}$ harmonisch), die Randdaten sind glatt. Man sieht leicht, dass die ersten Ableitungen für $r \rightarrow 0$ unbeschränkt sind, also $u \notin C^1(\bar{\Omega})$! \square

Um diese Beispiele sinnvoll in eine mathematische Theorie einbetten zu können, brauchen wir einen neuen Lösungsbegriff für partielle Differentialgleichungen. Hierzu müssen wir aber zunächst einen kleinen Ausflug in die Funktionalanalysis machen.

7.1 Sobolev-Räume

Wir betrachten zunächst Sobolev-Räume in $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x)d(x), \quad u, v \in L_2(\Omega) \text{ reellwertig}$$

und $\|u\|_0 := \sqrt{(u, u)_0}$. Wie üblich ist $L_2(\Omega)$ dann Hilbert-Raum.

Definition 7.1.1 (a) Eine Funktion $u \in L_2(\Omega)$ besitzt in $L_2(\Omega)$ die (schwache) Ableitung $v = u'$, falls $v \in L_2(\Omega)$ und

$$(\phi, v)_0 = \int_{\Omega} \phi(x)v(x)d(x) = - \int_{\Omega} \phi'(x)u(x)d(x) = -(\phi', u)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) . \quad (7.1)$$

(b) Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ besitzt $u \in L_2(\Omega)$ die (schwache) Ableitung $v = \partial^\alpha u$, falls $v \in L_2(\Omega)$ und

$$(\phi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \phi, u)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) . \quad (7.2)$$

Beispiel 7.1.2:

(a) Falls $u \in C^1(\Omega \cap L_2(\Omega))$, dann ist die gewöhnliche Ableitung identisch mit der schwachen.

(b) Heaviside-Funktion

$$h(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Es gilt $h \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$, d.h. $h \in H^1(D) \forall D \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $h' = \delta_0$ (Delta Distribution), denn mit $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \phi = [-a, a]$, $a > 0$, gilt

$$(h', \phi)_0 = -(h, \phi')_0 = - \int_0^a \phi'(x)d(x) = \phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\delta_0(x)d(x) = (\delta_0, \phi) .$$

Natürlich ist δ keine L_2 -Funktion. Dieses Beispiel deutet also bereits weitere Verallgemeinerungen auf $u, v \in L_{1,loc}$ an.

(c) Hut-Funktion:

$$u(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0] \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

vgl. Abb. 7.1. Es gilt offenbar $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \phi = [-a, a]$ $a > 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} (\phi', u)_0 &= \int_{-1}^0 (x+1)\phi'(x)dx + \int_0^1 (1-x)\phi'(x)dx \\ &= - \int_{-1}^0 \phi(x)dx + \int_0^1 \phi(x)dx = -(\phi, u') \end{aligned}$$

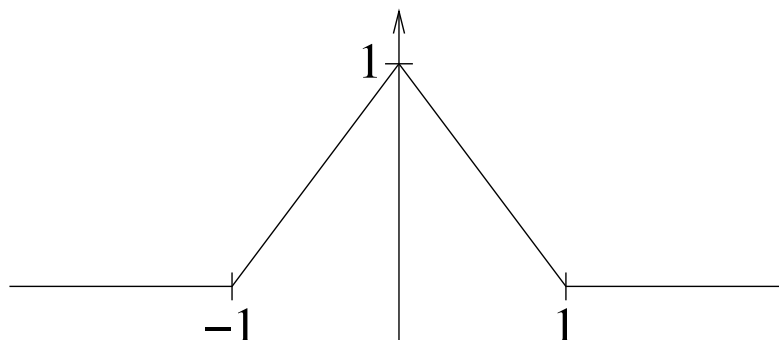


Abbildung 7.1: Hutfunktion.

für

$$u'(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0] \\ -1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- (d) Auch die Dirac–Delta–Distribution δ_0 auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in \Omega$ kann man formal differenzieren, obwohl obige Definition in diesem Fall nicht wohl erklärt ist. Es gilt $(\phi', \delta_0)_0 = \phi'(0)$, d.h. $\delta_0'(\phi) = -\phi'(0)$ sowie $D^\alpha \delta_0(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \phi(0)$. Dies bedeutet, dass δ_0 *beliebig oft* schwach differenzierbar ist.

□

Bemerkung 7.1.3: Definition 7.1.1 überträgt sich analog auch auf andere Differentialoperatoren:

(i) $v = \operatorname{div} u : \iff (\phi, v)_0 = -(\operatorname{grad} \phi, u)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$

(ii) $u = \operatorname{grad} p : \iff (\phi, u)_0 = -(\operatorname{div} \phi, p)_0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)^n$

(iii) Für den Laplace–Operator gilt:

$$\begin{aligned} v = \Delta u : \iff (\phi, v)_0 &= (\phi, \Delta u)_0 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\phi, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u \right)_0 \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \phi, \frac{\partial}{\partial x_i} u \right)_0 \\ &= -(\nabla \phi, \nabla u) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

□

Definition 7.1.4 Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$.

(a) Der Sobolev–Raum $H^m(\Omega)$ ist definiert als

$$H^m(\Omega) := \{u \in L_2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}$$

(b) Eine Bilinearform ist definiert durch

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0$$

sowie

$$|u|_m := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_0^2 \right)^{1/2}$$

eine Halbnorm und

$$\|u\|_m := \sqrt{(u, u)_m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0^2 \right)^{1/2}$$

eine Norm.

Satz 7.1.5 $H^m(\Omega)$ ist ein Hilbert–Raum bzgl. $(\cdot, \cdot)_m$ und $|\cdot|_m$ ist eine Semi–Norm auf $H^m(\Omega)$.

Beweis: Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $H^m(\Omega)$. Dann ist $(\partial^\alpha u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $L_2(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq m$. Also existiert der Grenzwert $u^\alpha \in L_2(\Omega)$ mit $\partial^\alpha u_k \rightarrow u^\alpha$ in $L_2(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq m$.

Sei

$$\phi \in C_0^\infty(\Omega) : \underbrace{(\partial^\alpha u_k, \phi)_0}_{\downarrow k \rightarrow \infty} = \underbrace{(-1)^{|\alpha|} (u_k, \partial^\alpha \phi)_0}_{\downarrow k \rightarrow \infty} = \underbrace{(-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha \phi)_0}_{(\partial^\alpha u, \phi)_0}$$

also gilt $u^\alpha = \partial^\alpha u \in L_2(\Omega) \Rightarrow u \in H^m(\Omega)$.

Homogenität und Dreiecks–Ungleichung von $|\cdot|_m$ folgen aus den Eigenschaften von $\|\cdot\|_m$, aber $|u|_m = 0 \not\Rightarrow u = 0$, wie man am Beispiel einer konstanten Funktion sehen kann. \square

Bemerkung 7.1.6:

(a) Analog definiert man

$$\|u\|_{m,p} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p}^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

sowie $\|u\|_{m,\infty} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty}$ und ebenso $|\cdot|_{m,p}$, sowie

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

(b) Für

$$H^{m,p}(\Omega) := \text{clos}_{\|\cdot\|_{m,p}}(\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\})$$

kann man zeigen, dass

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$$

für „vernünftige“ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt (vgl. [1, p. 52–53]).

(c) Der Buchstabe „ H “ wurde zu Ehren von David Hilbert gewählt.

(d) Offenbar ist $W^{m,2} \equiv H^m$

(e) $H^{m,p}(\Omega)$ ist separabel für $1 \leq p < \infty$, reflexiv und glm. konvex für $1 < p < \infty$.

□

Satz 7.1.7 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit stückweise glattem Rand, $m \geq 0$. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ dicht in $H^m(\Omega)$.

Beweis: Funktionalanalysis, z.B. [1, p. 53–56]. □

Definition 7.1.8 Die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{m,p}$ wird mit $W_0^{m,p}(\Omega)$ ($H_0^m(\Omega)$ für $p = 2$) bezeichnet.

Bemerkung 7.1.9:

(a) $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $H^{m,p}(\Omega)$.

(b) Es gelten folgende Einbettungen

$$\begin{array}{ccccccc} L_2(\Omega) = & H^0(\Omega) & \supset & H^1(\Omega) & \supset & H^2(\Omega) & \supset \dots \\ & \parallel & & \cup & & \cup & \\ & H_0^0(\Omega) & \supset & H_0^1(\Omega) & \supset & H_0^2(\Omega) & \supset \dots \end{array}$$

(c) Die Räume $W^{m,p}(\Omega)$ $p \neq 2$, werden hauptsächlich für *nichtlineare* elliptische PDEs benötigt.

□

Ein wichtiges Hilfsmittel ist der folgende Satz.

Satz 7.1.10 (Poincaré–Friedrichs–Ungleichung)

Sei Ω in einem n -dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten, dann gilt

$$\|v\|_0 \leq s|v|_1 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

Beweis: Da $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ dicht, genügt es, die Behauptung für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zu zeigen. O.B.d.A. sei

- $\Omega \subset W := \{(x_1, \dots, x_n)^T : 0 < x_i < s\}$
- $v(x) = 0 \quad \forall x \in W \setminus \Omega$.

Dann gilt

$$v(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{v(0, x_2, \dots, x_n)}_{=0} + \int_0^{x_1} \partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n) dt$$

und mit Hilfe der Cauchy–Schwarz’schen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} |v(x_1, \dots, x_n)|^2 &\leq \left[\int_0^{x_1} 1^2 dt \right] \left[\int_0^{x_1} |\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n)|^2 dt \right] \\ &\leq s \int_0^s |\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n)|^2 dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_0^s |v(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \leq s^2 \int_0^s |\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n)|^2 dt$$

und schließlich wird über die anderen Koordinaten integriert:

$$\|v\|_0^2 = \int_W |v(x)|^2 \leq s^2 \int_W |\partial_1 v(x)|^2 dx \leq s^2 \|v\|_1^2,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 7.1.11:

- Der Beweis zeigt, dass man Null–Randbedingungen nur auf einem Teil von $\Gamma = \partial\Omega$ benötigt.
- Auf Ableitungen angewandt ergibt sich

$$\|\partial^\alpha v\|_0 \leq s |\partial_1 \partial^\alpha v|_0 \quad \text{für } |\alpha| \leq m - 1, \quad v \in H_0^m(\Omega) \quad (7.3)$$

\square

Satz 7.1.12 *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1.10 sind $\|\cdot\|_m$ und $|\cdot|_m$ auf $H_0^m(\Omega)$ äquivalent, d.h.*

$$|v|_m \leq \|v\|_m \leq (1 + s)^m |v|_m \quad \forall v \in H_0^m(\Omega) \quad (7.4)$$

Beweis: Die erste Ungleichung ist trivial. Wegen (7.3) gilt

$$\begin{aligned} \|v\|_m^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_0^2 = |v|_m^2 + \sum_{|\alpha| < m} \|\partial^\alpha v\|_0^2 \\ &\leq |v|_m^2 + \sum_{|\alpha| < m} s^{2(m-|\alpha|)} |v|_m^2 = |v_m|^2 \left(1 + \sum_{0 < |\alpha| \leq m} s^{2|\alpha|} \right) \\ &= (1+s)^{2m} |v_m|^2. \quad \square \end{aligned}$$

7.2 Einbettungssätze

Für klassische Funktionenräume gilt $C^{k+1}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$. Bei Sobolev-Räumen haben wir zwei Parameter. Die Frage stellt sich, unter welchen Voraussetzungen der eine Sobolev-Raum in einem anderen enthalten ist.

Lemma 7.2.1 Für $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ gilt $H^1(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Beweis: Sei $v \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow$ für $|x - y| \leq \delta$ gilt

$$|v(x) - v(y)| = \left| \int_x^y v'(s) ds \right| \leq \left| \int_x^y 1^2 dt \right|^{1/2} \left| \int_x^y |v'(t)|^2 dt \right|^{1/2} \leq \sqrt{\delta} \|v\|_1.$$

Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ eine Cauchy-Folge und sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n, m \geq N(\varepsilon)$ und $\delta := \frac{\varepsilon^2}{16\|v\|_1^2}$, $|x - y| \leq \delta$

$$\begin{aligned} |v_n(x) - v_m(y)| &\leq |v_n(x) - v_m(x)| + |v_m(x) - v_m(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\delta} \underbrace{\|v_m\|_1}_{\leq 2\|v\|_1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig (gleich-stetig). Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gilt dann $v \in C(\Omega)$. \square

Also sind nach obigem Satz H^1 -Funktionen in 1D auch stetig. Dies ist schon in 2D falsch:

Beispiel 7.2.2: Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $u(x, y) := \log \log \left(\frac{2}{r}\right)$ in Polarkoordinaten, d.h. $r^2 = x^2 + y^2$. Offenbar ist u nicht beschränkt, aber in $H^1(D)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{\log(4r)} \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r \log(2/r)} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos \varphi}{r \log(2/r)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\sin \varphi}{r \log(2/r)}.\end{aligned}$$

Wegen

$$dx = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}}_{=:J} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned}\int_D \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\cos^2 \varphi}{r^2 \log^2(2/r)} \underbrace{\det(J)}_{=r} dr d\varphi \\ &= \pi \underbrace{\int_0^1 \frac{dr}{r \log^2(2/r)}}_{=\frac{1}{\log(2)}} = \frac{\pi}{\log(2)} < \infty\end{aligned}$$

und analog für $\frac{\partial u}{\partial y}$. □

Für $n \geq 3$ ist $u(x) := r^{-\alpha}$, $\alpha < \frac{n-2}{2}$, eine H^1 -Funktion mit einer Singularität im Nullpunkt.

Fazit: H^1 -Funktionen können Singularitäten haben, die um so ausgeprägter sind, desto größer die Raumdimension ist.

Definition 7.2.3 Seien U, V zwei normierte Räume.

- (a) Eine stetige lineare Abbildung $L : U \rightarrow V$ heißt kompakt, wenn für $B_1^u(0) := \{u \in U : \|u\|_u \leq 1\}$ die Menge $L(B_1^u(0))$ kompakt ist.
- (b) Für $U \subset V$ sagt man, dass U in V kompakt eingebettet ist ($U \hookrightarrow V$), falls die Inklusion $j : U \rightarrow V$ kompakt ist.

Bemerkung 7.2.4: Nach dem Satz von Arzelá–Ascoli gilt $C^1(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$. □

Definition 7.2.5 (a) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Gebiet, wenn zu jedem $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung in $\partial\Omega$ existiert, die sich als Graph einer Lipschitz-Funktion darstellen lässt.

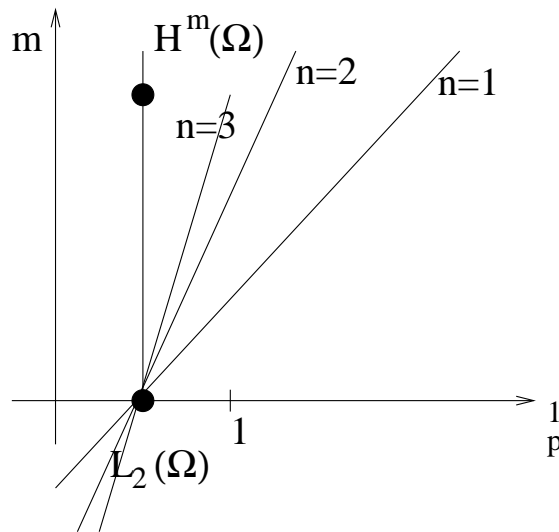


Abbildung 7.2: DeVore-Diagramm zur Veranschaulichung von Sobolev-Räumen.

(b) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die Kegelbedingung, wenn die Innenwinkel an allen Ecken positiv sind, so dass man den Kegel mit positivem Scheitelwinkel so in Ω verschieben kann, dass er die Ecken berührt.

Satz 7.2.6 (Rellich'scher Auswahlatz)

Sei $m \geq 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet, das der Kegelbedingung genügt. Dann ist $H^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$ kompakt.

Beweis: [1, p. 143–148]. \square

Satz 7.2.7 (Sobolev'scher Einbettungssatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $m \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, $j \geq 0$, dann gilt:
 Falls Ω der Kegelbedingung genügt, dann gilt

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q} \quad \forall p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$$

und $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega) \quad \forall p \leq q < \infty, \quad mp = n$

Beweis: [1, p. 97–113]. \square

Beispiel 7.2.8: Für $q = 2$ ergibt die Bedingung $p \leq 2 \leq \frac{np}{n-mp}$ $n - mp \leq \frac{np}{2}$, also $\frac{1}{p} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{2} \rightsquigarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$. \square

Bemerkung 7.2.9: Man kann Sobolev-Räume sehr schön graphisch veranschaulichen im „DeVore“-Diagramm, siehe auch Abb. 7.2. Die Bedingung aus obigem Beispiel wird hier durch eine Gerade durch den Ursprung dargestellt. Diese Gerade nennt man auch die

Einbettungslinie. Alle Räume, die oberhalb dieser Linie liegen, sind in $L_2(\Omega)$ eingebettet. \square

Bemerkung 7.2.10: Mittels *Interpolationstheorie* kann man $W^{m,p}, H^{m,p}$ auch für $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ definieren, ebenso auch für $p < 1$. \square

7.3 Variationsformulierung elliptischer RWP 2. Ordnung

Wir betrachten zunächst das einfache Beispiel $-\Delta u = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\Gamma = \partial\Omega$. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt dann

$$(-\Delta u, \varphi)_0 = \underbrace{(\nabla u, \nabla \varphi)_0}_{=: a(u, \varphi)} = (f, \varphi)_0. \quad (7.5)$$

Da $C_0^\infty(\Omega) \xrightarrow{\text{dicht}} H_0^1(\Omega)$, lautet dann die schwache Formulierung

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (7.6)$$

Offenbar ist $a(\cdot, \cdot)$ für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s.p.d., denn:

- $a(u, v) = a(v, u)$
- $a(u, u) = (\nabla u, \nabla u)_0 = \|\nabla u\|_0^2 = |u|_1^2 \geq \alpha \|u\|_1^2$, $u \in H_0^1(\Omega)$ wegen Satz 7.1.10. Also gilt $a(u, u) > 0$, $u \neq 0$ aufgrund der Poincaré–Friedrichs–Ungleichung.

Probleme wie (7.6) kann man ganz allgemein untersuchen in linearen Räumen V anstelle von $H_0^1(\Omega)$. Die rechte Seite $(f, v)_0$ ist dann ein lineares Funktional $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ (hier $l(v) := (f, v)_0 \in \mathbb{R}$).

Definition 7.3.1 Eine Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem linearen Raum V heißt positiv, falls

$$a(u, u) > 0 \quad \forall u \in V \quad \text{mit } u \neq 0.$$

Satz 7.3.2 (Charakterisierungssatz)

Sei V ein linearer Raum, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, positive Bilinearform und $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Dann gilt

$$u = \arg \min_{v \in V} J(v), \quad J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \quad (7.7)$$

dann und nur dann, wenn

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (7.8)$$

und die Lösung u ist eindeutig.

Beweis: Seien $u, v \in V$ und $t \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - l(u + tv) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + ta(u, v) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) - l(u) - tl(v) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) + t(a(u, v) - l(v)), \end{aligned} \quad (7.9)$$

also für $t = 1$: $J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + (a(u, v) - l(v))$.

Gelte nun (7.8), dann folgt $J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2}a(u, v) > J(u)$, falls $v \neq 0$, also ist u eindeutiges Minimum.

Gelte umgekehrt (7.7), dann gilt für alle $v \in V$

$$0 = \frac{d}{dt}J(u + tv)|_{t=0} = [ta(v, v) + a(u, v) - l(v)]|_{t=0} = a(u, v) - l(v),$$

womit alles bewiesen ist. \square

Bemerkung 7.3.3: Aufgrund von Kapitel 3.2 (Homogenisierung) beschränken wir uns ausschließlich auf homogene Randbedingungen. \square

Satz 7.3.4 (Minimaleigenschaft klassischer Lösungen)

Jede klassische Lösung des RWP

$$Lu := - \sum_{i,k=1}^n \partial_i(a_{i,k}\partial_k u) + a_0 u = f \text{ in } \Omega \quad (7.10)$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (7.11)$$

ist Lösung des Variationsproblems

$$K(v) := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{i,k} \partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - f v \right] dx \longrightarrow \text{Min!} \quad (7.12)$$

Bemerkung 7.3.5:

(a) (7.10) schreibt man oft als

$$f := -\nabla \cdot (A(x)^T \nabla u(x)) + a_0(x)u(x) = -\operatorname{div}(A(x) \operatorname{grad} u(x)) + a_0(x)u(x)$$

mit $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ dem sog. *variablen Koeffizienten*, analog

$$J(v) = \frac{1}{2}(A(x)\nabla v, \nabla v)_0 + \frac{1}{2}(a_0(x = v, v)_0 - (f, v)_0)$$

(b) Die Aussage des Satzes ist auch als *Dirichlet-Prinzip* bekannt.

□

Beweis von 7.3.4: Für $v, w \in C^1(\Omega)$ gilt mit der Green'schen Formel

$$(v, \partial_i w)_0 = -(\partial_i v, w)_0 + \int_{\partial\Omega} v(x)w(s)n_i(s)ds ,$$

wobei $n = (n_1, \dots, n_n)^T$ die äußere Normale ist. Mit $w := a_{ik}\partial_k u$ folgt für $v = 0$ auf $\partial\Omega$

$$(v, \partial_i(a_{ik}\partial_k u))_0 = -(\partial_i v, a_{ik}\partial_k u)_0 . \quad (7.13)$$

Für

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= (A(x)^T \nabla u, \nabla v)_0 + (a_0(x)u, v)_0 \\ l(v) &:= (f, v)_0 \end{aligned}$$

folgt dann mit Summation über i und k aus (7.13)

$$\begin{aligned} a(u, v) - l(v) &= (A(x)^T \nabla u, \nabla v)_0 + (a_0(x)u, v)_0 - (f, v)_0 \\ &= -(v, \nabla \cdot (A(x)^T \nabla u))_0 + (v, a_0(x)u)_0 - (v, f)_0 \\ &= (v, Lu - f)_0 = 0 , \end{aligned}$$

falls u eine klassische Lösung ist. Mit Satz 7.3.2 folgt die Behauptung. □

Korollar 7.3.6 Gilt für eine Lösung u von (7.12) $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, dann ist u klassische Lösung von (7.10), (7.11).

Beweis: Folgt aus dem Beweis von Satz 7.3.4. □

Bemerkung 7.3.7: Wenn man (7.12) nur auf klassischen Funktionenräumen betrachtet, kann man die Existenz einer Lösung i.A. **nicht** sichern wie auch die einführenden Beispiele gezeigt haben. □

7.4 Der Existenzsatz

Definition 7.4.1 Sei H ein HR und $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

- (a) Die Bilinearform a heißt stetig, wenn es eine Konstante $C > 0$ (die sogenannte Stetigkeitskonstante) gibt mit $|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$.
- (b) Eine symmetrische, stetige Bilinearform a heißt V -elliptisch (koerziv) für $V \subseteq H$, wenn es eine Konstante $\alpha > 0$ (Elliptizitätskonstante) gibt mit $a(u, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V$.

Bemerkung 7.4.2: Jede H -elliptische (oder kurz elliptische) Bilinearform a induziert eine Norm durch

$$\|v\|_a := \sqrt{a(v, v)} ,$$

die sogenannte *Energienorm*, die zu $\|\cdot\|_H$ äquivalent ist

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_H \leq \|v\|_a \leq \sqrt{C}\|v\|_H \quad \forall v \in H. \quad (7.14)$$

□

Definition 7.4.3 Sei X ein normierter Raum über \mathbb{R} .

(a) Die Menge der linearen Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit X' bezeichnet und heißt Dualraum von X (auch Raum der linearen Funktionale).

(b) Für $x \in X$, $x' \in X'$ bezeichnet

$$\langle x', x \rangle := x'(x) \in \mathbb{R}$$

das Dualitätsprodukt (oder auch duales Paar).

(c) Für $f \in X'$ heißt

$$\|f\|_{X'} := \sup_{x \neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle f, x \rangle}{\|x\|_X}$$

die Operatornorm.

Bemerkung 7.4.4: (Einige Fakten aus der Funktionalanalysis)

(a) X' ist ein Banachraum unter $\|\cdot\|_{X'}$.

(b) Ist X ein Hilbertraum, so ist $X \cong X'$ isometrisch isomorph.

(c) Für $x, y \in X$, $x', y' \in X'$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \alpha x' + \beta y', x \rangle &= \alpha x'(x) + \beta y'(x) = \alpha \langle x', x \rangle + \beta \langle y', x \rangle \\ \langle x', \alpha x + \beta y \rangle &= x'(\alpha x + \beta y) = \alpha x'(x) + \beta x'(y) \\ &= \alpha \langle x', x \rangle + \beta \langle x', y \rangle, \end{aligned}$$

also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform.

(d) Es gilt

$$|\langle x', x \rangle| \leq \|x'\|_{X'} \|x\|_X \quad \forall x \in X, x' \in X'$$

(Cauchy–Schwarz–Ungleichung)

(e) Eine Menge V heißt *konvex*, wenn $\alpha v + (1 - \alpha)w \in V$ für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha \in [0, 1]$ gilt.

(f) Ist H ein Hilbertraum, dann gilt $\langle x', x \rangle = (x', x)_H$ für $x', x \in H \cong H'$. (Beispiel: $H = L_2(\Omega)$).

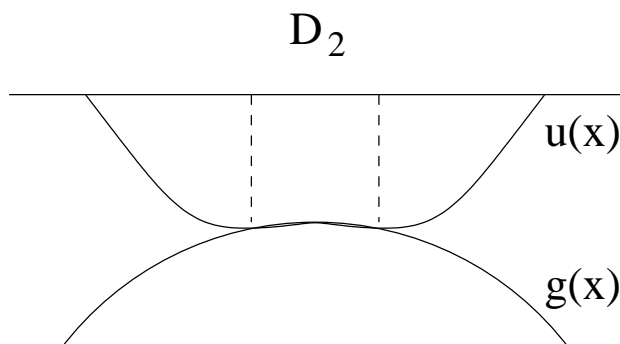


Abbildung 7.3: Hindernisproblem für eine Membran.

□

Satz 7.4.5 Sei V ein Banachraum, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, V -elliptische Bilinearform sowie $f \in V'$. Dann hat die Variationsgleichung

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (7.15)$$

genau eine Lösung $u \in V$.

Beweis: Wegen (7.14) ist $(V, \|\cdot\|_a)$ ein Hilbertraum. Also gibt es nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (Funktionalanalysis) zu $f \in V'$ genau ein $u \in V$ mit (7.15). □

Folgerung 7.4.6 (A-priori-Abschätzung)

Die Lösung $u \in V$ von (7.15) erfüllt $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}$.

Beweis: Für $v = u$ in (7.14) gilt

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{V'} \cdot \|u\|_X \cdot \square$$

Man kann Satz 7.4.5 für sogenannte **Variationsungleichungen** verallgemeinern. Diese spielen eine wichtige Rolle z.B. in der Elastizitätstheorie, Schwingungstheorie oder bei der Bewertung amerikanischer und exotischer Optionen.

Beispiel 7.4.7: Betrachte das Hindernisproblem wie in Abb. 7.3 dargestellt. Gegeben sei eine Membran die auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, die durch eine Kraft der Flächendichte f ausgelenkt wird, auf $\Gamma = \partial\Omega$ sei die Membran fixiert. Im Inneren von Ω sei die Auslenkung $u = u(x)$ durch eine gegebene Funktion g nach unten beschränkt (Hindernis).

Die gesuchte Auslenkung u ergibt sich als Lösung von

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u \geq f \\ u \geq g \\ (\Delta u + f)(u - g) = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \Omega \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (7.16)$$

Dabei ist die *Kontaktzone* $D_2 := \{x \in \Omega : u(x) = g(x)\}$ unbekannt, man hat hier ein *freies Randwertproblem*.

Die Variationsformulierung von (7.16) lautet mit

$$K := \{v \in H_0^1 : v \geq g \text{ f. ü. in } \Omega\}$$

$$u \in K : a(u, v - u) \geq (f, v - u)_0 \quad \forall v \in K \text{ mit } a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_0.$$

Beachte: K ist kein Unterraum, jedoch eine *konvexe Teilmenge* von $H_0^1(\Omega)$! □

Satz 7.4.8 Sei V ein Banachraum und $K \subset V$ abgeschlossen und konvex sowie $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \tag{7.17}$$

(a muss **nicht** symmetrisch sein), $f \in V'$. Dann hat die Variationsungleichung

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \tag{7.18}$$

genau eine Lösung $u \in K$.

Für $\tilde{f} \in V'$ und die dazugehörige Lösung $\tilde{u} \in V$ von (7.18) gilt

$$\|u - \tilde{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f - \tilde{f}\|_{V'} . \tag{7.19}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst (7.19), woraus die Eindeutigkeit folgt. Aus (7.18) folgt

$$a(u, \tilde{u} - u) \geq \langle f, \tilde{u} - u \rangle \quad \text{und} \quad \underbrace{a(\tilde{u}, u - \tilde{u})}_{=-a(\tilde{u}, \tilde{u} - u)} \geq \langle \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle$$

und Addition der beiden

$$a(u - \tilde{u}, \tilde{u} - u) \geq \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle ,$$

also mit (7.17)

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha \|u - \tilde{u}\|_V^2 &\leq -a(u - \tilde{u}, \tilde{u} - u) \leq \langle f - \tilde{f}, \tilde{u} - u \rangle \\ &\leq \|f - \tilde{f}\|_{V'} \|\tilde{u} - u\|_V, \end{aligned}$$

woraus (7.19) folgt.

Für den Existenzbeweis benötigen wir noch eine Verallgemeinerung des Dirichlet-Prinzips aus Satz 7.3.4.

Satz 7.4.9 Unter den Voraussetzungen von Satz 7.4.8 gilt, dass für

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle$$

und symmetrisches $a(\cdot, \cdot)$

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \iff a(u, v - u) \leq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K .$$

Beweis: Das Funktional $J(\cdot)$ ist strikt konvex, also existiert höchstens ein Minimum.

„ \Leftarrow “ Sei $v \in K$ beliebig und setze $h := v - u$, dann folgt

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= J(u + h) - J(u) \\ &= J(u) + \underbrace{\frac{1}{2}a(u, u)}_{\geq 0} + \underbrace{(a(u, h) - \langle f, h \rangle)}_{\geq 0} - J(u), \end{aligned}$$

also $J(u) \leq J(v)$.

„ \Rightarrow “ Da K konvex ist, gilt $u + \lambda h \in K$ für $0 \leq \lambda \leq 1$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(u + \lambda h) - J(u) \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2 a(u, u) + \lambda(a(u, h) - \langle f, h \rangle) \quad (h = v - u). \end{aligned}$$

Daraus folgt $a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle - \frac{\lambda}{2}a(u, u)$ und mit dem Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0+$ folgt die Behauptung. \square

Beweis von Satz 7.4.8 (Fortsetzung):

Sei zunächst $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch. Zeige gemäß Satz 7.4.9, dass J auf K ein Minimum besitzt. Für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle &\geq \frac{\alpha}{2}\|v\|_V^2 - \|f\|_{V'}\|v\|_{V'} \\ &= \underbrace{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\|v\|_V - \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}\|f\|_{V'} \right)^2}_{\geq 0} - \frac{1}{2\alpha}\|f\|_{V'}^2 \\ &\geq -\frac{1}{2\alpha}\|f\|_{V'}^2, \end{aligned}$$

also ist J nach unten beschränkt. Sei nun $d := \inf_{v \in K} J(v)$ und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine „Minimalfolge“, d.h. es gilt

$$d \leq J(u_n) \leq d + \frac{1}{n}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \|u_n - u_m\|_V^2 &\leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\
&= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) \\
&\quad - 4a\left(\frac{1}{2}a(u_n + u_m), \frac{1}{2}a(u_n + u_m)\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{2}a(u_n, u_n) - \langle f, u_n \rangle\right) \\
&\quad + 4\left(\frac{1}{2}a(u_m, u_m) - \langle f, u_m \rangle\right) \\
&\quad - 8\left(\frac{1}{2}a\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - \left\langle f, \frac{u_n + u_m}{2} \right\rangle\right) \\
&= 4J(u_n) + 4J(u_m) - 8J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \\
&\leq 4\left(d + \frac{1}{n}\right) + 4\left(d + \frac{1}{m}\right) - 8d \\
&= 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right),
\end{aligned}$$

also ist $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Da V ein Banachraum ist, gibt es ein $u \in V$ mit $u_m \rightarrow u$ für $m \rightarrow \infty$ und da K abgeschlossen ist, folgt $u \in K$. Schließlich, da das Funktional J stetig ist, gilt $J(u) = d$.

Nun sei a unsymmetrisch, verwende ein Fortsetzungs-Argument (Homotopie).

Für $t \in [0, 1]$ betrachte

$$a_t(u, v) := a_0(u, v) + tb(u, v)$$

mit

$$\begin{aligned}
a_0(u, v) &= \frac{1}{2}(a(u, v) + a(v, u)) \quad (\text{symmetrisch}), \\
b(u, v) &= \frac{1}{2}(a(u, v) - a(v, u)) \quad (\text{antisymmetrisch: } b(u, v) = -b(v, u)),
\end{aligned}$$

also $a_1 = a$ und

- einerseits

$$\begin{aligned}
|a_t(u, v)| &\leq \frac{1}{2}(1+t)|a(u, v)| + \frac{1}{2}(1-t)|a(v, u)| \\
&\leq C\frac{1}{2}(1+t+1-t)\|u\|_V\|v\|_V = C\|u\|_V\|v\|_V,
\end{aligned}$$

- und andererseits $a_t(u, u) = a(u, u) + 0 \geq \alpha\|u\|_V^2$.

Betrachte nun die Variationsungleichung

$$a_t(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (7.20)$$

für $g \in V'$. Für $t = 0$ haben wir die Lösbarkeit, da a_0 symmetrisch ist. Wir zeigen Folgendes: Falls (7.20) für τ lösbar ist, dann auch für alle

$$t \in \left[\tau, \tau + \frac{a}{2C} \right] . \quad (7.21)$$

Wir starten dann mit $\tau = 0$, dann $\tau = \frac{\alpha}{2C}, \frac{\alpha}{C}, \frac{3\alpha}{2C}, \dots, 1 - \frac{\alpha}{2C}$. Sei nun t gemäß (7.21) und betrachte für $w \in V$

$$a_\tau(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle - (t - \tau)b(w, v - u) =: F_w(v - u) \quad (7.22)$$

welches nach Annahme lösbar ist. Betrachte $T : V \rightarrow K$ mit $w \mapsto T(w) = u$ (Lösung von (7.22)). Also ist T ist Kontraktion, denn

$$\begin{aligned} \|T_{w_1} - T_{w_2}\|_V &\leq \frac{1}{\alpha} \|F_{w_1} - F_{w_2}\|_{V'} \\ &= \frac{1}{\alpha} |t - \tau| \sup_{\|v\|_V=1} |b(w_1 - w_2, v)| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \underbrace{|t - \tau| C}_{\leq \frac{\alpha}{2C}} \|w_1 - w_2\|_V \leq \frac{1}{2} \|w_1 - w_2\|_V \end{aligned}$$

Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert nun die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts u_t von T . Also gilt für alle $v \in K$, dass $(a_\tau(u_t, v - u_t) \geq F_{u_t}(v - u_t)$

$$\begin{aligned} a_t(u_t, v - u_t) &= a_\tau(u_t, v - u_t) + (t - \tau)b(u_t, v - u_t) \\ &\geq F_{u_t}(v - u_t) + (t - \tau)b(u_t, v - u_t) \\ &= \langle g, v - u_t \rangle, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Satz 7.4.10 (Satz von Lax–Milgram) Sei V ein Banachraum, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit (7.17) (nicht notwendig symmetrisch), dann hat die Variationsgleichung $a(u, v) = \langle f, v \rangle \forall v \in V$ genau eine Lösung $u \in V$.

Beweis: Wende Satz 7.4.8 auf $K = V$ an.

$$\Rightarrow a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \iff a(u, v) \geq \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$$

(wende dies auf $\pm v$ an) $\iff a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad \square$

Bemerkung 7.4.11: Wie in Satz 7.3.4 (Dirichlet–Prinzip) kann man den Satz von Lax–Milgram einfacher für PDEs der Form

$$Lu = -\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + a_0 u, \quad A = A^T,$$

beweisen, da diese auf symmetrische Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ führen. Satz 7.4.10 gilt aber auch für allgemeine Operatoren zweiter Ordnung der Form

$$Lu = \underbrace{-\nabla \cdot (A(x)\nabla u)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{b(x) \cdot \nabla u}_{\text{Konvektion (Transport)}} + \underbrace{c(x)u}_{\text{Reaktion}},$$

bei denen die zugehörige Bilinearform

$$a(u, v) = (A(x)\nabla u, \nabla v)_0 + (b(x) \cdot \nabla u, v)_0 + (c(x)u, v)_0$$

im Allgemeinen nicht symmetrisch ist. □

7.5 Dualräume von Sobolev-Räumen

Obige Sätze haben stets $f \in V'$ vorausgesetzt. Was ist also V' für $V = H_0^1(\Omega)$? Wie üblich (vgl. Definition 7.4.3) verwendet man die Operatornorm.

Definition 7.5.1 Für $m \geq 1$ und $f \in L_2(\Omega)$ erklärt

$$\|f\|_{-m, \Omega} := \sup_{v \in H_0^m(\Omega)} \frac{(f, v)_0}{\|v\|_{m, \Omega}}$$

eine Norm und

$$H^{-m}(\Omega) := \overline{L_2(\Omega)}^{\|\cdot\|_{-m, \Omega}} = \text{clos}_{\|\cdot\|_{-m, \Omega}}(L_2(\Omega))$$

wird mit $(H_0^m(\Omega))'$ identifiziert.

Es gibt also insbesondere eine duale Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-m}(\Omega) \times H_0^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

bilinear und insbesondere $\langle u, v \rangle = (u, v)_0$, wenn speziell $u \in L_2(\Omega)$, $v \in H_0^m(\Omega)$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \dots \supset H^{-2}(\Omega) \supset H^{-1}(\Omega) \supset L_2(\Omega) \supset H_0^1(\Omega) \supset H_0^2(\Omega) \supset \dots \\ \dots \leq \|u\|_{-2} \leq \|u\|_{-1} \leq \|u\|_0 \leq \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \dots \end{aligned}$$

Bemerkung 7.5.2: Man beachte, dass $H^{-m}(\Omega)$ der Dualraum von $H_0^m(\Omega)$, **nicht** von $H^m(\Omega)$ ist. Dies liegt letztendlich an der Poincaré–Friedrichs–Ungleichung! □

Lemma 7.5.3 Sei a elliptisch auf $H_0^m(\Omega)$, dann gilt für die Lösung $u \in H_0^m(\Omega)$ von

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^m(\Omega)$$

mit $f \in L_2(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{m, \Omega} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{-m, \Omega}.$$

Beweis: Nach Definition 7.5.1 gilt für $u \in L_2(\Omega)$, $v \in H_0^m(\Omega)$

$$(u, v)_0 = \|v\|_m \cdot \frac{(u, v)_0}{\|v\|_m} \leq \|u\|_{-m} \|v\|_m, \quad (7.23)$$

eine verallgemeinerte *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* und per Grenzübergang gilt dies auch für $u \in H^{-m}(\Omega)$, $v \in H^m(\Omega)$ und $\langle u, v \rangle$. Dann gilt für die Lösung u

$$\alpha \|u\|_m^2 \leq a(u, u) = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{-m} \|u\|_m,$$

also die Behauptung. \square

Bemerkung 7.5.4: Für zwei Hilbert-Räume $v \subset U$ mit $V \hookrightarrow U$ stetig und dicht, nennt man $V \hookrightarrow U \hookrightarrow V'$ ein *Gelfand-Triple*. Wir kennen

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H^m(\Omega))',$$

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega).$$

Für $p \neq 2$ ist der duale Exponent p' wie üblich definiert durch ($1 < p < \infty$)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

und dann ergibt sich

$$(W_0^{m,p})' = W^{-m,p'}$$

.

\square

Wir betrachten also zunächst ausschließlich rechte Seiten $f \in L_2(\Omega)$, damit wir die Darstellung

$$\langle f, v \rangle = (f, v)_0, \quad v \in H_0^m(\Omega)$$

verwenden können.

Definition 7.5.5 (a) Die Form eines Differentialoperators 2. Ordnung

$$Lu = -\operatorname{div}(A(x)^T \nabla u) + b(x)^T \nabla u(x) + c(x)u \quad (7.24)$$

mit $a_{ij}, b_i, c \in L_\infty(\Omega) \forall i, j$ heißt Divergenzform. Die dazugehörige Bilinearform lautet

$$a(u, v) = (\nabla u, A(x) \nabla v)_0 + (b^T(x) \nabla u(x), v)_0 + (c(x)u, v)_0 \quad (7.25)$$

(diese ist symmetrisch, falls $A = A^T$ und $b \equiv 0$).

(b) Der Operator L in (7.24) heißt gleichmäßig elliptisch, falls es ein $\alpha^* > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x) \xi \geq \alpha^* |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega.$$

(c) Sei $f \in L_2(\Omega)$. Ein $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung des RWP $Lu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$, mit gleichmäßig elliptischem L , falls u Lösung der Variationsgleichung $a(u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ mit a aus (7.25) ist.

Lemma 7.5.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, L gleichmäßig elliptisch, dann ist a aus (7.25) beschränkt (stetig).

Beweis: Sei

$$a^* := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}(x)|, \quad b^* := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |b(x)|.$$

Nach Voraussetzung gilt $a^*, b^* < \infty$, also gilt für alle $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq |(\nabla u, A(x)\nabla v)_0| + |(b^T(x)\nabla u(x), v)_0| + |(c(x)u, v)_0| \\ &\leq a^* |(\nabla u, \nabla v)_0| + b^* |(1^T \nabla u, v)_0| + \|c\|_\infty \cdot |(u, v)_0| \\ &\leq a^* \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 + b^* \|\nabla u\|_0 \|v\|_0 + \|c\|_\infty \|u\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq (a^* + b^* + \|c\|_\infty) \|u\|_1 \|v\|_1, \end{aligned}$$

also die Behauptung. \square

Zunächst erhalten wir:

Satz 7.5.7 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, L sei gleichmäßig elliptisch mit $b = c = 0$ und $f \in L_2(\Omega)$. Dann besitzt

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

genau eine schwache Lösung u und es gilt $\|u\|_m \leq C \cdot \|f\|_0$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} a(u, u) &= (\nabla u, A(x)\nabla u)_0 \geq \alpha^* (\nabla u, \nabla u)_0 = \alpha^* |u|_1^2 \\ &\geq \alpha^* C |u|_1^2 \end{aligned}$$

wegen Poincaré–Friedrichs, also folgt die Behauptung aus Lemma 7.5.6, Lax–Milgram und Lemma 7.5.3. \square

Nun zu allgemeineren Situationen für b und c .

Lemma 7.5.8 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und L gleichmäßig elliptisch. Dann gibt es ein $\gamma^* > 0$ mit

$$a(v, v) \geq \frac{\alpha^*}{2} \|\nabla v\|_0^2 - \gamma^* \|v\|_0^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Beweis: Mit b^* wie im Beweis von Lemma 7.5.6 gilt

$$\begin{aligned} \alpha^* \|\nabla v\|_0^2 &\leq (\nabla v, A(x)\nabla v)_0 \\ &= a(v, v) - (b^T(x)\nabla v, v)_0 - (c(x)v, v)_0 \\ &\leq a(v, v) - |(b^T(x)\nabla v, v)_0| - |(c(x)v, v)_0| \\ &\leq a(v, v) + b^* (|\nabla v|, |v|)_0 + \|c\|_\infty \|v\|_0^2. \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 (|\nabla v|, |v|)_0 &= \int_{\Omega} |\nabla v(x)| |v(x)| \, dx = \int_{\Omega} (\sqrt{\varepsilon} |\nabla v(x)|) \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |v(x)| \right) \, dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \left(\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} |v(x)| + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}}_{= \frac{\varepsilon}{2} |\nabla v|^2 + |\nabla v| |v| + \frac{1}{2\varepsilon} |v|^2} \right)^2 \, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla v\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|v\|_0^2 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}
 \end{aligned}$$

Wenden wir dies für $\varepsilon := \frac{\alpha^*}{b^*}$ an, so folgt

$$\underbrace{\alpha^* \|\nabla v\|_0^2}_{\geq 0} = a(v, v) + \underbrace{\frac{\alpha^*}{2} \|\nabla v\|_0^2}_{\geq 0} + \frac{(b^*)^2}{2\alpha^*} \|v\|_0^2 + \|c\|_{\infty} \|v\|_0^2,$$

also

$$a(v, v) \geq \frac{\alpha^*}{2} \|\nabla v\|_0^2 + \underbrace{\left(\frac{(b^*)^2}{2\alpha^*} + \|c\|_{\infty} \right)}_{=: \gamma^* > 0} \|v\|_0^2,$$

was zu beweisen war. \square

Daraus folgt nun ein allgemeines Existenz- und Eindeutigkeitsresultat:

Satz 7.5.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und L gleichmäßig elliptisch. Dann gibt es ein $\mu_0 \geq 0$, so dass das Problem

$$Lu + \mu u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{7.26}$$

für jedes $f \in L_2(\Omega)$ und jedes $\mu > \mu_0$ eine eindeutig Lösung besitzt.

Beweis: Sei a die Bilinearform aus (7.25) bzgl. L und

$$a_{\mu}(u, v) = a(u, v) + \mu(u, v)_0$$

die zu $L + \mu I$ gehörende Bilinearform. Dann folgt aus Lemma 7.5.8

$$a_{\mu}(u, v) \geq \frac{\alpha^*}{2} \|\nabla v\|_0 + (\mu - \gamma^*) \|v\|_0^2,$$

also ist $a_{\mu} H'_0(\Omega)$ -elliptisch für $\mu \geq \gamma_0 := \gamma^*$. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lax-Milgram. \square

Bemerkung 7.5.10:

- (a) Für $b \equiv 0$ ist $\gamma^* = \|c\|_{\infty}$, d.h. Satz 7.5.9 liefert $E + E$ für alle $c(x) \geq 0$.

(b) Für $b \neq 0$ (d.h. man hat einen Transport- oder Konvektionsterm) muss offenbar der Reaktionsterm stärker als

$$\frac{(b^*)^2}{2\alpha^*}$$

sein. Insbesondere hat man es mit sogenannten *konvektions-dominanten* Problemen zu tun, wenn obiger Term $\gg 1$ ist. Diese Probleme erfordern besonders abgestimmte Methoden!

□

7.6 Regularitätssätze

Wir hatten gesehen, dass jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist. Für schwache Lösungen haben wir Existenz und Eindeutigkeit. Es stellt sich also die Frage, wann diese glatter als nur H_0^1 sind?

Beispiel 7.6.1: Betrachte $-\Delta u = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Angenommen $f \in L_2(\Omega)$, dann gilt $-\Delta u \in L_2(\Omega)$ und damit

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_0^2 &= \int_{\Omega} (\Delta u(x))(\Delta u(x)) dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u(x) f(x) dx \leq \|\Delta u\|_0 \|f\|_0. \end{aligned}$$

Also folgt $\|\Delta u\|_0 \leq \|f\|_0$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u(x)^2 dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \partial_i^2 u \partial_j^2 u dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \partial_i \partial_j u \partial_i \partial_j u dx \quad (\text{falls vertauschbar}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\partial_i \partial_j u(x))^2 dx, \end{aligned}$$

also $\|u\|_2 = \|\Delta u\|_0 \leq \|f\|_0$ und somit $u \in H^2$!

□

Leider geht es im Allgemeinen nicht ganz so einfach.

Satz 7.6.2 (Innere Regularität) Sei Ω, U offen und $\Omega' \Subset \Omega$ „kompakt“, $f \in L_2(\Omega)$. Der Differentialoperator

$$Lu = -\nabla \cdot (A(x)^T \nabla u) + b^T(x) \nabla u + c(x)$$

sei gleichmäßig elliptisch mit $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $b_{ic} \in L_\infty(\Omega)$, $\forall i, j$. Dann gilt für die schwache Lösung $u \in H'_0(\Omega)$ von $Lu = f$, dass $u \in H^2(\Omega')$ $\forall \Omega' \Subset \Omega$ und

$$\|u\|_{2,\Omega'} \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega})$$

mit $C = C(\Omega, U, L, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$

Wir führen eine Kurzschreibweise ein:

$$A \lesssim B, \text{ falls } \exists c > 0, c \neq c(A, B) \text{ mit } A \leq cB.$$

Weiterhin benötigen wir einige Aussagen über Differenzenoperatoren

$$(D_k^h u)(x) := \frac{1}{h}(u(x + he_k) - u(x))$$

mit dem k -ten Einheitsvektor $e_k = (\delta_{1k}, \dots, \delta_{nk})^T$.

Lemma 7.6.3 Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt für alle $\Omega' \Subset \Omega$ und $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, dass $D_k^h \in L_p(\Omega')$ und

$$\|D_k^h u\|_{L_p(\Omega')} \leq \|\partial_k u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Beweis: Für $\xi \in [0, h]$ definiere

$$\Omega'_{\xi,k} := \{x \in \Omega : x = x' + \xi e_k, x' \in \Omega'\}$$

- 1) Für $1 \leq p < \infty$, $u \in C^1_0(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung

$$\begin{aligned} D_k^h u(x) &= \frac{1}{h} \int_0^h \partial_k u(x + \xi e_k) d\xi \\ &\stackrel{\xi=th}{=} \int_0^1 \partial_k u(x + the_k) dt. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |D_k^h u(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega'} \int_0^1 |\partial_k u(x + the_k)|^p dt dx \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega'_{th,k}} |\partial_k u(\tilde{x})|^p d\tilde{x} dt \leq \|\partial_k u\|_{L_p(\Omega)}^p \end{aligned}$$

Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgt die Behauptung mit Grenzübergang.

- 2) Für $p = \infty$ gilt (7.27) im distributionellen Sinn und man kann analog die Behauptung zeigen. \square

Lemma 7.6.4 Sei $u \in L_p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$ und angenommen, es existiert ein $C > 0$, so dass für jedes $\Omega' \Subset \Omega$, $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ gilt

$$D_k^h u \in L_p(\Omega'), \quad \|D_k^h u\|_{L_p(\Omega')} \leq C,$$

dann ist $\partial_k u \in L_p(\Omega)$ mit $\|\partial_k u\|_{L_p(\Omega)} \leq C$.

Beweis: Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$(\partial_k u, \varphi)_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} (D_k^h u, \varphi)_0.$$

Die Menge $\{D_k^h u : h \geq 0\}$ ist (schwach) kompakt in $L_p(\Omega')$, $\Omega' \Subset \Omega$, also existiert ein $v \in L_p(\Omega)$ mit $\|v\|_{L_p(\Omega)} \leq C$ und eine Folge $(h_m)_m$, $h_m \rightarrow 0$ mit

$$\underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi D_k^{h_m} u \, dx}_{=(\partial_k u, \varphi_0)} = \int_{\Omega} \varphi v \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

also $v = \partial_k u$. \square

Lemma 7.6.5 Sei $\Omega' \Subset \Omega$, $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Dann gilt für alle $u \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ und alle $v \in C_0(\Omega)$, $\text{supp } v \subseteq \Omega'$

$$D_k^h(u, v)(x) = u(x)D_k^h v(x) + D_k^h u(x)v(x + he_k) \quad (7.28)$$

$$\int_{\Omega} D_k^h u(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} u(x)D_k^{-h} v(x)dx \quad (7.29)$$

Beweis: Übung. \square

Beweis von Satz 7.6.2: Mit $g(x) := b^T(x)\nabla u(x) + c(x)u(x) - f(x)$ gilt

$$(\nabla u, A(x)\nabla v)_0 = (g, v)_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (7.30)$$

Nun sei $v \in H_0^1(\Omega)$, $\text{supp } v \Subset \Omega$ und

$$|2h| < \text{dist}(\text{supp } v, \partial\Omega).$$

Dann gilt $D_k^{-h} v \in H_0^1(\Omega)$ für alle $k = 1, \dots, n$, also nach (7.29)

$$\begin{aligned} (D_k^h(A^T(x)\nabla u), \nabla v)_0 &= -(A^T(x)\nabla u, D_k^{-h}(\nabla v))_0 \\ &= -(g, D_k^{-h} v)_0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

und damit

$$\begin{aligned} (A^T(x + he_k)D_k^h(\nabla u), \nabla v)_0 &= \\ &= (D_k^h(A^T(x)\nabla u) - \nabla u D_k^h A^T(x), \nabla v)_0 \\ &= -(g, D_k^{-h} v)_0 - (D_k^h(A^T(x))\nabla u, \nabla v)_0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
|A^T(x + he_k)D_k^h(\nabla u), \nabla v|_0 &\leq \|g\|_0 \|D_k^{-h}v\|_0 + \|D_k^h A^T(x)\|_\infty \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \\
&\leq \underbrace{\|g\|_0}_{\lesssim \|u\|_1} \|\nabla v\|_0 + C \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \\
&\lesssim \|u\|_1 + \|f\|_0 \\
&\lesssim (\|u\|_1 + \|f\|_0) \|\nabla v\|_0.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Sei nun $\Omega' \Subset \Omega$, wähle eine „cutoff“-Funktion $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\zeta \equiv 1$ auf Ω' ,
- 2) $|\nabla \zeta| < \frac{2}{d}$, $d := \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$,
- 3) $\zeta \leq 1$ auf Ω .

So eine Funktion heißt auch „Weichmacher“ – mollifier. Dann gilt für $v = \zeta^2 D_k^h u$ als Testfunktion aufgrund der gleichmäßigen Elliptizität

$$\begin{aligned}
a^* \int_{\Omega} |\zeta \underbrace{\nabla D_k^h u(x)}_{\xi \in \mathbb{R}^n}|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \zeta^2 \xi^T A(x + he_k) \xi dx \\
&= \int_{\Omega} \zeta^2 (\nabla D_k^h u(x))^T A(x + he_k) (\nabla D_k^h u(x)) dx =: (*)
\end{aligned}$$

und weiter wegen $\nabla v = 2\zeta \nabla \zeta D_k^h u + \underbrace{\zeta^2 \nabla(D_k^h u)}$

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_{\Omega} (\nabla v - 2\zeta \nabla \zeta D_k^h u)^T A(x + he_k) (\nabla D_k^h u(x)) dx \\
&\lesssim (\|u\|_1 + \|f\|_0) \underbrace{\|\nabla v\|_0}_{\leq \| \zeta^2 \nabla D_k^h u \|_0} + 2\|A\|_\infty (\|\nabla \zeta D_k^h u\|_0 \cdot \|\zeta \nabla D_k^h u\|_0) \\
&\leq \underbrace{\|\zeta^2 \nabla D_k^h u\|_0}_{\leq \| \zeta \nabla D_k^h u \|_0} + 2\| \zeta \nabla \zeta D_k^h u \|_0 \quad (\|\zeta\| \leq 1) \\
&\quad - 2 \int_{\Omega} (\zeta \nabla \zeta D_k^h u)^T A(x + he_k) (\nabla D_k^h u(x)) dx \\
&\leq 2\|A\|_\infty \int_{\Omega} (\nabla \zeta D_k^h u)^T (\zeta \nabla D_k^h u) dx \\
&\leq 2\|A\|_\infty \|\nabla \zeta D_k^h u\|_0 \|\zeta \nabla D_k^h u\|_0 \\
&\leq C(\varepsilon) [(\|u\|_1 + \|f\|_0 + \|D_k^h u \nabla \zeta\|_0)^2 + \varepsilon \|\zeta \nabla D_k^h u\|_0^2] \\
&\quad (a+b)3c + \alpha cd \leq C(\varepsilon) \left[\underbrace{(a+b+c)^2}_{\geq 0} + \varepsilon d^2 \right] \\
&\quad \quad \quad = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{\geq 0} + \underbrace{2ab + 2ac + 2bc}_{=2c(a+b)+2ab} + \varepsilon d^2
\end{aligned}$$

also haben wir gezeigt:

$$(\alpha^* - c(\varepsilon)\varepsilon)\|\zeta \nabla D_k^h u\|_0^2 \leq C(\varepsilon)(\|u\|_1 + \|f\|_0 + \|D_k^h u \nabla \zeta\|_0)^2.$$

Also für ε mit $C(\varepsilon)\varepsilon = \text{const.}$ α^* mit $\Omega' \Subset \Omega$.

$$\begin{aligned} \|D_k^h u \nabla u\|_{L_2(\Omega')} &\leq \|\zeta D_k^h u \nabla u\|_{0,\Omega} \quad (\zeta \equiv 1 \text{ auf } \Omega') \\ &\lesssim \|u\|_1 + \|f\|_0 + \underbrace{\|D_k^h u \nabla \zeta\|_0}_{\leq \|\nabla u \nabla \zeta\|_0} \\ &\leq \frac{2}{3} \|\nabla u\|_0 \lesssim \|u\|_1 \\ &\lesssim \|u\|_1 + \|f\|_0. \end{aligned}$$

Mit Lemma 7.6.4 folgt dann die Behauptung. \square

Bemerkung 7.6.6: Satz 7.6.2 sagt aus, dass aus $f \in L_2(\Omega) = H^0(\Omega)$ stets $u \in H^2(\Omega')$ folgt, d.h. die Lösung hat zwei Differenzierbarkeitsordnungen mehr als die rechte Seite. Dies gilt auch allgemein, man spricht von einem „shift in der Sobolev-Skala“. \square

Induktiv erhält man

Satz 7.6.7 *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 7.6.2 gilt*

$$a_{ij}, b_i, c \in W^{k+1,\infty}(\Omega), \quad f \in H^k(\Omega),$$

dann gilt $u \in H^{k+2}(\Omega')$ mit

$$\|u\|_{k+2,\omega'} \lesssim \|f\|_{k,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}. \quad \square$$

7.7 Spursätze

Frage: Was bedeutet „ $u|_\Gamma = g$ “ für $u \in W^{1,p}(\Omega)$? Γ ist in Ω eine Nullmenge!

Satz 7.7.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert ein linearer, stetiger Operator $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\Gamma)$ mit*

$$(i) \quad Tu = u|_\Gamma, \text{ falls } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$(ii) \quad \|Tu\|_{L_p(\Gamma)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ mit } c = c(p, \Omega).$$

Beweis: (hier nur für $p = 2$ und $n = 2$).

Sei $\Gamma_1 \subset \Gamma$ ein Randstück mit $(x, y) = (x, h(x)) \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1$ mit einer Lipschitz-stetigen Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$u(x, h(x)) = \int_\tau^{h(x)} u_y(x, y) dy + u(x, \tau)$$

mit τ gemäß $h(x) - \beta \leq \tau < h(x)$ für ein $\beta > 0$ und

$$|u(x), h(x)| \leq |u(y, \tau)| + \left(\int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy \right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_{h(x)-\beta}^{h(x)} 1^2 dy \right)^{1/2}}_{=\sqrt{\beta}}.$$

Verwende nun die *Young-Ungleichung*

$$x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y, \quad x, y > 0, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

also für $p = q = 2$ $\sqrt{x}\sqrt{y} \leq \frac{1}{2}(x + y)$ (Beweis: Übung) und erhalte:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + (x^2 + y^2) + y^2 = 2(x^2 + y^2),$$

also

$$|u(x, h(x))|^2 \leq 2 \left\{ |u(x, \tau)|^2 + \beta \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy \right\}.$$

Dies integrieren wir bezüglich $\tau \in [h(x) - \beta, h(x)]$:

$$\beta |u(x, h(x))|^2 \leq 2 \left\{ \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} |u(x, \tau)|^2 d\tau + \beta^2 \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy \right\}$$

und nun bezüglich $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \beta \int_a^b |u(x, h(x))|^2 dx &\leq 2 \left\{ \int_a^b \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} |u(x, \tau)|^2 d\tau dx + \beta^2 \int_a^b \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy dx \right\} \\ &\lesssim \|u\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,\Gamma_1}^2 &= \int_a^b |u(x, h(x))|^2 \underbrace{\sqrt{1 + h'(x)^2}}_{\leq K, \text{ da } h \text{ Lipschitz-stetig}} dx \\ &\leq K \int_a^b |u(x, h(x))|^2 dx, \end{aligned}$$

also mit obigem $\|u\|_{0,\Gamma_1}^2 \lesssim \|u\|_{1,\Omega}^2$.

Definiere also $T : u(x, y) \mapsto u(x, h(x))$, die also zunächst nur für $u \in C(\bar{\Omega})$ definiert ist. Nach obigem gilt aber

$$\|Tu\|_{0,\Gamma} \lesssim \|u\|_{1,\Omega},$$

also ist T stetig auf $H^1(\Omega)$ fortsetzbar.

Den Beweis für allgemeine n und p findet man z.B. in L. Evans, Partial Differential Equations, AMS 1998. \square

Definition 7.7.2 Die durch Satz 7.7.1 wohldefinierte Abbildung $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\Gamma)$ (manchmal auch γ) heißt Spur-Operator (engl. trace) und Tu heißt die Spur von u auf Γ . Man schreibt oft kurz $Tu = u|_\Gamma = \gamma_\Gamma u$.

Bemerkung 7.7.3: Aus $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgt $\gamma_\Gamma u = 0$ (**Beweis:** Übung) \square

Satz 7.7.4 Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1 -Rand Γ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} u \in W^{1,p}(\Omega), \gamma_\Gamma u = 0 \\ \text{für ein } k \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Beweis: Evans, Adams \square

Bemerkung 7.7.5: Für glatte Gebiete Ω kann man allgemeiner zeigen:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{u \in W_0^{k,p}(\Omega) : \gamma_\Gamma(\partial^\alpha u) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq k-1\}.$$

Man sagt auch, dass u homogene RBen im Sinne der Spur besitzt. \square

Nun sieht man auch, dass die Green'sche Formel für die partielle Integration auch für $u, v \in H^1(\Omega)$ sinnvoll ist

$$\int_\Omega v \partial_i w \, dx = - \int_\Omega \partial_i v w \, dx + \int_{\partial\Omega} v w \nu_i \, ds$$

und (zumindest formal) $H^1(\Omega) \cong H_0^1(\Omega) \oplus \gamma_\Gamma(H^1(\Omega))$.

Daher ist der Raum

$$H^{1/2}(\Gamma) := \{w \in L_2(\Gamma) : \exists v \in H^1(\Omega) : w = \gamma_\Gamma v\}$$

(also $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_\Gamma(H^1(\Omega))$) von großer Bedeutung. Als Norm verwendet man

$$\|w\|_{1/2,\Gamma} := \inf\{\|v\|_{1,\Omega} : v \in H^1(\Omega), \gamma_\Gamma v = w\}.$$

Der Dualraum $(H^{1/2}(\Gamma))'$ wird mit $H^{-1/2}(\Gamma)$ bezeichnet und man verwendet die übliche Operatornorm

$$\|g\|_{-1/2,\Gamma} := \sup_{w \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle g, w \rangle}{\|w\|_{1/2,\Gamma}}, \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Diese Räume spielen in der Numerik von PDEs und bei der Behandlung von Randintegralgleichungen eine wichtige Rolle.

7.8 Parabolische Probleme

Wir sehen schwache Formulierungen von instationären Problemen aus? Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + c_0 u &= f \text{ in } \Omega_T := \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g \text{ auf } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \text{ (Robin-RBen)} \end{cases} \quad (7.33)$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &\in L_\infty(\Omega_T), \quad c_0 = c_0(x, t) \\ f &\in L_2(\Omega_T), \quad \alpha \in L_\infty(\Sigma), \quad \alpha \geq 0, \quad g \in L_2(\Sigma). \end{aligned}$$

Definition 7.8.1 Wir definieren Räume von zeitabhängigen Funktionen

$$H^{1,0}(\Omega_T) := \left\{ u \in L_2(\Omega_T) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega_T) \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\},$$

mit der Norm

$$\|u\|_{1,0} := \left(\int_0^T \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2) dx dt \right)^{1/2},$$

wobei die Ableitungen im schwachen Sinne zu verstehen sind. Analog setzt man

$$H^{1,1}(\Omega_T) := \left\{ u \in L_2(\Omega_T) : \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega_T) \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{1,1}^2 := \int_0^T \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2 + u_t^2) dx dt.$$

Bemerkung 7.8.2: Die Räume $H^{1,0}(\Omega_T)$ und $H^{1,1}(\Omega_T)$ sind unter den zu $\|\cdot\|_{1,0}$ bzw. $\|\cdot\|_{1,1}$ gehörenden Skalarprodukten Hilberträume. \square

Multipliziere (7.33) nun (formal) mit $v \in H^{1,1}(\Omega_T)$ und damit gilt für eine klassische Lösung u :

$$\underbrace{\int_{\Omega_T} u_t v dx dt}_{=:(1)} - \underbrace{\int_{\Omega_T} \Delta u v dx dt}_{=:(2)} + \int_{\Omega_T} c_0 u v dx dt = \int_{\Omega_T} f v dx dt.$$

Partielle Integration bezgl. t :

$$(1) = \int_\Omega \underbrace{(u(x, T) v(x, T) - u(x, 0) v(x, 0))}_{?} dx - \int_{\Omega_T} u v_t dx dt. \text{ Da } v \in H^{1,1}(\Omega_T) \text{ sind nach dem Spursatz } v(x, T), v(x, 0) \in L_2(\Omega) \text{ definiert. Wähle also Testfunktionen solche Funktionen } v \text{ mit } v(x, T) = 0.$$

Partielle Integration bzgl. x :

$$(2) = \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt - \int_{\Sigma} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=g-\alpha u} f \, ds$$

also erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} uv_t \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} c_0 uv \, dx \, dt + \int_{\Sigma} \alpha uv \, ds \\ & = \int_{\Omega_T} fv \, dx \, dt + \int_{\Sigma} gv \, ds + \int_{\Omega} u_0(x)v(x,0) \, dx. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Definition 7.8.3 Eine Funktion $u \in H^{1,0}(\Omega_T)$ heißt schwache Lösung von (7.33), wenn (7.34) für alle Funktionen $v \in H^{1,1}(\Omega_T)$ mit $v(x,T) = 0$ gilt.

Satz 7.8.4 Unter obigen Voraussetzungen an c_0, f, α und g besitzt das Problem (7.33) genau eine schwache Lösung $u \in H^{1,0}(\Omega_T)$ und es gilt

$$\|u\|_{1,1,\Omega_T} \lesssim \|u_0\|_{0,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega_T} + \|g\|_{0,\Sigma}$$

für $u_0 \in L_2(\Omega)$, wobei die Konstante nicht von u_0, f, g abhängt.

Beweis: Z.B. Ladyzhenskaja, Solonnikov, Uraltseva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, AMS, 1968. \square

Bemerkung 7.8.5: In einigen Anwendungen (z.B. in der Optimalsteuerung) reichen Funktionen v mit $v(x,T) = 0$ nicht aus. Man braucht dazu Konzepte wie *abstrakte Funktionen* und das *Bochner-Integral*. \square

Definition 7.8.6 (a) Sei X ein Banachraum und $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dann heißt $u : [a, b] \rightarrow X$, $u : t \mapsto u(t) \in X$ abstrakte Funktion.

$$(b) L_p(a, b; X) := \left\{ u : [a, b] \rightarrow X : \text{messbar und } \|u\|_{L_p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$1 \leq p < \infty$. Das auftretende Bochner-Integral ist analog zum Lebesgue-Integral definiert als Grenzwert von Treppenfunktionen:

$$\int_a^b u(t) \, dt := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b u_k(t) \, dt$$

$$\text{mit } \int_a^b v(t) \, dt := \sum_{i=1}^m v_i \, \text{meas}(M_i) \text{ für Treppenfunktionen. } v(t) = \sum_{i=1}^m v_i X_{M_i}(t), \, v_i \in X$$

Für $X = \mathbb{R}$ sind Bochner- und Lebesgue-Integral identisch. Man beachte, dass $\int_a^b v(t) dt \in X$, also ist das Integral im Allgemeinen keine Zahl, sondern Element eines Banachraums.

Bemerkung 7.8.7: Für den so definierten Raum $L_2(0, T; H^1(\Omega))$ gilt

$$H^{1,0}(\Omega) \cong L_2(0, T; H^1(\Omega))$$

isometrisch, isomorph.

Daraus ergibt sich nun die schwache Formulierung von (7.33) in diesem abstrakten Rahmen. Multiplikation mit $v \in H^1(\Omega) = V$ ergibt

$$(u_t, v)_{0,\Omega} = -(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + ((f(t) - c_0(t))u, v)_{0,\Omega} + (g - \alpha u, v)_{0,\Gamma} . \quad (7.35)$$

Wegen $L_2(\Omega_T) \cong L_2(0, T; L_2(\Omega))$ und $L_2(\Sigma) \cong L_2(0, T; L_2(\Gamma))$ können wir f, g und u als abstrakte Funktionen auffassen.

Für festes t ist die rechte Seite von (7.35) linear in v , d.h. von der Form

$$\langle F(t), v \rangle \text{ mit } F(t) \in (H^1(\Omega))' = V' ,$$

also wird aus (7.35)

$$(u_t, v)_{0,\Omega} = \langle F(t), v \rangle . \quad (7.36)$$

Wenn $u \in L_2(0, T; H^1(\Omega))$ schwache Lösung ist erhält man

$$\int_0^T \|F(t)\|_{H^1(\Omega)'} dt < \infty ,$$

also $F \in L_2(0, T; H^1(\Omega)')$, also wegen (7.36) $u_t \in L_2(0, T; V')$, aber was ist u_t ? □

Definition 7.8.8 Sei V ein BR, dann ist für $v \in L_2(0, T; V)$ vektorwertige Distribution $T : C_0^\infty(0, T) \rightarrow V$ definiert durch

$$T\varphi := \int_0^T v(t)\varphi(t) dt \in V,$$

wobei das auftretende Integral ein Bochner-Integral ist.

Für die Ableitungen $T^{(k)}$ gilt dann (wie bei „herkömmlichen“ Distributionen)

$$\begin{aligned} T^{(k)}\varphi &= (-1)^k \int_0^T u(t) \cdot \varphi^{(k)}(t) dt \\ &= (-1)^k T(\varphi^{(k)}) . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Ableitung u_t einer abstrakten Funktion $u(u_t : (0, T) \rightarrow V)$

$$\int_0^T u(t) \cdot \varphi(t) dt = - \int_0^T u(t) \cdot \varphi'(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T) .$$

Definition 7.8.9 Wir definieren den Hilbertraum

$$W(0, T) := \{u \in L_2(0, T; V) : u' \in L_2(0, T; V')\} = L_2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V')$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W(0, T)} := \left\{ \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt \right\}^{1/2}$$

und dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{W(0, T)} = \int_0^T \{(u(t), v(t))_V dt + (u'(t), v'(t))_{V'}\} dt .$$

Satz 7.8.10 Sei V ein Hilbert-Raum, dann gelten folgende Aussagen:

(a) $W(0, T) \hookrightarrow C(0, T; V)$ stetig und dicht.

(b) $\int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle dt = (u(t), v(t))_V - (u(0), v(0))_V - \int_0^T \langle v'(t), u(t) \rangle dt$
(partielle Integration) $u, v \in W(0, T)$

(c) $\int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle dt = \frac{1}{2} \|u(t)\|_V^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|_V^2$

Beweis:

(a) Z.B. Lions, Partial Differential Equations and Applications, Elsevier 1998.

(b) Übung

(c) folgt sofort aus (b). \square

Satz 7.8.11 Die schwache Lösung von (7.33) liegt in $W(0, T)$ und

$$\|u\|_{W(0, T)} \lesssim \|u_0\|_{0, \Omega} + \|f\|_{0, \Omega} + \|g\|_{0, \Sigma} .$$

Die Abbildung $(f, g, u_0) \mapsto u$ ist damit stetig von $L_2(\Omega_T) \times L_2(\Sigma) \times L_2(\Omega) \rightarrow W(0, T)$, also insbesondere in $C(0, T; L_2(\Omega))$.

Beweis: z.B. Lions. \square

7.9 Lösungsmethoden

Einige der in Kapitel 3 behandelten Lösungsverfahren bleiben auch für schwache Lösungen gültig. z.B.:

- Trennung der Variablen \rightarrow Fourier-Entwicklung in $L_2(\Omega)$
- Formel von d'Alembert liefert gerade schwache Lösungen
- Laplace- und Fouriertransformation, wenn diese für $L_2(\Omega)$ erklärt sind.

Ansonsten ist man auf numerische Verfahren angewiesen

- Finite Differenzen (Kapitel VI)
- Finite Volumen (\rightarrow WS 04/05)
- Finite Elemente (\rightarrow WS 04/05)

Die Idee (die auch für abstrakte Existenzbeweise verwendet wird) ist das sogenannte *Galerkin-Verfahren*. Statt dem unendlich-dimensionalen Problem

$$u \in H : a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

betrachtet man endlich-dimensionale Probleme auf Teilräumen $S_h \subset H$, $\dim S_h = N_h < \infty$

$$u_h \in S_h : a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in S_h \quad (7.37)$$

Man kann wie oben zeigen, dass (7.37) eine eindeutige Lösung besitzt. Man bestimmt S_h in der Regel durch eine Basis

$$S_h = \text{span} \{ \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_h} \} .$$

Dann sucht man $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} x_i \psi_i$, $x_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N_h} a(\psi_j, \psi_i) x_i}_{A_h x_h} = \underbrace{\langle f, \psi_j \rangle}_{=f_h} \quad \forall 1 \leq j \leq N_h$$

mit $A_h = (a(\psi_j, \psi_i))_{i,j}$, $x_h = (x_i)_i$, $f_h = (\langle f, \psi_j \rangle)_j$, also ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Die Grundidee bei Finiten Elementen läßt sich wie folgt skizzieren:

- Unterteile das Gebiet Ω in Dreiecke vom Durchmesser h und erhalte eine sogenannte *Triangulierung* $\mathcal{T}_h := \{T_k : k = 1, \dots, N_h\}$ in dem Sinne, dass $\bar{\Omega} = \bigcup_k T_k$
- Die endlich-dimensionalen Teilräume sind nun durch global stetige, stückweise Polynome definiert: $S_h := \{u \in C(\bar{\Omega}) : u|_{T_k} \in \mathcal{P}_r\}$
- Für $r = 1$ erhält man die häufig verwendeten linearen Elemente. Eine Standard-Basis ist die *Lagrange-Basis*. Für jeden inneren Knoten x_k definiert man eine Funktion ψ_k mit:
 - $\psi_k(x_i) = \delta_{ik}$ (interpolatorisch),
 - ψ_k stückweise linear.

Die nähere Untersuchung von Finite Elemente Methoden ist Gegenstand der Vorlesung Numerik für Partielle Differentialgleichungen.

Wir schließen diese Vorlesung mit einigen numerischen Simulationen zu den Beispielen von PDEs aus Kapitel 1. Diese wurden mit dem kommerziellen Paket FEMLAB erzielt, welches auf der Standard-Software MATLAB beruht. Wie der Name schon sagt, wird die Methode der Finiten Elemente verwendet. Das erklärt auch, warum einige der Beispiele hier nicht auftreten (z.B. die Wellengleichung), da Finite Elemente für Gleichungen dieses Typs (z.B. hyperbolische Gleichungen) nicht so gut geeignet sind.

7.9.1 Laplace-Gleichung

In Abb. 7.4 ist die Lösung des Poisson-Problems auf dem Kreis zu sehen. Links wurde die konstante rechte Seite $f \equiv 1$ verwendet. Hier kennt man die exakte Lösung

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2).$$

Rechts sieht man die Lösung mit einer Punktquelle auf der rechten Seite (Dirac-Distribution). Dabei lautet die rechte Seite der schwachen Formulierung mit der Testfunktion $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = \int_{\Omega} \delta_0(x) v(x) dx = v(0).$$

7.9.2 Wärmeleitungsgleichung

Abb. 7.5 zeigt die Lösung der 3D Wärmeleitungsgleichung. Mit Hilfe von zylindrischer Symmetrie wurde dieses Problem auf ein 2D-Problem reduziert. Am linken Rand des Stabes wurden Neumann-Randbedingungen, an den übrigen Dirichlet-Randbedingungen gestellt.

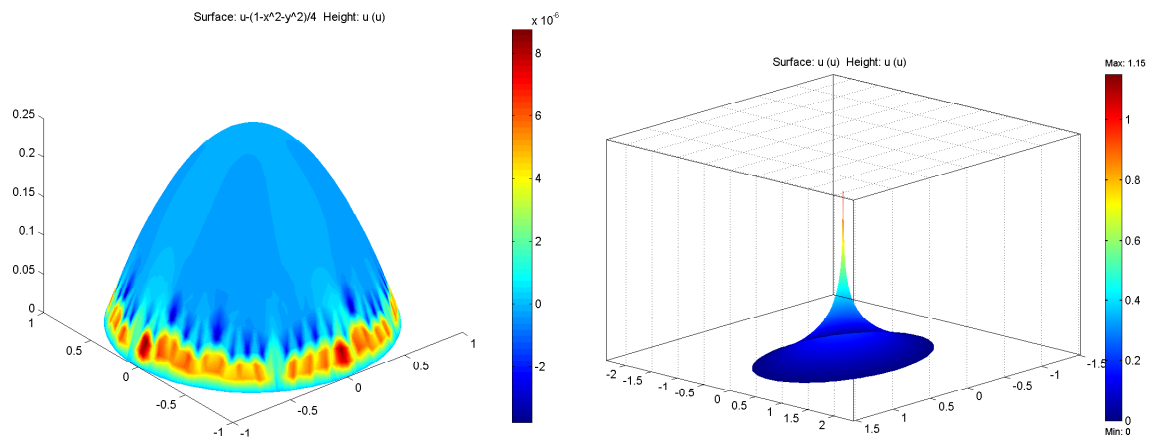


Abbildung 7.4: Lösung der Laplace-Gleichung

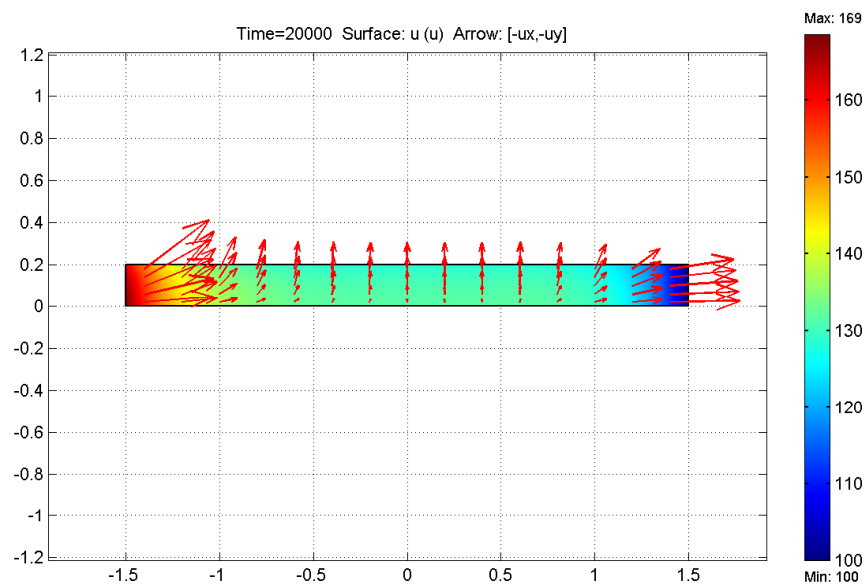


Abbildung 7.5: Lösung der Wärmeleitungsgleichung

7.9.3 KdV-Gleichung

Wir zeigen die Lösung der KdV-Gleichung mit Anfangsbedingungen, die aus einem Soliton (einzelne Wellen) bestehen. Auf der linken Seite in Abb. 7.6 sieht man die Anfangsbedin-

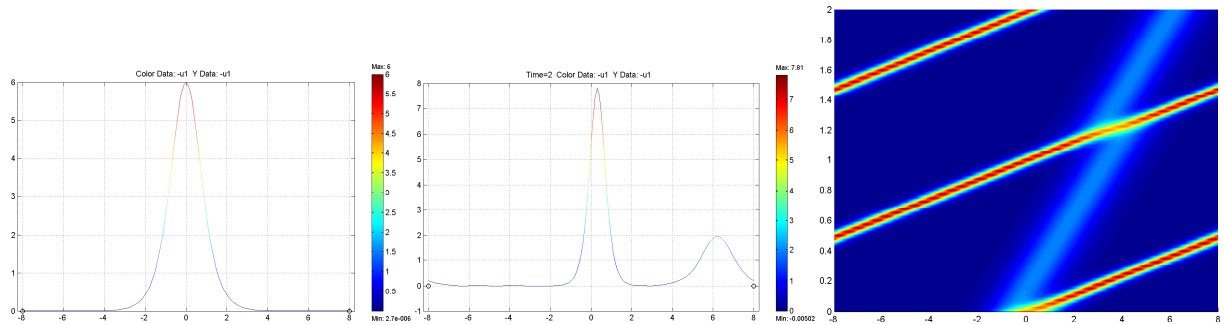


Abbildung 7.6: Lösung der KdV-Gleichung

gung, in der Mitte die Lösung zum Endzeitpunkt, die aus zwei Solitonen besteht und rechts die Lösung über den gesamten Zeitverlauf.

7.9.4 Die Minimalflächen-Gleichung

Wir betrachten die Minimalflächengleichung auf dem Kreis in 2D. Die Lösung beschreibt die Oberfläche eines Flüssigkeitsfilms bei gegebenen Randdaten (hier wurde $u = x^2$ verwendet). Die Lösung ist in Abb. 7.7 abgebildet.

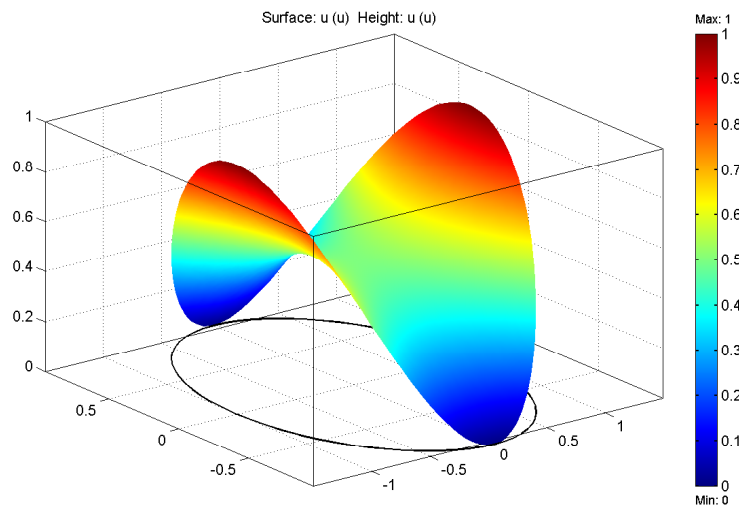


Abbildung 7.7: Lösung der Minimalflächengleichung

7.9.5 Die Maxwell-Gleichungen

Das Beispiel betrachtet einen Spannungstrenner, der vor allem bei Reparaturen an Hochspannungsleitungen verwendet wird, um die Leitungen effektiv zu trennen. Dabei treten natürlich auch elektromagnetische Effekte auf, die durch die Maxwell-Gleichungen modelliert werden.

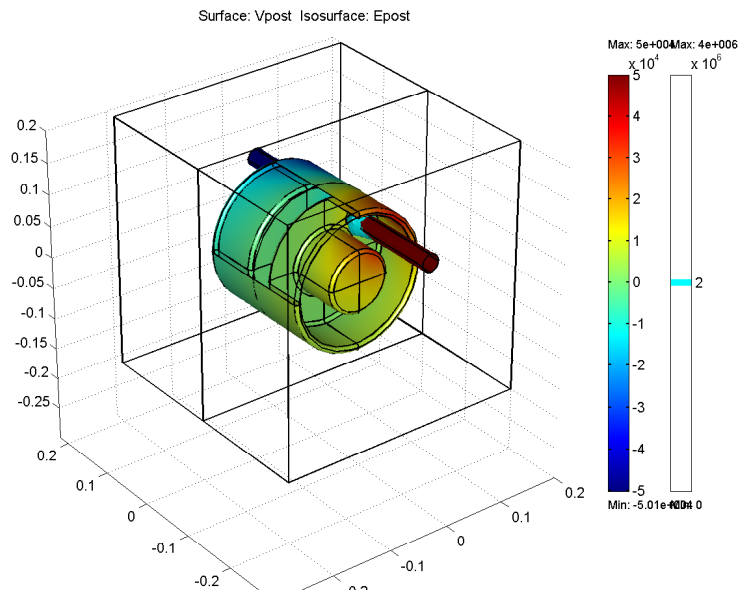


Abbildung 7.8: Lösung der Maxwell-Gleichungen

7.9.6 Die Schrödinger-Gleichung

Das Beispiel zeigt die Höhenlinien der Energie eines einzelnen Elektrons sowie dessen Orbits für das Hydrogen Atom.

7.9.7 Die Platten-Gleichung

Wir betrachten die kreisrunde Reissner-Mindlin-Platte, die am Rand fest eingespannt ist. Die Lösung der entsprechenden Plattengleichung ist in Abb. 7.10 gezeigt.

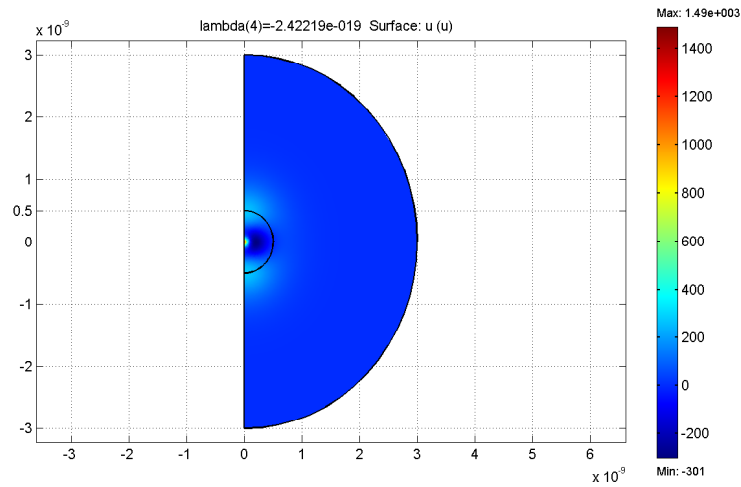


Abbildung 7.9: Lösung der Schrödinger-Gleichungen

7.9.8 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Wir betrachten die stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluids ($\nabla \cdot u = 0$) über eine Stufe (backward facing step).

7.9.9 Die Black-Scholes-Gleichung

Als letztes Beispiel betrachten wir das Bewertungsproblem für eine europäische Put-Option, die durch die Black-Scholes-Gleichung modelliert wird. Abb. 7.12 zeigt die berechnete Näherungslösung als Kontour-Diagramm über die Zeit.

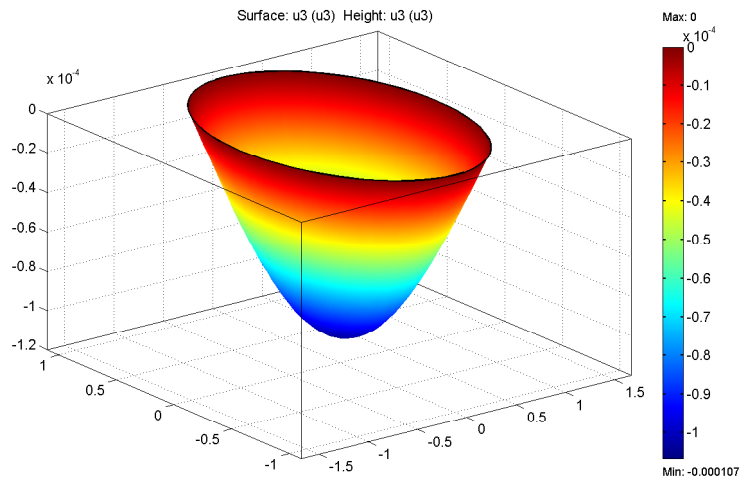


Abbildung 7.10: Lösung der Platten-Gleichung

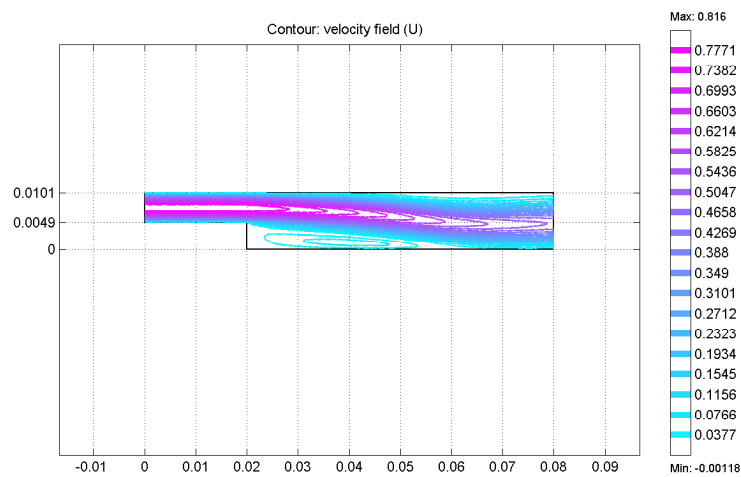


Abbildung 7.11: Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

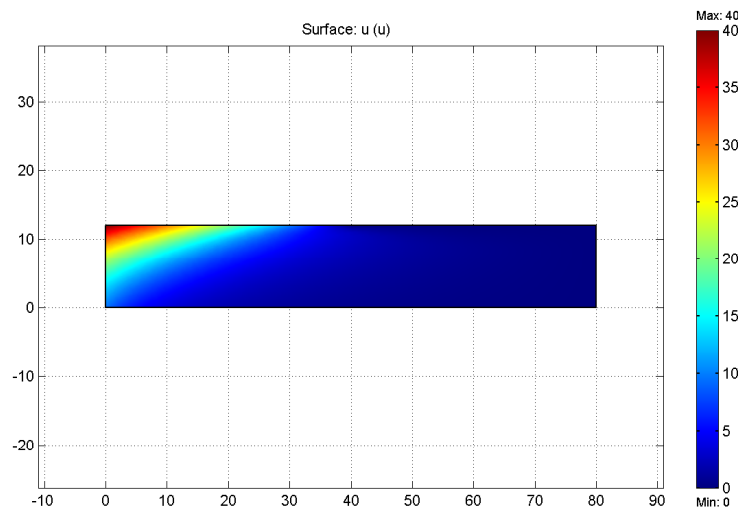


Abbildung 7.12: Lösung der Black-Scholes-Gleichung

Literaturverzeichnis

- [1] R.A. Adams, Sobolev spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, Academic Press New York-London, 1975.
- [2] H.W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, 4. Auflage, Springer 2002.
- [3] D. Braess, Finite Elemente, 2. Auflage, Springer, 1997.
- [4] J. Jost, Partielle Differentialgleichungen, Springer, 1998.
- [5] M. Renerady und R. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 1993.
- [6] F. Sauvigny, Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik, Springer 2004.
- [7] A. Tveito und R. Winther, Einführung in partielle Differentialgleichungen - Ein numerischer Zugang, Springer, 2002.
- [8] K. Meyberg und P. Vachenauer, Höhere Mathematik 2, Springer, 4. Auflage, 2001.