L. Tomm Blatt 1

Übungen zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

(Abgabe: Mittwoch, 25.10.2006, 10.05 Uhr, H 12)

1. Berechne die Binomialkoeffizienten $\binom{1/3}{2}$ und $\binom{1+\sqrt{3}}{3}$. (2 + 2 Punkte)

2. Drücke für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, 1, 2, 3$ jeweils die Summe der n kleinsten natürlichen Zahlen, welche nach Division durch 4 den Rest k haben, durch das Summenzeichen aus. Schreibe die Summe über diese vier Summen als Doppelsumme und finde deren Wert.
(3 Punkte)

3. Beweise für $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Identitäten.
   a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
   b) $\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
   (3 + 3 Punkte)

4. a) Zeige für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$: $\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \cdot \binom{\alpha+k-1}{k}$
   b) Finde für $n \in \mathbb{N}$ die Werte der folgenden Summen bzw. Doppelsummen.
   (i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k$ (ii) $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} \frac{2k+1}{\ell}$
   (3 + 3 + 3 Punkte)

5. Finde alle ganzen Zahlen n, für die $2^n > 5n$ ist.* (3 Punkte)

*Das Ergebnis ist (natürlich) zu begründen!

Tutoriumsaufgaben:

A) Welche der folgenden Aussagen sind für die Menge $A = \{1, 2, \{1\}\}$ wahr?
$1 \in A$ $1 \subset A$ $\{1\} \in A$ $\{1\} \subset A$ $2 \subset A$ $\{2\} \in A$ $\{1, 2\} \subset A$

B) Welche der folgenden Identitäten für Mengen A, B, C, D sind allgemein gültig?*
a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$
c) $A \setminus (A \setminus B) = B$

C) Beweise: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

D) Finde alle ganzen Zahlen n, für die $2^n > n^2$ ist.

E) Berechne
a) die Binomialkoeffizienten $\binom{1/2}{k}$ $(k = 0, \ldots, 4)$.
b) für natürliches n die Werte der Summen
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$
c) den Wert der Summen $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell(\ell+2)}$ $(n \in \mathbb{N})$.
d) den Wert der Doppelsummen $\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\mu^2}{\nu(2\nu-1)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

*Grundsätzlich gilt bei Aufgaben dieser Art: Richtige Aussagen (z.B. Identitäten) sind zu beweisen, falsche durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.