L. Tomm Blatt 6

Übungen zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

(Abgabe: Donnerstag, 30.11.2006, 8.10 Uhr, H 12)

26. a) Bestimme die beiden Lösungen z_0, z_1 der Gleichung $z^2 + (3-2i)z - 6i = 0$ und berechne $z_0 + z_1$ und $z_0 \cdot z_1$.
    b) Es seien $z_0, \ldots, z_6$ die siebten Wurzeln von $a = 7 + 12i$. Bestimme $z_0 + \ldots + z_6$ und $z_0 \cdot \ldots \cdot z_6$.
    Hinweis: $z^7 - a = (z - z_0) \cdot \ldots \cdot (z - z_6)$

(4 Punkte)

27. Zeige, daß für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot e^{\frac{(n+1)it}{2}}$$

ist, und leite die folgenden Formeln her:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kt) = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \sin\frac{(n+1)t}{2}\,, \qquad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

(5 Punkte)

28. Berechne die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^6 - 2x^4 + 5x^2 - x - 2}{x^4 - x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_3^5 \frac{(9x-13)\,dx}{x^3 - 7x + 6}$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \quad (n \in \mathbb{N})$

(10 Punkte)

29. Finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = \dfrac{2y}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $y' = -\dfrac{3}{x}y + x$

c) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 25x = 0$ d) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

(12 Punkte)

30. Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' = \dfrac{\sin y}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{2}$ b) $y' + y\tan x = \sin(2x), \quad y(0) = 1$

c) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$

d) $\ddot{x} - x = \cos(2t) - 2\sin(2t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0,8$

(15 Punkte)

Tutoriumsaufgaben:

A) Berechne die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^3 + x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}\,dx$

B) Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $(1 - x^2) \cdot y' - xy = 1\,, \quad y(0) = 1$ b) $3y' = \dfrac{2y^4}{1+x^2}\,, \quad y(1) = \sqrt[3]{2/\pi}$

c) $\ddot{x} + 4x + 4\sin(2t) = 0, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 5$