L. Tomm Blatt 4

Übungen zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

(Abgabe: Donnerstag, 16.11.2006, 8.10 Uhr, H 12)

16. Dividiere $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x$ mit Rest durch $Q(x) = x^3 + x + 1$.
Besitzen die beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle?

(3 Punkte)

17. Beweise, daß für reelle Zahlen x, y mit $xy < 1$ stets gilt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

Hinweis: Bezeichne für festes y die Differenz der beiden Seiten mit $f(x)$ und zeige, daß in dem durch $xy < 1$ festgelegten Intervall $f'(x) = 0$ ist.

(4 Punkte)

18. Zeige, daß

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \qquad \textbf{(Machin 1706)}$$

ist, und berechne mit Hilfe dieser Identität und der Arcustangensreihe die Zahl π auf 6 Dezimalstellen genau.

Hinweis: Beachte die vorhergehende Aufgabe. (4 Punkte)

19. Welche Werte besitzen die folgenden Reihen?

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log 3)^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{3}{4}\right)^n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^k}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k}$$

(je 2 Punkte)

20. Ermittle mit dem Taschenrechner die Werte von

$$\sin(0,1)\,, \qquad \cos(0,1)\,, \qquad e^{0,1} \qquad \text{und} \qquad e^6\,.$$

Vergleiche diese Zahlen mit den Summen der Glieder der zugehörigen Potenzreihen bis zur vierten Potenz.

(8 Punkte)

21. Zeige für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} x^k$$

und insbesondere für natürliches n

$$\left(1 + x + x^2 + \ldots\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k\,.$$

Daher ist $\binom{n+k-1}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten k auszuwählen, wobei in dieser Auswahl jedes Objekt mehrfach auftreten darf.

(4 Punkte)

Tutoriumsaufgaben:

A) Beweise die Identität

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

für $|x| < 1$.

B) Welche Werte besitzen die folgenden Reihen?

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{2}-1)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} e^{-n}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-9\pi^2)^k}{(2k+1)!}$$

C) Ermittle mit dem Taschenrechner die Werte von

$$\sqrt{1,1} \qquad \text{und} \qquad \log(1,1)\,.$$

Vergleiche diese Zahlen mit den Summen der Glieder der zugehörigen Potenzreihen bis zur dritten Potenz.

Die 1. Klausur findet, wie bereits bekanntgegeben, am 14..12.2006 um 16.15 statt. Die Räume werden noch bekanntgegeben.