L. Tomm Blatt 13

Übungen zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

(Abgabe: Donnerstag, 8.2.2007, 8.10 Uhr, H 12)

56. Zeige, daß die Gleichung

$$x \log x = x + 1$$

eine eindeutig bestimmte positive Lösung besitzt, und berechne diese Lösung und auch die Zahl $\sqrt[3]{9}$ auf 8 dezimale Nachkommastellen genau.

(8 Punkte)

57. Zeige, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}\,, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}\,, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

existieren, und berechne sie. Beweise auch mit Hilfe des letzten Grenzwertes und Aufgabe 3b, daß $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ ist.

(12 Punkte)

58. Differenziere die Funktion $\displaystyle F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{-t^2}\, dt\,.$ (5 Punkte)

59. Beweise die Asymptotik

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{für} \quad x \longrightarrow \infty\,.$$

Damit ist gemeint, daß der Quotient der beiden Seiten für $x \longrightarrow \infty$ gegen 1 strebt.
Hinweis: Regel von de l'Hospital, Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

(5 Punkte)

Tutoriumsaufgaben:

A) Zeige, daß die Gleichung

$$x = e^{-x}$$

genau eine positive Lösung besitzt, und berechne diese Lösung mit Hilfe des Newton–Verfahrens auf 8 Dezimalstellen genau.

B) Zeige, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

existieren, und berechne sie.

C) Berechne $F'(\pi^2/4)$ für $\displaystyle F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t}\, dt\,.$