Dr. Pascal Heider
Alexander Stippler
Timo Tonn

WS 2009/2010
Blatt 9
21.12.2009

WiMa-Praktikum II (Numerik)

1. **Charakteristisches Polynom** **5 Punkte**
   Sei
   $$M(a) = \begin{pmatrix} -6 & 28 & 21 \\ 4 & -15 & -12 \\ -8 & a & 25 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie für jeden Wert a aus der Menge $\{32, 31.9, 31.8, 32.1, 32.2\}$ das charakteristische Polynom $p_a(\lambda) = \det(M(a) - \lambda \mathrm{I})$ und die Eigenwerte von $M(a)$. Plotten Sie $p_a(\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 3$, für alle Werte a in ein Schaubild und beschreiben Sie wie die Graphen die Veränderung der Eigenwerte zeigen, wenn a verändert wird. Zur Berechnung von $p_a(\lambda)$ verwenden Sie den Befehl `poly`.

2. **Matrizenpolynome, Satz von Cayley-Hamilton** **5 Punkte**
   Potenzen von (n, n)-Matrizen sind wieder (n, n)-Matrizen, ebenso alle Linearkombinationen von (n, n)-Matrizen. Wenn also in ein Polynom $p(x)$ für x eine (n, n)-Matrix eingesetzt wird, ist auch $p(x)$ eine (n, n)-Matrix.

   Beispiel: Ist
   $$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } p(x) = x^2 - 2x + 3,$$
   so ist
   $$p(M) = M^2 - 2M + 3\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

   (a) Der Satz von Cayley-Hamilton sagt:

   Ist M eine quadratische Matrix mit dem charakteristischen Polynom $c(x)$, so gilt: $c(M) = 0$.

   Erzeugen Sie eine $(4, 4)$-Zufallsmatrix M bestimmen Sie ihr charakteristisches Polynom und verifizieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton. (Um ein gegebenes Polynom mit einer Matrix als Argument auszuwerten benutze man den Befehl `polyvalm`. Wo ist der Unterschied zu `polyval`?).

   (b) Wenn $c(x)$ das charakteristische Polynom einer (n, n)-Matrix M und $p(x)$ ein beliebiges Polynom ist, so lässt sich $p(x)$ durch $c(x)$ mit Rest dividieren, also in der Form
   $$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$
   darstellen. Für $x = M$ ausgewertet ergibt dies
   $$p(M) = q(M)c(M) + r(M).$$

Weil nach dem Satz von Cayley-Hamilton das charakteristische Polynom $c(M)$ verschwindet, folgt

$$p(M) = r(M).$$

$r(x)$ heißt Ersatzpolynom von $p(x)$; sein Grad ist kleiner als n.

Bestimmen Sie für eine zufällig erzeugte $(4,4)$-Matrix M die Potenz M^{10} auf zwei Arten:

- mit der Anweisung `M^10` und
- indem Sie das Ersatzpolynom von $p(x) = x^{10}$ an der Stelle M auswerten; beachten Sie, dass $r(x)$ einen Grad kleiner als 4 hat.

3. **Approximation von Messpunkten durch Geraden** **10 Punkte**
Wie müssen die Parameter m und q der linearen Funktionen $p : x \mapsto mx + q$ gewählt werden, wenn ihr Graph der Punktfolge $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, …, $P_n = (x_n, y_n)$ "möglichst gut" angepasst werden soll?

Wählen Sie für die folgenden Teilaufgaben (a), (b), (c) die drei Punkte $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (2,3)$ und $P_3 = (5,3)$ und bestimmen Sie die optimalen Werte von m und q, so dass

(a) die Summe der Quadrate der Ordinatendifferenzen $(mx_i + q) - y_i$ der Punkte P_i minmal ist,

(b) der Betrag der maximalen Ordinatendifferenzen minimal wird,

(c) die Summe der Quadrate der senkrecht zur Geraden gemessenen Abstände der Punkte minimal ist.

Stellen Sie die Punkte und die drei berechneten Geraden graphisch dar.

(d) Die MATLAB-Anweisungen

```
n=10;
x=(0:n-1)+0.6*(rand(1,n)-0.5);
y=2+0.5*(0:n-1)+0.6*(rand(1,n)-0.5);
```

definieren 10 Punkte in der xy-Ebene. Bestimmen Sie die drei zugehörigen optimalen Geraden.

Hinweis: Während die Teilaufgabe (a) mit einem einzigen MATLAB-Befehl gelöst werden kann, sind die Lösungen der Teilaufgaben (b) und (c) aufwendiger. Definieren Sie sich hier eine passende Funktion f und benutzen Sie anschließend den Befehl `fminsearch`.

Der Abstand eines Punktes $P = (u, v)$ zur Geraden mit der Koordinatengleichung $y = mx + q$ ist

$$d = \frac{mu + q - v}{\sqrt{1 + m^2}}.$$