14.12.2006

1. Klausur zur Höheren Mathematik I für Elektrotechniker

Hilfsmittel: Vorlesungsmitschrift, Übungsaufgaben, <u>keine</u> Bücher, <u>kein</u> Taschenrechner

Bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt lösen!

Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Es sind 105 Punkte erreichbar. 100 Punkte sind 100%.

Alle Ergebnisse sind in möglichst einfacher Form darzustellen!

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Finde für $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Doppelsumme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}\frac{2^\ell k}{\ell(\ell+1)}$.

Aufgabe 2: (5 + 6 Punkte)

Berechne:

a) $\operatorname{Im}\dfrac{4-3i}{2i-1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\binom{12}{k}i^k$

Aufgabe 3: (5 + 5 Punkte)

Beweise für $n\in\mathbb{N}_0$ und $x\in\mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+3}{k}=\binom{n+4}{n}$ b) $\displaystyle 2^n\sin x\prod_{k=0}^{n-1}\cos(2^k x)=\sin(2^n x)$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Zeige:

$$\arcsin x + 2\operatorname{arccot}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi}{2} \qquad \text{für} \quad -1<x<1$$

Aufgabe 5: (5 + 5 + 5 Punkte)

Welche Werte besitzen folgende Reihen?

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{3}-1)^{2k+1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(i\pi)^{2k}}{(2k+1)!}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k k}$

Aufgabe 6: (6 + 6 + 5 Punkte)

Berechne die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \operatorname{Arsinh} x\, dx$ b) $\displaystyle\int\frac{(4x+2)\,dx}{x^3+2x^2-x-2}$ c) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{6}\; dt$

Aufgabe 7: (6 + 6 Punkte)

Löse folgende Anfangswertprobleme:

a) $y'=\dfrac{1+y^2}{3\cosh^2 x},\quad y(0)=\sqrt{3}$

b) $y'=-\dfrac{2xy}{1-x^2}+\sqrt{1-x^2},\quad y(0)=1$

Aufgabe 8: (5 + 7 Punkte)

a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}+6\dot{x}+9x=0$.

b) Löse das Anfangswertproblem $\ddot{x}+3x=4e^{-t},\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=-1$.

Aufgabe 9: (5 + 7 Punkte)

a) Berechne $\det(AB)$ für

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&2&-4\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&1&0\\-5&7&2\end{pmatrix}.$$

b) Berechne

$$\begin{vmatrix}5&-7&2&1&14&-3\\0&8&-1&2&-5&9\\1&7&-1&2&8&-7\\0&0&0&0&7&3\\2&7&-1&-1&16&-8\\0&0&0&0&9&4\end{vmatrix}.$$