Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

Karina Leathley, Bernadette Mayer

7. August 2006

Diskretisierung

- Ein kontinuierliches Problem wird in endlich vielen Punkten betrachtet
- **Ziel:** kontinuierliche Probleme in endlicher Zeit und mit endlichem Speicherplatz bearbeiten zu können

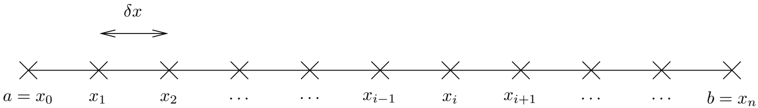
Diskretisierung von Differentialgleichungen

Methode der Finiten Differenzen:

- Rechengitter
- Ableitungen werden durch Differenzenquotienten approximiert

Diskretisierung im Eindimensionalen

- Das Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ wird in n Teilintervalle zerlegt:



- Ableitung der Funktion:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x + \delta x) - u(x)}{\delta x}$$

- diskreter Differenzenoperator:

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{u(x + \delta x) - u(x)}{\delta x}$$

Diskrete Differenzenoperatoren

- rechtsseitige Differenz:

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]_i^r = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\delta x}$$

- linksseitige Differenz:

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]_i^l = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\delta x}$$

- zentrale Differenz:

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]_i^z = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\delta x}$$

Diskretisierungsfehler

- Taylor-Formel: (Entwicklungspunkt a)

$$\boxed{u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n}$$

- rechtsseitige Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x+\delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi)(\delta x)^3$$

Diskretisierungsfehler

- Taylor-Formel: (Entwicklungspunkt a)

$$\boxed{u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n}$$

- rechtsseitige Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x+\delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi)(\delta x)^3$$

$$u(x+\delta x) - u(x) = u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi)(\delta x)^3$$

Diskretisierungsfehler

- Taylor-Formel: (Entwicklungspunkt a)

$$\boxed{u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n}$$

- rechtsseitige Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x+\delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi)(\delta x)^3$$

$$u(x+\delta x) - u(x) - \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 - \frac{1}{6}u'''(\xi)(\delta x)^3 = u'(x)\delta x$$

Diskretisierungsfehler

- Taylor-Formel: (Entwicklungspunkt a)

$$\boxed{u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n}$$

- rechtsseitige Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x+\delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi)(\delta x)^3$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{u(x+\delta x) - u(x)}{\delta x} - O(\delta x)$$

Diskretisierungsfehler

zentrale Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x + \delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi_1)(\delta x)^3 \quad (1)$$

$$u(x - \delta x) = u(x) - u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 - \frac{1}{6}u'''(\xi_2)(\delta x)^3 \quad (2)$$

$(1) - (2)$:

Diskretisierungsfehler

zentrale Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x+\delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi_1)(\delta x)^3 \quad (1)$$

$$u(x-\delta x) = u(x) - u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 - \frac{1}{6}u'''(\xi_2)(\delta x)^3 \quad (2)$$

$(1)-(2)$:

$$u(x+\delta x) - u(x-\delta x) = 2u'(x)\delta x + O((\delta x)^3)$$

Diskretisierungsfehler

zentrale Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x+\delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi_1)(\delta x)^3 \quad (1)$$

$$u(x-\delta x) = u(x) - u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 - \frac{1}{6}u'''(\xi_2)(\delta x)^3 \quad (2)$$

(1) − (2):

$$u(x+\delta x) - u(x-\delta x) = 2u'(x)\delta x + O((\delta x)^3)$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{u(x+\delta x) - u(x-\delta x)}{2\delta x} - O((\delta x)^2)$$

Diskretisierungsfehler

zentrale Differenz: (Entwicklungspunkt x)

$$u(x+\delta x) = u(x) + u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(\xi_1)(\delta x)^3 \quad (1)$$

$$u(x-\delta x) = u(x) - u'(x)\delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2 - \frac{1}{6}u'''(\xi_2)(\delta x)^3 \quad (2)$$

(1) − (2):

$$u(x+\delta x) - u(x-\delta x) = 2u'(x)\delta x + O((\delta x)^3)$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{u(x+\delta x) - u(x-\delta x)}{2\delta x} - O((\delta x)^2)$$

Approximation der 2. Ableitung

$$u(x+\delta x) = u(x)+u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2+\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_3)(\delta x)^4 \quad (3)$$

$$u(x-\delta x) = u(x)-u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2-\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_4)(\delta x)^4 \quad (4)$$

(3) + (4):

Approximation der 2. Ableitung

$$u(x+\delta x) = u(x)+u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2+\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_3)(\delta x)^4 \quad (3)$$

$$u(x-\delta x) = u(x)-u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2-\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_4)(\delta x)^4 \quad (4)$$

(3) + (4):

$$u(x+\delta x)+u(x-\delta x) = 2u(x)+u''(x)(\delta x)^2+O((\delta x)^4)$$

Approximation der 2. Ableitung

$$u(x+\delta x) = u(x)+u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2+\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_3)(\delta x)^4 \quad (3)$$

$$u(x-\delta x) = u(x)-u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2-\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_4)(\delta x)^4 \quad (4)$$

(3) + (4):

$$u(x+\delta x)+u(x-\delta x) = 2u(x)+u''(x)(\delta x)^2+O((\delta x)^4)$$

$$\Rightarrow u''(x) = \frac{u(x+\delta x)-2u(x)+u(x-\delta x)}{(\delta x)^2} - O((\delta x)^2)$$

Approximation der 2. Ableitung

$$u(x+\delta x) = u(x)+u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2+\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_3)(\delta x)^4 \quad (3)$$

$$u(x-\delta x) = u(x)-u'(x)\delta x+\frac{1}{2}u''(x)(\delta x)^2-\frac{1}{6}u'''(x)(\delta x)^3+\frac{1}{24}u^{\mathrm{IV}}(\xi_4)(\delta x)^4 \quad (4)$$

(3) + (4):

$$u(x+\delta x)+u(x-\delta x) = 2u(x)+u''(x)(\delta x)^2+O((\delta x)^4)$$

$$\Rightarrow u''(x) = \frac{u(x+\delta x)-2u(x)+u(x-\delta x)}{(\delta x)^2} - O((\delta x)^2)$$

Approximation der 2. Ableitung

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\left[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\right]_i = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{(\delta x)^2}}$$

Diskretisierung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f}$$

Dirichlet-Randbedingungen:

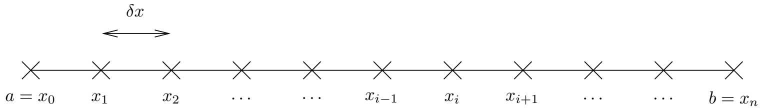
$$u(0) =: u_0; \;\; u(a) =: u_a = u_n$$

$$-\frac{1}{(\delta x)^2}(u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1}))+\frac{k}{2\delta x}(u(x_{i+1})-u(x_{i-1})) = f(x_i)$$

für $i = 1, ..., a - \delta x$

Diskretisierung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

Wir verwenden statt $u(x_i) = u_i$ und $f(x_i) = f_i$

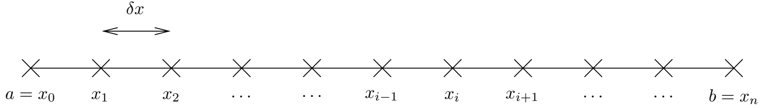


$$
\begin{aligned}
\text{für } i = 1: \quad & -\frac{1}{\delta x^2}(u_2 - 2u_1 + u_0) + \frac{k}{2\delta x}(u_1 - u_0) &= f_1 \\
\text{für } i = 2: \quad & -\frac{1}{\delta x^2}(u_3 - 2u_2 + u_1) + \frac{k}{2\delta x}(u_3 - u_1) &= f_2 \\
\vdots \quad & & \vdots \\
\text{für } i = n-1: \quad & -\frac{1}{\delta x^2}(u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}) + \frac{k}{2\delta x}(u_n - u_{n-2}) &= f_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A\vec{u} = \vec{f}}$$

Diskretisierung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

Wir verwenden statt $u(x_i) = u_i$ und $f(x_i) = f_i$



$$
\begin{array}{rcl}
\text{für } i = 1: & -\frac{1}{\delta x^2}(u_2 - 2u_1 + u_0) + \frac{k}{2\delta x}(u_1 - u_0) & = f_1 \\
\text{für } i = 2: & -\frac{1}{\delta x^2}(u_3 - 2u_2 + u_1) + \frac{k}{2\delta x}(u_3 - u_1) & = f_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\text{für } i = n-1: & -\frac{1}{\delta x^2}(u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}) + \frac{k}{2\delta x}(u_n - u_{n-2}) & = f_{n-1}
\end{array}
$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A\vec{u} = \vec{f}}$$

Diskretisierung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f}$$

Beispiel:

$$u''(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sin \pi x; \quad x \in (0,1); \quad k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x = f; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0$$

Diskretisierung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f}$$

Beispiel:

$$u''(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sin \pi x; \quad x \in (0,1); \quad k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x = f; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0$$

Diskretisierung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
\text{für } i = 1: &\quad \frac{1}{\delta x^2}(u_0 - 2u_1 + u_2) = &\quad f_1 \\
\text{für } i = 2: &\quad \frac{1}{\delta x^2}(u_1 - 2u_2 + u_3) = &\quad f_2 \\
\vdots &\quad &\quad \vdots \\
\text{für } i = n-1: &\quad \frac{1}{\delta x^2}(u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n) = &\quad f_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Diskretisierung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
\text{für } i = 1: \quad & \frac{1}{\delta x^2}(u_0 - 2u_1 + u_2) = & f_1 \\
\text{für } i = 2: \quad & \frac{1}{\delta x^2}(u_1 - 2u_2 + u_3) = & f_2 \\
\vdots \quad & & \vdots \\
\text{für } i = n-1: \quad & \frac{1}{\delta x^2}(u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n) = & f_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Stabilitätsprobleme

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f}$$

- Lösung: 'upwind-Diskretisierung'

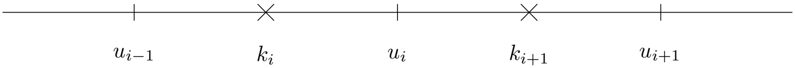
$$\begin{array}{lll} \text{1. Fall} & k < 0 & : \text{rechtsseitige Differenz} \\ \text{2. Fall} & k > 0 & : \text{linksseitige Differenz} \end{array}$$

- Problem: geringere Approximationsgüte
- Kompromiss: Mittelung aus einseitiger und zentraler Differenz

$$\gamma \cdot \text{upwind–Differenz} + (1-\gamma) \cdot \text{zentrale Differenz}; \quad \gamma \in [0,1]$$

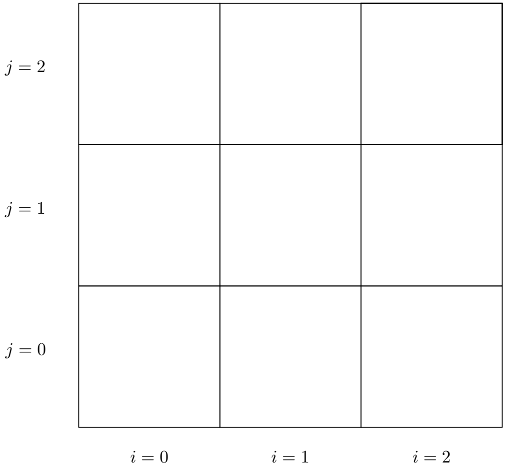
Stabilitätsprobleme

- Alternative zur upwind-Diskretisierung:
  Donor-Cell-Diskretisierung
- Unterschied:



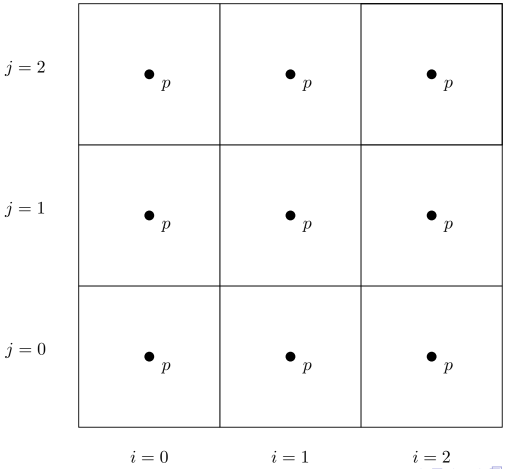
Diskretisierung im Zweidimensionalen

Das Gebiet Ω wird von einem Gitter überdeckt



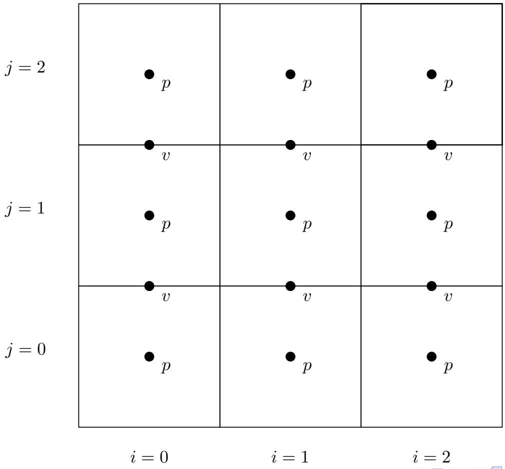
Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Versetztes Gitter (staggered grid):



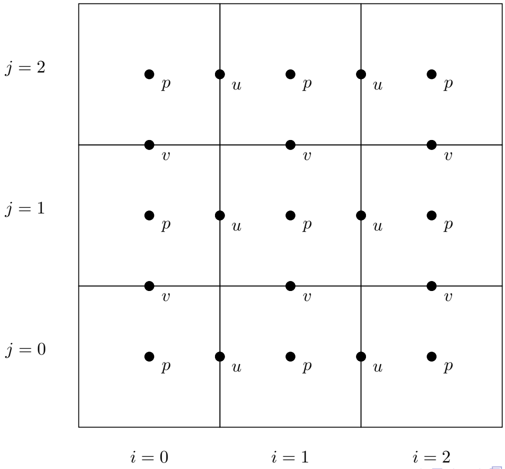
Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Versetztes Gitter (staggered grid):



Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Versetztes Gitter (staggered grid):



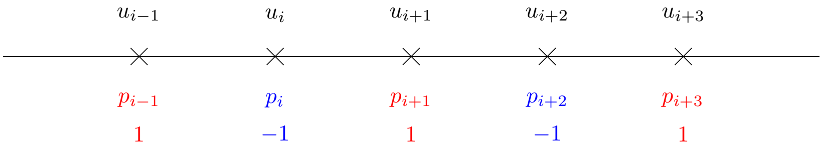
Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Vorteil eines versetzten Gitters:
    - Nicht versetztes Gitter:

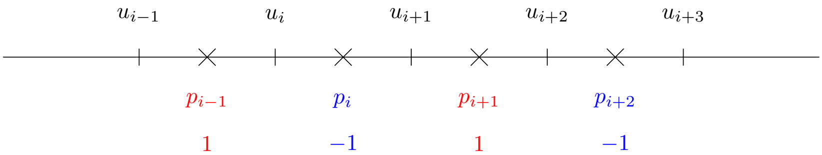
u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
p_{i-1}	p_i	p_{i+1}	p_{i+2}	p_{i+3}
1	-1	1	-1	1

Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Vorteil eines versetzten Gitters:
  - Nicht versetztes Gitter:

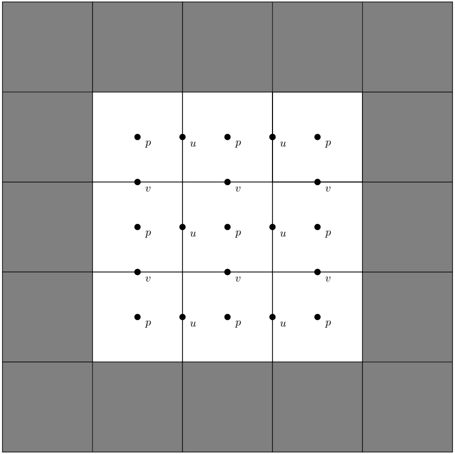


  - Versetztes Gitter:



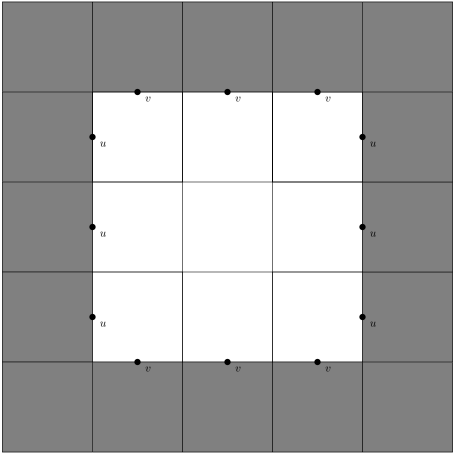
Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Versetztes Gitter mit Randschicht



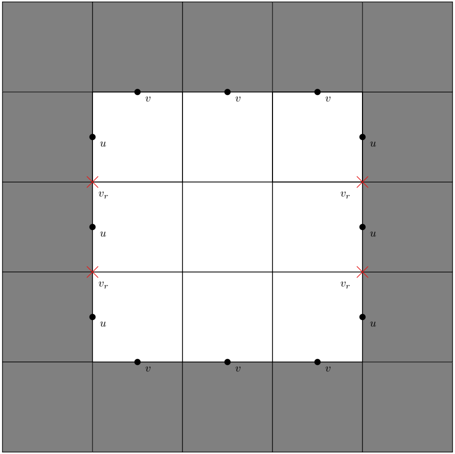
Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Versetztes Gitter mit Randschicht



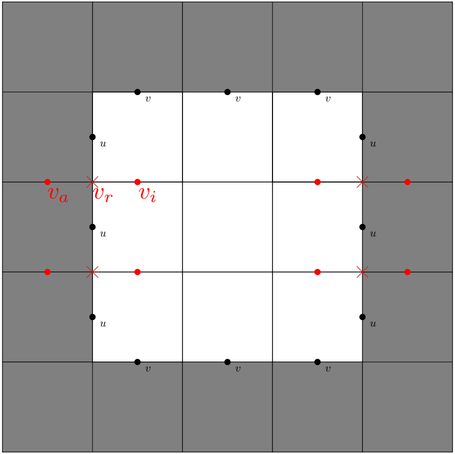
Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

- Versetztes Gitter mit Randschicht



Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

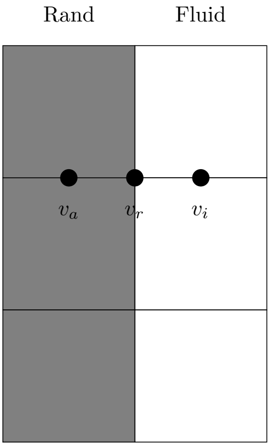
- Versetztes Gitter mit Randschicht



Randbedingungen

- Haftbedingungen

Geschwindigkeit des Fluids am Rand ist 0

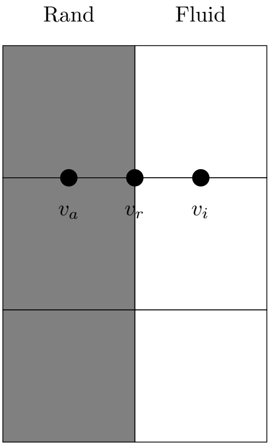


$$v_r := \frac{v_a + v_i}{2} = 0$$

Randbedingungen

- Haftbedingungen

Geschwindigkeit des Fluids am Rand ist 0



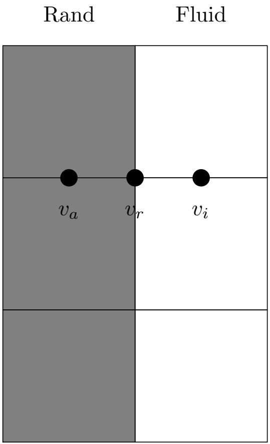
$$v_r := \frac{v_a + v_i}{2} = 0$$

$$\Rightarrow v_a = -v_i$$

Randbedingungen

- Haftbedingungen

Geschwindigkeit des Fluids am Rand ist 0



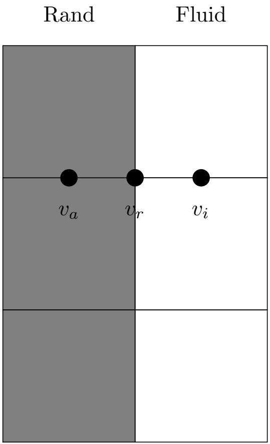
$$v_r := \frac{v_a + v_i}{2} = 0$$

$$\Rightarrow v_a = -v_i$$

Randbedingungen

- Rutschbedingungen

Keine Reibungsverluste am Rand

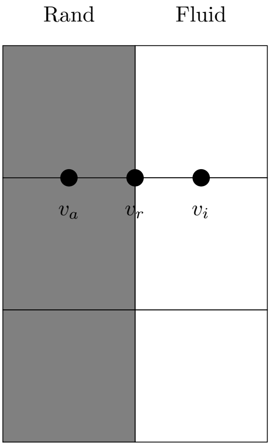


$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{v_i - v_a}{\delta x} = 0$$

Randbedingungen

- Rutschbedingungen

Keine Reibungsverluste am Rand



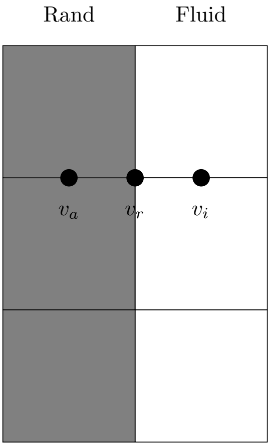
$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{v_i - v_a}{\delta x} = 0$$

$$\Rightarrow v_i = v_a$$

Randbedingungen

- Rutschbedingungen

Keine Reibungsverluste am Rand

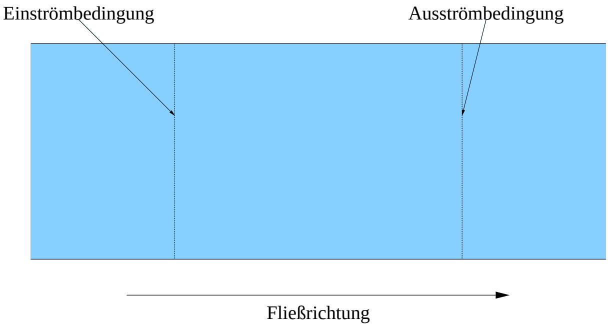


$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{v_i - v_a}{\delta x} = 0$$

$$\Rightarrow v_i = v_a$$

Randbedingungen

- Ausströmbedingungen
- Einströmbedingungen



Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung

- Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\delta x}; \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\delta y}$$

Diskretisierung der Impulsgleichungen

- Diskretisierung der diffusen Terme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} + g_y$$

Laplace Operator:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- Approximation der 2. Ableitung im Zweidimensionalen:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta x^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\delta y^2}$$

Diskretisierung der Impulsgleichungen

- Diskretisierung der Ableitungen des Drucks:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (v^2)}{\partial y} - \frac{\partial (uv)}{\partial x} + g_y$$

- Approximation:

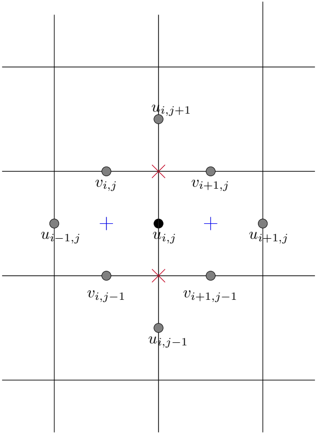
$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x}$$
$$\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y}$$

Diskretisierung der Impulsgleichungen

- Diskretisierung der konvektiven Terme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (v^2)}{\partial y} - \frac{\partial (uv)}{\partial x} + g_y\end{aligned}$$

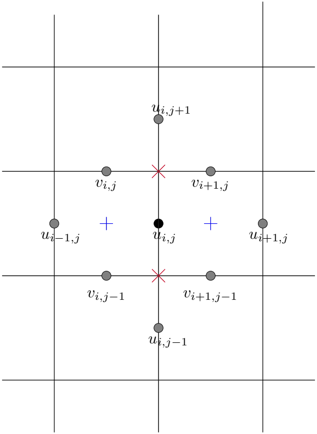
Diskretisierung der Impulsgleichungen



- Approximation:

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta y}\left(\frac{(v_{i,j}+v_{i+1,j})}{2}\frac{(u_{i,j}+u_{i,j+1})}{2} - \frac{(v_{i,j-1}+v_{i+1,j-1})}{2}\frac{u_{i,j-1}+u_{i,j}}{2} \right)$$

Diskretisierung der Impulsgleichungen



- Approximation:

$$\left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta x}\left(\left(\frac{u_{i,j}+u_{i+1,j}}{2}\right)^2 - \left(\frac{u_{i-1,j}+u_{i,j}}{2}\right)^2 \right)$$

Stabilitätsprobleme

- Mittelung ($\gamma \in [0,1]$):

$$\boxed{\gamma \cdot Donor\text{—}Cell - Diskretisierung + (1-\gamma) \cdot zentrale\ \ Differenz}$$

- Wir erhalten:

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta y}\left(\frac{(v_{i,j}+v_{i+1,j})}{2}\frac{(u_{i,j}+u_{i,j+1})}{2} - \frac{(v_{i,j-1}+v_{i+1,j-1})}{2}\frac{(u_{i,j-1}+u_{i,j})}{2}\right)$$

$$+\gamma\frac{1}{\delta y}\left(\frac{|v_{i,j}+v_{i+1,j}|}{2}\frac{(u_{i,j}-u_{i,j+1})}{2} - \frac{|v_{i,j-1}+v_{i+1,j-1}|}{2}\frac{(u_{i,j-1}-u_{i,j})}{2}\right)$$

Diskretisierung der Impulsgleichungen

- Ebenso erhalten wir

$$\left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{1}{\delta x}\left(\left(\frac{u_{i,j}+u_{i+1,j}}{2}\right)^2 - \left(\frac{u_{i-1,j}+u_{i,j}}{2}\right)^2\right)$$

$$+\gamma\frac{1}{\delta x}\left(\frac{\left|u_{i,j}+u_{i+1,j}\right|}{2}\frac{(u_{i,j}-u_{i+1,j})}{2} - \frac{\left|u_{i-1,j}+u_{i,j}\right|}{2}\frac{(u_{i-1,j}-u_{i,j})}{2}\right)$$

$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}\right]; \quad \left[\frac{\partial v^2}{\partial y}\right]$ werden analog diskretisiert

Diskretisierung der Impulsgleichungen

- Diskretisierung der Zeitableitung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (v^2)}{\partial y} - \frac{\partial (uv)}{\partial x} + g_y$$

- Zeitintervall $[0, t_{end}]$ wird in n gleich große Teilintervalle zerlegt
- Approximation:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{(n+1)} = \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\delta t}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]^{(n+1)} = \frac{v^{(n+1)} - v^{(n)}}{\delta t}$$

Die Zeitschleife

$$\boxed{\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{(n+1)} = \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\delta t}}$$

Nach $u^{(n+1)}$ aufgelöst:

$$\Rightarrow u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta t \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{(n+1)}$$

Die Zeitschleife

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Die Zeitschleife

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Der Algorithmus

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta t \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow u^{(n+1)} = \underbrace{u^{(n)} + \delta t \left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x\right]}_{F^{(n)}} - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}$$

Analog erhalten wir:

$$v^{(n+1)} = \underbrace{v^{(n)} + \delta t \left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial (uv)}{\partial x} - \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + g_y\right]}_{G^{(n)}} - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}$$

Der Algorithmus

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta t \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow u^{(n+1)} = \underbrace{u^{(n)} + \delta t \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (uv)}{\partial y} + g_x \right]}_{F^{(n)}} - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}$$

Analog erhalten wir:

$$v^{(n+1)} = \underbrace{v^{(n)} + \delta t \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial (uv)}{\partial x} - \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + g_y \right]}_{G^{(n)}} - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}$$

Die Zeitschleife

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}$$

$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}$$

Die Zeitschleife

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}$$

$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}$$

Die Zeitschleife

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}; \quad v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}$$

In Kontinuitätsgleichung eingesetzt:

$$\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(n+1)}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}\right) = 0$$

Die Poissongleichung für den Druck

$$\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(n+1)}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F^{(n)}-\delta t\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(G^{(n)}-\delta t\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}\right)=0$$

Nach $\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial y^2}$ aufgelöst:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial y^2}}_{\triangle p}=\underbrace{\frac{1}{\delta t}\left(\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial G^{(n)}}{\partial y}\right)}_{f}$$

Poissongleichung:

$$\Delta p = f$$

Die Poissongleichung für den Druck

$$\underbrace{\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial y^2}}_{\triangle p} = \underbrace{\frac{1}{\delta t}\left(\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial y}\right)}_{f}$$

- Randbedingung

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$$

- Problem: keine eindeutige Lösung:

$$p^{(n+1)} + c$$

$\Rightarrow$ zusätzliche Bedingung an den Druck z.B. $\int_\Omega p = 0$

Die Poissongleichung für den Druck

- Die diskrete Poissongleichung für den Druck

$$\frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{\delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}}{\delta y^2} = f$$

$$\text{für } i = 1, \ldots, i_{max};\ j = 1, \ldots, j_{max}$$

$$\Longleftrightarrow A\vec{p} = \vec{f} \qquad \text{(z.B. mit Gauß-Seidel-Verfahren lösen)}$$

Stabilitätsbedingungen

- Fehler durch:
  - Diskretisierung
  - Algorithmus

- Stabilitätsbedingungen an δt

$$\delta t < \frac{Re}{2}\left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2}\right)^{-1}; \qquad \underbrace{\delta t < |u_{max}|\,\delta x; \qquad \delta t < |v_{max}|\,\delta y}_{\text{Courant-Friedrichs-Levi-Bedingungen}}$$

(CFL-Bedingungen)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!