Prof. Dr. Karsten Urban
Timo Tonn

WS 2009/2010
Letztes Blatt
04.02.2010

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Empirical Interpolation Method III, Adjungierte Gleichung

Wir betrachten folgendes Problem aus Barrault et al.:
Für $\mu \in \mathcal{D} := [0,1]^2$ bestimme $u(\mu) \in X := H_0^1(\Omega)$, $\Omega := (0,1)^2$ mit

$$a(u(\mu), v; \mu) \quad = \quad f(v;\mu), \quad v \in X, \tag{1}$$

mit

$$a(w,v;\mu) \quad := \quad \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v + \int_\Omega g(\cdot;\mu) wv, \tag{2}$$

$$f(v;\mu) \quad := \quad \int_\Omega g(\cdot;\mu) v, \tag{3}$$

wobei

$$g(x;\mu) \quad := \quad ((x_1 + 10^{-2\mu_1})^2 + (x_2 + 10^{-2\mu_2})^2)^{-1/2}.$$

Ferner sei $(w,v)_X := \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v$ und $s(\mu) := l(u(\mu))$, $l(v) := \int_\Omega v$.

Auf dem letzten Blatt haben wir die *EIM* benutzt, um (1) wie folgt affin zu approximieren: Bestimme $u^M(\mu) \in X$ mit

$$a^M(u^M(\mu), v; \mu) \quad = \quad f^M(v;\mu), \quad v \in X \tag{4}$$

wobei

$$a^M(w,v;\mu) \quad := \quad \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v + \sum_{m=1}^M \vartheta_m(\mu) \int_\Omega q_m(x) wv, \tag{5}$$

$$f^M(v;\mu) \quad := \quad \sum_{m=1}^M \vartheta_m(\mu) \int_\Omega q_m(x) v. \tag{6}$$

Heute benutzen wir die RBM zur Approximation von (4). Dazu sei wie üblich $S^N := \{\mu_1, \dots, \mu_N\}$ und $W^N := \text{span}\{\xi_n := u(\mu_n), 1 \le n \le N\}$. Galerkin approximation liefert: Bestimme $u^{M,N}(\mu) \in W^N$ mit

$$a^M(u^{M,N}(\mu), v; \mu) \quad = \quad f^M(v;\mu), \quad v \in W^N. \tag{7}$$

Zur Verbesserung der Approximation des Outputs $s^{M,N}(\mu) := \ell(u^{M,N}(\mu))$ benutzen wir die adjungierte Gleichung: Bestimme $\psi(\mu) \in X$ mit

$$a(v, \psi(\mu); \mu) \quad = \quad -\ell(v), \quad v \in X. \tag{8}$$

Für die RB-Approximation der adjungierten Gleichung sei $\tilde{S}^{\tilde{N}} := \{\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_{\tilde{N}}\}$ und $\tilde{W}^{\tilde{N}} := \text{span}\{\tilde{\xi}_n := \psi(\tilde{\mu}_n), 1 \leq n \leq \tilde{N}\}$ und damit: Bestimme $\psi^{M,\tilde{N}}(\mu) \in \tilde{W}^{\tilde{N}}$ mit

$$a^M(v, \psi^{M,\tilde{N}}(\mu); \mu) \quad = \quad -\ell(v), \quad v \in \tilde{W}^{\tilde{N}}. \tag{9}$$

Mit Hilfe dieser Lösung definieren wir uns nun eine verbesserte Approximation für $s(\mu)$:

$$s^{M,N,\tilde{N}}(\mu) \quad := \quad \ell\left(u^{M,N}(\mu)\right) - f^M\left(\psi^{M,\tilde{N}}(\mu); \mu\right) + a^M\left(u^{M,N}(\mu), \psi^{M,\tilde{N}}(\mu); \mu\right). \tag{10}$$

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie auf einer Testmenge Ξ_{test} die maximalen Fehler von $\|u(\mu) - u^{M,N}(\mu)\|_X$ ($|\psi(\mu) - \psi^{M,\tilde{N}}(\mu)\|_X$) für $1 \leq M \leq M_{max}$, $1 \leq N \leq N_{max}$ ($1 \leq \tilde{N} \leq \tilde{N}_{max}$).
Untersuchen Sie ferner die minimalen und maximalen Effektivitäten. Die dazu benötigten Fehlerschätzer $\Delta^{M,N}(\mu)$ ($\tilde{\Delta}^{M,\tilde{N}}(\mu)$) sind analog zur Vorlesung definiert und bereits implementiert.

Aufgabe 2:
Untersuchen Sie auf einer Testmenge Ξ_{test} den maximalen Fehler von $|s(\mu) - s^{M_{max},N,\tilde{N}}(\mu)|$ für $1 \leq N \leq N_{max}$, $0 \leq \tilde{N} \leq \tilde{N}_{max}$, wobei $s^{M,N,0}(\mu) := s^{M,N}(\mu)$. Was stellen Sie fest? Was folgt daraus für die benötigte Genauigkeit der empirischen Interpolation in (7), (9) und (10)?