Prof. Dr. Karsten Urban
Timo Tonn

WS 2009/2010
Blatt 9
28.01.2010

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Empirical Interpolation Method (EIM) II

Wir betrachten folgendes Problem aus Barrault et al.:
Für $\mu \in \mathcal{D} := [0,1]^2$ bestimme $u(\mu) \in X := H_0^1(\Omega)$, $\Omega := (0,1)^2$ mit

$$a(u(\mu), v; \mu) \quad = \quad f(v; \mu), \quad v \in X, \tag{1}$$

mit

$$a(w, v; \mu) \quad := \quad \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v + \int_\Omega g(\cdot; \mu) w v, \tag{2}$$

$$f(v; \mu) \quad := \quad \int_\Omega g(\cdot; \mu) v, \tag{3}$$

wobei

$$g(x; \mu) \quad := \quad ((x_1 + 10^{-2\mu_1})^2 + (x_2 + 10^{-2\mu_2})^2)^{-1/2}.$$

Ferner sei $(w, v)_X := \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v$ und $s(\mu) := l(u(\mu))$, $l(v) := \int_\Omega v$.

Auf dem letzten Blatt haben wir die *EIM* benutzt, um die nicht-affine Koeffizientenfunktion $g(\cdot; \mu)$ mittls

$$g^M(x; \mu) \quad := \quad \sum_{m=1}^{M} \vartheta_m(\mu) q_m(x), \quad 1 \leq M \leq M_{max},$$

zu approximieren, wobei die Koeffizienten $\vartheta_m(\mu)$, $1 \leq m \leq M$, folgendes LGS lösen:

$$g^M(t_i; \mu) = \sum_{m=1}^{M} \vartheta_m(\mu) q_m(t_i) = g(t_i; \mu), \quad 1 \leq i \leq M.$$

Für den Fehler

$$\varepsilon^M(\mu) \quad := \quad \|g(\cdot; \mu) - g^M(\cdot; \mu)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

gilt unter der Annahne $g(\cdot; \mu) \in W_g^{M+1}$:

$$\varepsilon^M(\mu) \quad = \quad \hat{\varepsilon}^M(\mu) := |g(t_{M+1}; \mu) - g^M(t_{M+1}; \mu)|.$$

Aufgabe 1:
Vervollständigen Sie die Funktion `getCoeffsEmpInt(mu1,mu2,M)`, welche die Koeffizienten $\vartheta_m(\mu)$, $1 \leq m \leq M$, sowie den Fehlerschätzer $\hat{\varepsilon}^M(\mu)$ berechnet.
Untersuchen Sie die Effizienz des Fehlerschätzers, d.h.

$$\eta^M(\mu) \quad := \quad \frac{\hat{\varepsilon}^M(\mu)}{\varepsilon^M(\mu)}.$$

Vergleichen Sie auch Tabelle 1 in o.g. Veröffentlichung. $\square$

Ersetzen wir nun in (2) und (3) $g(\cdot;\mu)$ durch $g^M(\cdot;\mu)$, d.h.

$$\begin{aligned} a^M(w,v;\mu) &:= \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v + \int_\Omega g^M(\cdot;\mu) wv, \\ f^M(v;\mu) &:= \int_\Omega g^M(\cdot;\mu) v, \end{aligned}$$

können wir (1) wie folgt approximieren:
Für $\mu \in \mathcal{D}$ bestimme $u^M(\mu) \in X$ mit

$$a^M(u^M(\mu), v; \mu) = f^M(v;\mu), \quad v \in X. \tag{4}$$

Diese Problem, kann nun wie üblich affin zerlegt werden, d.h.

$$\begin{aligned} a^M(w,v;\mu) &:= \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v + \sum_{m=1}^{M} \vartheta_m(\mu) \int_\Omega q_m(x) wv, \\ f^M(v;\mu) &:= \sum_{m=1}^{M} \vartheta_m(\mu) \int_\Omega q_m(x) v. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Ergänzen Sie die Funktion `g`, so dass für $m > 0$ beim Aufruf von `g(x1,x2,[],[],m)` die Basisfunktion $q_m(x)$ zurück gegeben wird.
Untersuchen Sie anschließend den Fehler

$$\|u(\mu) - u^M(\mu)\|_X$$

in Abhängigkeit von M. $\square$