L. Tomm Blatt 7

Übungen zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

(Abgabe: Donnerstag, 7.12.2006, 8.10 Uhr, H 12)

31. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=0$ besitze die beiden nicht–reellen Nullstellen $\alpha \pm i\omega$ $(\alpha,\omega \in \mathbb{R},\ \omega > 0)$. Zeige, daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in der Form $x(t) = ce^{\alpha t}\cos(\omega t+\delta)$ mit reellen Konstanten c, δ darstellbar ist.

(4 Punkte)

32. Beweise, daß für positive reelle Zahlen a, b stets

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$$

ist und daß das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $a = b$ ist. (4 Punkte)

33. Finde — soweit existent — das Maximum, Supremum, Minimum und Infimum der Mengen

$$A = \left\{ \frac{2+(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \;\middle|\; a, b > 0 \right\}.$$

(12 Punkte)

34. Die **Fibonacci–Zahlen** F_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ sind definiert durch

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1 \qquad \text{und} \qquad F_{n+1} := F_n + F_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots .$$

Zeige, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

ist. (5 Punkte)

Tutoriumsaufgaben:

A) Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $3y^2y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}, \quad y(1) = \sqrt[3]{\log(1+e)}$ b) $y' = 3xy - 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 1$

c) $\ddot{x} = 4x - 4\sin t - 4\cos t, \quad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=4$

B) Beweise daß für reelle Zahlen a, b stets

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

ist.

C) Finde — soweit existent — das Maximum, Supremum, Minimum und Infimum der Mengen

$$A = \left\{ \frac{1}{m}+\frac{1}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{x}{x+1} \;\middle|\; x > -1 \right\}.$$