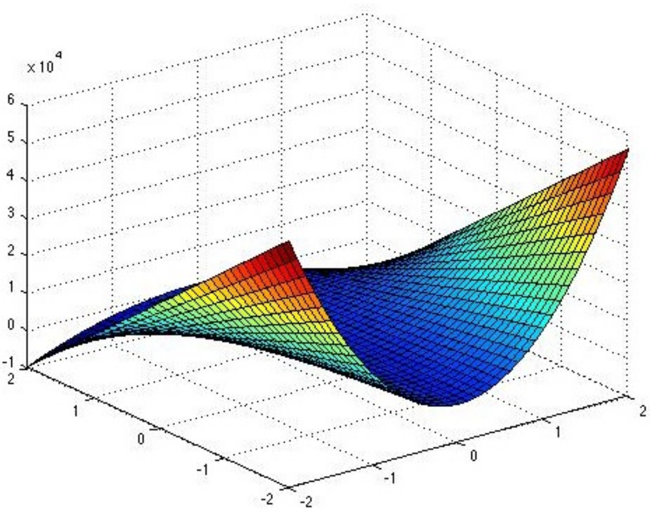


Seminar Numerische Optimierung

Prof. Dr. Karsten Urban/Katharina Becker-Steinberger
Institut für Numerische Mathematik, Universität Ulm
SoSe 2009

Problemstellung: Was ist endlichdimensionale stetige Optimierung?

Problemstellung: Was ist endlichdimensionale stetige Optimierung?

Aufgabenstellung:

- Minimierung einer *stetigen* Zielfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren zulässigen Bereich $X \subset \mathbb{R}^n$

Problemstellung: Was ist endlichdimensionale stetige Optimierung?

Aufgabenstellung:

- Minimierung einer *stetigen* Zielfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren zulässigen Bereich $X \subset \mathbb{R}^n$
- Kurzschreibweise:

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X \tag{1}$$

Problemstellung: Was ist endlichdimensionale stetige Optimierung?

Aufgabenstellung:

- Minimierung einer *stetigen* Zielfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren zulässigen Bereich $X \subset \mathbb{R}^n$
- Kurzschreibweise:

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X \tag{1}$$

Alternativ:

- Maximierungsprobleme der Form:

$$\max g(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X$$

Problemstellung: Was ist endlichdimensionale stetige Optimierung?

Aufgabenstellung:

- Minimierung einer *stetigen* Zielfunktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren zulässigen Bereich $X \subset \mathbb{R}^n$
- Kurzschreibweise:

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X \tag{1}$$

Alternativ:

- Maximierungsprobleme der Form:

$$\max g(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X$$

- Äquivalent zum Minimierungsproblem mit Zielfunktion $f = -g$

Problemstellung: Was ist endlichdimensionale stetige Optimierung?

Aufgabenstellung:

- Minimierung einer *stetigen* Zielfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf dem nichtleeren zulässigen Bereich $X \subset \mathbb{R}^n$
- Kurzschreibweise:

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X \tag{1}$$

Alternativ:

- Maximierungsprobleme der Form:

$$\max g(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X$$

  - Äquivalent zum Minimierungsproblem mit Zielfunktion $f = -g$

$\Longrightarrow$ Betrachtung von Minimierungsproblemen

Klassifikation (endlichdimensionaler stetiger Optimierung)

Klassifikation (endlichdimensionaler stetiger Optimierung)

- Allgemeine Form: Hat das Optimierungsproblem Nebenbedingungen?
  - $X = \mathbb{R}^n$: unrestringiertes Optimierungsproblem
  - $X \neq \mathbb{R}^n$: restringiertes Optimierungsproblem hierbei kann X durch ein System von Gleichungen, Ungleichungen oder beidem gegeben sein:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n;\, h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

Klassifikation (endlichdimensionaler stetiger Optimierung)

- Allgemeine Form: Hat das Optimierungsproblem Nebenbedingungen?
  - $X = \mathbb{R}^n$: unrestringiertes Optimierungsproblem
  - $X \neq \mathbb{R}^n$: restringiertes Optimierungsproblem hierbei kann X durch ein System von Gleichungen, Ungleichungen oder beidem gegeben sein:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n;\, h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

- Algebraische Form des Zielfunktionals und der Nebenbedingungen

Klassifikation (endlichdimensionaler stetiger Optimierung)

- Allgemeine Form: Hat das Optimierungsproblem Nebenbedingungen?
  - $X = \mathbb{R}^n$: unrestringiertes Optimierungsproblem
  - $X \neq \mathbb{R}^n$: restringiertes Optimierungsproblem hierbei kann X durch ein System von Gleichungen, Ungleichungen oder beidem gegeben sein:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n;\, h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

- Algebraische Form des Zielfunktionals und der Nebenbedingungen
- Glattheitseigenschaften
  - $f, g, h \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$: glatte Optimierung
  - sonst: nichtglatte Optimierung

Klassifikation (endlichdimensionaler stetiger Optimierung)

- Allgemeine Form: Hat das Optimierungsproblem Nebenbedingungen?
  - $X = \mathbb{R}^n$: unrestringiertes Optimierungsproblem
  - $X \neq \mathbb{R}^n$: restringiertes Optimierungsproblem hierbei kann X durch ein System von Gleichungen, Ungleichungen oder beidem gegeben sein:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n;\, h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

- Algebraische Form des Zielfunktionals und der Nebenbedingungen
- Glattheitseigenschaften
  - $f, g, h \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$: glatte Optimierung
  - sonst: nichtglatte Optimierung
- Dimension bzw. Besetzungstruktur des Problems

Klassifikation nach algebraischer Form

Klassifikation nach algebraischer Form

- Lineare Optimierung

$$\min c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b, x \geq 0$$

  - mit $A \in \mathbb{R}^{p \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^p$

Klassifikation nach algebraischer Form

- Lineare Optimierung
- Quadratische Optimierung

$$\min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b, x \geq 0$$

  - mit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \in \mathbb{R}^{p \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^p, \gamma \in \mathbb{R}$

Klassifikation nach algebraischer Form

- Lineare Optimierung
- Quadratische Optimierung
- Lineare restringierte Optimierung: f nichtlinear, NBn linear

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b, x \geq 0$$

  - mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{p \times n}, b \in \mathbb{R}^p$

Klassifikation nach algebraischer Form

- Lineare Optimierung
- Quadratische Optimierung
- Lineare restringierte Optimierung
- Konvexe Optimierung: f konvex, h affin-linear, g_i konvex

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad h(x) = 0, g(x) \leq 0$$

  - mit $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex $(i = 1, \ldots, m), A \in \mathbb{R}^{p\times n}, b \in \mathbb{R}^p$

Klassifikation nach algebraischer Form

- Lineare Optimierung
- Quadratische Optimierung
- Lineare restringierte Optimierung
- Konvexe Optimierung
- Nichtlineare Optimierung: f, g, h beliebig nichtlinear

Lokale und globale Lösungen

Ein Vektor bzw. Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt

- *lokales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und $\epsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X \cap B_\epsilon(x^*)$$

mit $B_\epsilon(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ der ϵ-Kugel um x^* und $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ der Euklidischen Norm.

Lokale und globale Lösungen

Ein Vektor bzw. Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt

- *lokales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und $\epsilon > 0$ existiert mit

  $$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X \cap B_\epsilon(x^*)$$

  mit $B_\epsilon(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ der ϵ-Kugel um x^* und $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ der Euklidischen Norm.
- *strikes lokales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und $\epsilon > 0$ existiert mit

  $$f(x) > f(x^*) \quad \forall\, x \in (X \cap B_\epsilon(x^*)) \setminus \{x^*\}$$

Lokale und globale Lösungen

Ein Vektor bzw. Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt

- *lokales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und $\epsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X \cap B_\epsilon(x^*)$$

  mit $B_\epsilon(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n;\, \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ der ϵ-Kugel um x^* und $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ der Euklidischen Norm.

- *globales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X$$

Lokale und globale Lösungen

Ein Vektor bzw. Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt

- *lokales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und $\epsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X \cap B_\epsilon(x^*)$$

  mit $B_\epsilon(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ der ϵ-Kugel um x^* und $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ der Euklidischen Norm.

- *globales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X$$

- *striktes globales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und

$$f(x) > f(x^*) \quad \forall\, x \in X \setminus \{x^*\}$$

Lokale und globale Lösungen

Ein Vektor bzw. Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt

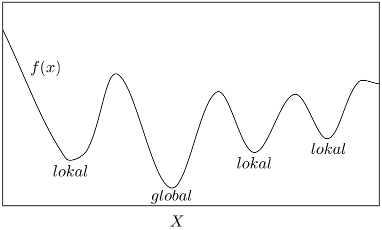
- *lokales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und $\epsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X \cap B_\epsilon(x^*)$$

  mit $B_\epsilon(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ der ϵ-Kugel um x^* und $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ der Euklidischen Norm.

- *globales Minimum*, falls $x^* \in X$ gilt und

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in X$$



Existenz eines globalen Minimums

Satz

Sei die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und es gebe $x_0 \in X$, so dass die Niveaumenge

$$N_f(x_0) = \{x \in X; f(x) \leq f(x_0)\}$$

kompakt ist. Dann besitzt das Problem

$$\min_{x \in X} f(x)$$

ein globales Minimum.

Notwenige und hinreichende Optimalitätskriterien - unrestringierter Fall

Satz

1. *Sei $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $x^* \in U$ ein lokales Minimum von f. Dann ist x^* ein stationärer Punkt, d. h. es gilt*

   $$\nabla f(x^*) = 0.$$

   Ist f zweimal stetig differenzierbar, so ist die Hessematrix $\nabla^2 f(x^*)$ positiv semidefinit.

2. *Ist x^* ein stationärer Punkt der zweimal stetig differenzierbaren Funktion f und die Hessematrix $\nabla^2 f(x^*)$ positiv definit, so ist x^* ein isoliertes lokales Minimum.*

Notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung - restringierter Fall

Annahmen: f, g, h

- stetig differenzierbar
- erfüllen eine Constraint Qualification (CQ) in der Lösung x^*

$\Longrightarrow$ Folgende Optimalitätsbedingung 1. Ordnung gilt für alle Lösungen x^*:

Es existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda^* \in \mathbb{R}^m, \mu^* \in \mathbb{R}^p$, so dass das Tripel (x^*, λ^*, μ^*) das folgende **Karush-Kuhn-Tucker-System** löst:

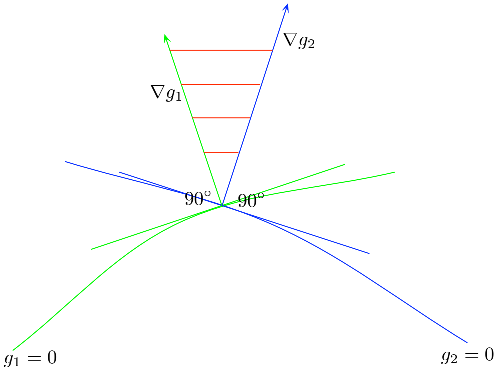
$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + g(x^*)\lambda^* + h(x^*)\mu^* = 0, \\ h(x^*) = 0, \\ g(x^*) \leq 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad {\lambda^*}^T g(x^*) = 0. \end{aligned}$$

mit

- $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \in \mathbb{R}^n$ Gradient von f
- $\nabla g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}, \nabla h(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ transponierte Jacobi-Matrizen von g und h

Visualisierung der Multiplikatorbedingung

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* + h(x^*)\mu^* = 0$$



- Negativer Gradient der Zielfunktion lässt sich als Linearkombination der Jacobi-Matrizen der Nebenbedingungen im KKT-Punkt darstellen (liegt im rot schraffierten Bereich)
- Abstieg ist nur ausserhalb des zulässigen Bereichs möglich

Bemerkung zur globalen Optimierung

Problem:

- Viele Algorithmen suchen stationäre Punkte der Zielfunktion bzw. KKT-Punkte
- Stationarität ist notwendig für lokale Minimalität, aber nicht hinreichend und bedeutet insbesondere nicht notwendig globale Minimalität!
- Eventuell viele lokale Minima
- Algorithmisches Auffinden globaler Minima aufwendig

Bausteine globale Optimierungsalgorithmen:

- Heuristik
- Stochastik
- Deterministik

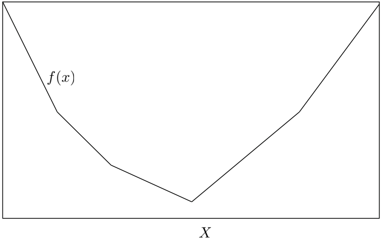
Nichtglatte Optimierung

Aufgabenstellung:

- Minimiere eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen nichtleeren zulässigen Bereich $X \subset \mathbb{R}^n$, d. h.

$$\min_{x \in X} f(x),$$

wobei f lokal Lipschitz-stetig, aber i. a. nicht überall differenzierbar sei.



Idee: Verallgemeinerung

- bekannter Konzepte ($\Longrightarrow$ mengenwertige Analysis)
- bekannter Verfahren (z.B. steilster Abstieg, Newton, etc.)

Nichtglatte Optimierungsprobleme...

...entstehen durch:

- Aufgabenstellung/Funktionsformulierung
  - l_1-, l_∞-Normen, Chebychev Abständen, Maximum einer konvexen Funktion...
- mathematische Transformationen
  - Reformulierung restringierter Optimierungsprobleme in unrestringierte via exakter Penalty-Funktionen
  - Dekomposition in ein master und Teilprobleme (Lagrange Relaxation, Benders Dekomposition, Danzig-Wolfe Dekomposition)

...können z. B. gelöst werden durch:

- Subgradienten Methoden
- Abstiebsmethoden mit ϵ-Subdifferential
- Schnittebenen-Verfahren
  - Kelley's klassisches Schnittebenen-Verfahren
  - Analytic Center Cutting Plane Method
  - Bundle Methoden

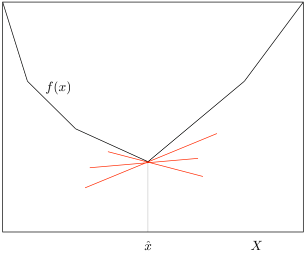
Konvexe Funktionen und Subdifferentiale

Konvexe Funktionen und Subdifferentiale

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ konvex auf der konvexen offenen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$.

- Der Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ heißt *Subgradient* von f im Punkt $x \in X$, wenn gilt

$$f(y) - f(x) \geq g^T(y - x) \quad \forall\, y \in X.$$

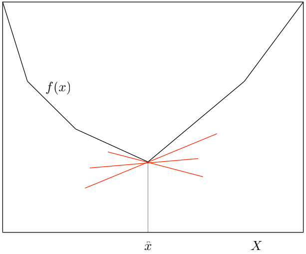


Konvexe Funktionen und Subdifferentiale

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ konvex auf der konvexen offenen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$.

- Der Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ heißt *Subgradient* von f im Punkt $x \in X$, wenn gilt

$$f(y) - f(x) \geq g^T(y - x) \quad \forall\, y \in X.$$

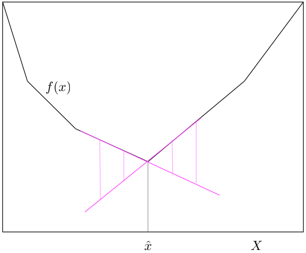


- Die Menge $\partial f(x) \subset \mathbb{R}^n$,

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n; g \text{ ist Subgradient von } f \text{ in } x\}$$

heißt *Subdifferential* von f im Punkt x. Dies ist eine mengenwertige Abbildung von X in die Potenzmenge des $\mathbb{R}^n$. Man schreibt hierfür

$$\partial f : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n.$$



Variationsungleichungen (kurz: $VI(F, X)$)

- Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x \in X, \quad F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$$

für $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung $U \in \mathbb{R}^n$ des (nichtleeren, abgeschlossenen) zulässigen Bereichs $X \in \mathbb{R}^n$.

Variationsungleichungen (kurz: $VI(F, X)$)

- Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x \in X, \quad F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$$

für $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung $U \in \mathbb{R}^n$ des (nichtleeren, abgeschlossenen) zulässigen Bereichs $X \in \mathbb{R}^n$.

- Anschaulich: Winkelbedingung

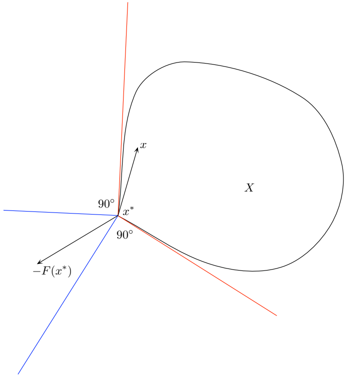
$$\begin{aligned} & \cos\angle(F(x^*), x - x^*) = \frac{F(x^*)^T(x - x^*)}{\|F(x^*)\|\|x - x^*\|} \geq 0 \\ \iff \quad & \angle(F(x^*), x - x^*) \leq 90^\circ \\ \iff \quad & \angle(-F(x^*), x - x^*) \geq 90^\circ \end{aligned}$$

Variationsungleichungen (kurz: $VI(F, X)$)

- Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x \in X, \quad F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$$

für $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung $U \in \mathbb{R}^n$ des (nichtleeren, abgeschlossenen) zulässigen Bereichs $X \in \mathbb{R}^n$.



Seminarthemen I

Numerische Optimierung und Anwendungen

- Quasi-Newton-Verfahren
- Klassische Verfahren der nichtlinearen restringierten Optimierung: Penalty-, Barriere- und Augmented-Lagrange-Verfahren
- Trust-Region SQP-Verfahren
- Themen zu Innere-Punkte Verfahren
    - Innere-Punkte-Verfahren und die Optimierungssoftware Ipopt (KBS)
    - Fachwerk/Material-Optimierung via Innere Punkte Verfahren
- Data Mining via Support Vector Machines

Seminarthemen II

Nichtglatte Optimierung/Variationsungleichungen

- Grundlegende Methoden für nichtglatte konvexe Probleme: Subgradienten-/ Schnittebenenmethode
- ACCP-Methoden angewandt auf Mehrgüterfluss-Probleme (z. B. Verkehrsstromverteilung)
  - ACCPM with nonlinear constraint and an active set strategy to solve nonlinear multicommodity flow problems
  - An effective method to compute traffic assignment problems with elastic demands
- ϵ-Subdifferentiale und Bundle-Methoden
- Verteilte Optimierung via Dekomposition
  - Distributed Estimation via Dual Decompsition
  - Parallel implementation of a central decomposition method for solving large-scale planning problems
- Robustes Gradient Sampling für nichtglatte nichtkonvexe Optimierung
- Variationsungleichungen am Beispiel von Nash-Gleichgewichten sowie Fixpunkt- und Josephy-Newton-Verfahren

Seminarthemen III

Globale Optimierung

- Tunneling Algorithmus (Guntram Seitz)
- Evolutionäre Algorithmen:
  - Überblick über Evolutions Stategien (ES)
  - Destochastisiertes ES (CMA-ES)
  - Genetische Algorithmen
- Controlled Random Search
- Deterministische globale Optimierung:
  - Piecewise-Linear Underestimation
  - Convex Global Underestimation
- Vergleich dreier globaler Optimierungstechniken am Beispiel von zivilen Hochgeschwindigkeitstransportsystemen

Nichtlineare Optimierung

Quasi-Newton-Methoden (Nocadal/Wright 2000, S.192-219, 222–226, Ulbrich 2003, S.57-64

- Themenbereich: Nichtlineare Gleichungen, Nichtlineare Optimierung
- Idee: Iterative Approximation der Jacobi-Matrix in Quasi-Newton-Gleichung
- Aufdatierungsformeln:
  - BFGS
  - SR1
  - Broyden Klasse
  - Large-Scale Quasi-Newton: Limited-Memory BFGS
- Zusammenhang zum CG-Verfahren

Klassische Verfahren der nichtlinearen Optimierung: Penalty und Barriere-Verfahren sowie Augmended-Lagrange-Verfahren (Ulbrich S. 90-110)

- Themenbereich: Nichtlineare restringierte Optimierung
- Verfahren überführen restringierte Optimierungsprobleme in Folgen von unrestringierten Teilproblemen. Teilprobleme müssen dann mit externen Lösern gelöst werden.
- **Penalty-Verfahren:**
  - Idee: Hinzunahme von gewichteten Straftermen (engl. penalty = Strafe) zur Zielfunktion ausserhalb des zulässigen Bereichs
  - Problem: Je größer der Penalty-Parameter (das Gewicht), desto genauer ist zwar die Lösung, aber desto schwieriger auch die numerische Behandlung
- **Barriere-Verfahren:**
  - Idee: Barriere innerhalb des zulässigen Bereichs, bestraft das zu Nahe kommen an den Rand des zulässigen Bereichs
- **Augmended-Lagrange-Verfahren (Penalty-Multiplier-Methode):**
  - Weiterentwicklung des quadratischen Penalty-Verfahrens
  - Vorteil: Penalty-Parameter muss nicht gegen unendlich streben, um globale Konvergenz zu erhalten

Innere-Punkte Verfahren und Ipopt

Analysis of Inexact Trust-Region SQP Algorithms (Heinkenschloss/Vicente 2002, Nocedal/Wright 2000, S. 553-563)

- Verfahren erlaubt inexakte Problem Information (z. B. durch Approximation der ersten Ableitung)
- Global konvergent

Data Mining via Support Vector Machines (Mangasarian 2001)

- Klassifizierung von Daten
- Idee: aus statistischer Lerntheorie, Trennung der Eingabe einer gegebenen Mustermenge durch eine Hyperebene
- Anwendungen: Spam-Filter, Handschriften-Erkennung, Identifikation von Tumormerkmalen
- Überblick:
  - verallgemeinerte SVM
  - glatte SVM (Lösbar mit schnellem Newton-Armijo-Algorithmus)
  - Lagrange SVM
  - reduzierte SVM

Nichtglatte Optimierung

Grundlegende Methoden für nichtglatte konvexe Probleme: Subgradienten-/Schnittebenenmethode (Geiger/Kanzow 2000, S. 314-348, 365-374, Ulbrich, 2004, S. 36-47)

- Themenbereich: Nichtglatte konvexe Optimierung
- Theoretische Grundlagen:
  - Lagrange-Dualität
  - Konvexes Subdifferential
- **Subgradienten-Verfahren**
- (Kellys klassisches) **Schnittebenen-Verfahren**

Analytic Center Cutting Plane Method (ACCPM)

- Themenbereich: Konvexe nichtglatte Optimierung
- **ACCPM with nonlinear constraint and an active set strategy to solve nonlinear multicommodity flow prpblems (Babonneau/Vial 2005)**
  - Modifiziertes ACCPM für sehr gro§e nichtlineare Mehrgüter-Fluss-Probleme mit NBn
- **An effective method to compute traffic assignment problems with elastic demands (Babonneau/Vial 2007)**
  - Konvexes Mehrgüterfluss-Problem
  - Basiert auf Lagrange Relaxion

ϵ-Subdifferential und Bundle-Verfahren (Geiger/Kanzow 2000, S. 385-401, Ulbrich, 2004 S. 47-63)

- Themenbereich: Nichtglatte Optimierung
- Konzept und Eigenschaften des ϵ-Subdifferentials
- Bundle-Verfahren: Zwei duale Sichtweisen (regularisiertes Schnittebenen-Verfahren/Innere Approximation des ε-Subdifferentials)
- Globale Konvergenz

Verteilte Optimierung via dualer Dekomposition (Bonnans/Gilbert/Lemaréchet/Sagastizábal 2003, S. 137-148, Samar/Boyd/Gorinevsky 2007)

- Themenbereich: Nichtglatte Optimierung, hochdimensionale oder komplexe Probleme
- Idee: Aufteilen, d. h. Lösen einer Folge von reduziert-dimensionalen oder einfacheren *lokalen* Problemen, verbunden bzw. koordiniert durch ein *master* Programm.
- **Samar/Boyd/Gorinevsky 2007**:
  - Anwendung: Netztwerk komplexer Sensorteilsysteme
  - Sensorteilsysteme lösen lokale Maximum-Likelihood Abschätzungsprobleme (Maximierung strikt konkaver log-Likelihood-Funktionen mit konvexen NBn)
  - Interaktion der Teilsysteme durch konvexe Kopplungsnebenbedingungen (*consistency constraints*)
  - Seberabel bis auf consistency constraints $\Longrightarrow$ duale Dekomposition
  - Unabhängige Optimierung konkaver Teilsysteme
  - Lösungsalgorithmus für das duale master Problem: projiziertes Subgradientenverfahren

Alternative Verteilte Optimierung: Parallel implementation of a central decomposition method for solving large-scale planning problems (Bonnans/Gilbert/Lemaréchet/Sagastizábal 2003, S. 137-148, Gondzio/Sarkissian/Vial 1999)

- Lösungsalgorithmus für das duale master Problem: ACCPM

A Robust Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth, Nonconvex Optimization (Burke/Lewis/Overton 2003)

- Lokale Minimierung nichtglatter (sogar nicht L-stetiger), nichtkonvexer Funktionen basiert auf Gradient Sampling
- Idee des Gradient Sampling:
  - Abstiegsrichtung: Auswertung des Gradienten in gegenwärtiger Iterierter und zusätzlichen Nachbarpunkten, Vektor aus der konvexe Hülle dieser Gradienten mit kleinster Norm
  - Schrittweite: Art Armijo-Regel für nichtglatte Probleme
  - Stabilisierung: Sampling-Radius für die Sample-Gradienten (praktisch: sukzessives Verkleinern)
- Bestimmung von Clark-ϵ-stationären Punkten
- Konvergenzresultate (ohne Beweise!)
- Numerische Resultate für diverse Beispiele, z. B.:
  - Chebyshev Approximation
  - Minimierung des größten Eigenwertes von Hadamard Matrixprodukten (komponentenweise)

Variationsungleichungen am Beispiel von Nash-Gleichgewichten sowie Fixpunkt- und Josephy-Newton-Verfahren (Ulbrich 2004, S. 95-105, Geiger/Kanzow 2000, S. 428-457, Outrata/Kočvara/Zowe 1998, S. 226-235)

- Charakterisierung von Nash-Gleichgewichten durch Variationsungleichungen
- Fixpunkt-Verfahren
- Josephy-Newton-Verfahren
- Globalisierung des Josephy-Newton-Verfahrens mittels Gap-Funktionen

Globale Optimierung

Tunneling Algorithmus zur globalen Optimierung (Levy/Montalvo 1985)

- Heuristisches Verfahren zur globalen Optimierung
- Idee: Modifikation des Zielfunktionals

A Survey of Evolution Strategies (Bäck/Hoffmeister/Schwefel)

- Themenbereich: stochastische globale Optimierung, Schwarmoptimierung
- Übersicht:
  - $(1+1)$-ES (ein Elter, ein Nachkomme durch Dublikation und anschließende normalverteilte Mutation mit Varianz σ, Selektion „survival of the fittest“ bei den Nachkommen, externe deterministische Heuristik zur Anpassung der Mutationsschrittweite σ, probalistic gradient search technique, selektiert Schritte die in Gradientenrichtung liegen)
  - $(\mu+1)$-ES ($\mu > 1$ Eltern, ein Nachkomme durch diskrete Rekombination, d. h. gleichwahrscheinliche Dublikation einer der Eltern, Rest wie bei $(1+1)$-ES)
  - $(\mu+\nu)$-ES (μ Eltern, ν Nachkommen, Selektion der Eltern und der Kinder zu neuer Elterngeneration, theoretisch unendliches Leben, Elite-Selektion birgt Gefahr in lokalen Minima zu stagnieren)
  - (μ, λ)-ES (Lebenszeit jedes Indiviums auf eine Generation begrenzt, σ interner Strategieparameter, Teil der genetischen Information und unterliegt ebenfalls Rekombination u. Mutation)

CMA (Covariance Matrix Adaption)-Evolution Strategy (Hansen)

- Evolutionärer Algorithmus für schwierige nichtlineare nichtkonvexe Optimierungsprobleme
- Anwendung:
  - falls ableitungsbasierte Methoden wie Quasi-Newton BFGS fehlschlagen (z.B. wg. vieler lokaler Minima), sonst sind diese schneller
  - 3-100 Variablen
- Entstochastisiertes Verfahren zur Adaption der Kovarianzmatrix der Gausschen Mutationsverteilung.
  - Verfahren zweiter Ordnung
  - Kovarianzmatrix beschreibt paarweise Abhängigkeit zwischen Variablen
  - Analog zum BFGS wird eine positiv definite Matrix in einem iterativen Prozess approximiert

Genetic Algorithms: Concepts and Applications (Man/Tang/Kwong 1996)

- Themenereich: stochastische globale Optimierung, Schwarmalgorithmen
- Unterschiede zu ES:
  - Individuen als binäre Vektoren
  - Selektion „survival of the fittest“ bereits bei der Elterngeneration
  - Kreuzung der Chromosome an einem Punkt und anschließende Mutation

Varianten des Controlled Random Search (Price 1976, Ali/Törn/Vitanen 1997)

- Themenbereich: stochastische globale Optimierung
- Direktes Verfahren (d. h. nur Zielfunktionsauswertungen an ausgewählten Punkten), rein heuristisch
- **A controlled random search procedure for global optimization**: original CRS, CRS1
- **A numerical comparison of some modified Controlled Random Search Algorithms**: Vergleich der neuen Version CRS6 mit den anderen CRS-Versionen

Global Minimization via Piecewise-Linear Underestimation (Mangasarian/Rosen/Thompson, 2004)

- Themenbereich: deterministische globale Optimierung
- Reformulierung des konkaves Minimierungsproblem via nichtlinearer Störungstheorie für lineare Programme als konkaves Minimierungsproblem über einem Polyeder (Mangasarian/Meyer, 1979)
- Stc̈kweiser linearer Approximation $\Longrightarrow$ nichtglattes approximiertes Optimierungsproblem
- Lösungsalgorithmus: Frank-Wolf Algorithmus

Convex Global Underestimation for Molecular Structure Prediction (Phillips/Rosen/Dill, 2001)

- Themenbereich: deterministische globale Optimierung mit biologischer Anwendung
- Verfahren im Bereich biologischer Anwendungen Genetischen Algorithmen, Simulated Annealing etc, deutlich überlegen

A Comparison of Global Optimization Methods for Design of a High-speed Civil Transport (Cox/Haftka/Baker/Grossman/Manson/Watson 2001)

- Hochgeschwindigkeitstransport als großes Anwendungsbeispiel mit 26 Design Variablen und 68 NBn
- $\Longrightarrow$ nichtkonvexe zulässige Menge, viele lokale Minima
- Vergleich dreier globaler Optimierungstechniken
  - Multistart lokale Optimierung mit SQP
  - Multistart lokale Optimierung mit Syman's Dynamic Search Methode
  - Jones DIRECT globaler Optimierungsalgorithmus