L. Tomm Blatt 2

Übungen zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

(Abgabe: Donnerstag, 2.11.2006, 8.10 Uhr, H 12)

6. Stelle die folgenden Summen (für $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$) in geschlossener Form dar.

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k \qquad \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k$$

Hinweis: binomischer Lehrsatz, Ableitung von Summen (6 Punkte)

7. Wieviele Dezimalstellen hat die Zahl $\sum_{k=0}^{63} 2^k$ und wie lauten ihre ersten drei Dezimalziffern (von links)?

(3 Punkte)

8. Differenziere folgende Ausdrücke nach x und stelle die Ableitungen in möglichst einfacher Form dar.

a) $(2x-5)^4$ b) $2xe^{\sqrt{x}}$ c) $\log_2 8^x$ d) $x\log x - x$

e) $\sqrt{2+x^2}$ f) $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$ g) $\log\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$ h) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$

i) $x^{\sqrt{x}}$

(je 2 Punkte)

9. Betrachte die durch $f(x) = x^4+2x^2$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Zeige, daß $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ nicht bijektiv ist, und bestimme ein Intervall I so, daß $f: I \longrightarrow [0,\infty)$ bijektiv ist. Berechne die zugehörige Umkehrfunktion und differenziere sie an der Stelle 3.

(4 Punkte)

10. Zeige für positives x und $m,n\in\mathbb{N}$ mit $m<n$:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

Hinweis: Verwende den binomischen Lehrsatz und dividiere in der Definition der dabei auftretenden Binomalkoeffizienten die Faktoren des Zählers jeweils durch m bzw. n.

(4 Punkte)

<u>Tutoriumsaufgaben:</u>

A) Vereinfache die folgenden Ausdrücke und entscheide, für welche Werte der darin auftretenden Variablen sie sinnvoll sind.

a) $5\log x + \log y^2 - 2\log x^3$ b) $2\log_8(a+b)+\log_4(a-b)-\log_2\sqrt{a^2-b^2}$

c) $\log_3\dfrac{3^q}{2q}+\log_9(4q^2)$ d) $2\log x + 2\log y - \log(x^2+y^2)$

B) Berechne für $n\in\mathbb{N}$ und $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}x^{2k} \qquad \sum_{k=1}^{n}kx^k \qquad \sum_{\ell=1}^{n}(2\ell-1)\sum_{k=\ell}^{n}\frac{x^k}{k}$$

C) Differenziere folgende Ausdrücke nach x und stelle die Ableitungen in möglichst einfacher Form dar.

a) $(6x-7)^{25}$ b) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ c) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{5+x^2}-2}$ d) $\log(\log_{x^2}2^x)$

e) 5^{4x} f) x^x g) $x^{1/\log x}$ h) $\log(x^{2x})$