L. Tomm Blatt 12

Übungen zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

(Abgabe: Donnerstag, 1.2.2007, 8.10 Uhr, H 12)

51. Skizziere die Graphen der in ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$p(x) \;=\; \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 + 5\,, \qquad f(x) \;=\; |x|^{2/3}\cdot(x^2-4)$$

und finde das Maximum und Minimum von p im Intervall $[-1,4]$. (9 Punkte)

52. Die Funktion

$$P(\varphi) \;=\; \frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}$$

(mit einer Konstanten β, $0<\beta<1$) tritt bei der Energieberechnung eines beschleunigten relativistischen Teilchens auf. Bestimme ihre Extremalstellen.

(4 Punkte)

53. Beweise:

a) $\log(1+2x) > \dfrac{2x}{1+x}$ für $x>0$

b) $\dfrac{2}{\pi}\,x < \sin x$ für $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

(3 + 4 Punkte)

54. Berechne, soweit existent, die folgenden Limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x+\sin^2 x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+\sin^2 x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\,(\pi - 2\arctan x)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x^2)}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}$

(je 3 Punkte)

55. **Young**sche Ungleichung

Gegeben seien zwei positive Zahlen p,q mit $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Beweise für alle positiven Zahlen a,b die Ungleichung

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Wann genau gilt hier Gleichheit?

Hinweis: Untersuche $f(x) := \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{x^q}{q} - ax$ auf Monotonie. (4 Punkte)

Tutoriumsaufgaben:

A) Zeige, daß durch

$$f(x) \;:=\; \arctan x - x + 1$$

eine bijektive Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert ist, und berechne die Ableitung von f^{-1} an der Stelle $\pi/4$.

B) Berechne, soweit existent, die folgenden Limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0+} x^{1/\sqrt{x}}$

C) Beweise die Ungleichung

$$x < \arcsin x$$

für $0<x<1$.