Universität Ulm
Abteilung Stochastik

Neue Entwicklungen der statistischen Prozeßkontrolle bei korrelierten Daten

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
der Universität Ulm

vorgelegt von
Diplom-Wirtschaftsmathematiker
Alexander Schöne

Ulm
1997

Amtierender Dekan:	Prof. Dr. Friedmar Schulz
Externer Gutachter:	Prof. Dr. Wolfgang Schmid
Interner Gutachter:	Prof. Dr. Hans Wolff
Interner Gutachter:	Prof. Dr. Dieter Kalin
Tag der Promotion:	11. Juli 1997

All models are wrong,
but some are useful.

(George E. Box)

Vorwort

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Wolfgang Schmid für die Themenstellung und die – trotz der räumlichen Distanz – ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit.

Für die Durchsicht und wertvolle Korrekturhinweise der vorliegenden Arbeit möchte ich mich besonders bei Frau Diplom-Wirtschaftsmathematikerin Diana Stratmann und Herrn Dr. Andreas Frey bedanken. Zudem danke ich meinen Eltern für die Förderung meines Studiums und der Promotion.

Teile der Arbeit wurden durch die Landesgraduiertenförderung Baden-Württemberg und das Copernicus Projekt der Europäischen Union finanziell unterstützt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Zusammenfassung

Eine der Standardannahmen in der statistischen Prozeßkontrolle ist die Voraussetzung, daß die betrachteten Daten unabhängig und identisch verteilt sind. Obwohl diese Annahmen einschränkend sind, spiegeln sie doch in vielen Anwendungen die Realität hinreichend genau wider.

In der statistischen Prozeßkontrolle werden diese Annahmen jedoch des öfteren verletzt. Unter anderem ist dies bei kontinuierlichen Produktionsprozessen der Fall, die dadurch charakterisiert sind, daß sie einen ununterbrochenen Produktionsausstoß liefern. Auf solche Produktionsprozesse trifft man zum Beispiel in der chemischen und pharmazeutischen Industrie, sowie bei der Papier- und Stahlherstellung (vergleiche MacGregor und Harris (1990), Woodall und Faltin (1994) oder Roes und Does (1995)). Die Abhängigkeitsstrukturen, die bei diesen kontinuierlichen Produktionsprozessen auftreten, werden unter anderem durch die unterschiedliche Qualität der Rohstoffe (wie zum Beispiel Holz bei der Papierproduktion) verursacht.

Aber auch Prozesse, die man früher noch als unabhängig voraussetzen konnte, weisen durch neue Kontrollverfahren plötzlich eine Abhängigkeitsstruktur auf. Der Grund für das Auftreten dieses Phänomens liegt in der Entwicklung moderner Kontrollmethoden, die im allgemeinen deutlich mehr Stichproben in einer gegeben Zeitspanne kontrollieren können als früher. Bei einem nur schwach korrelierten Prozeß fiel früher die Abhängigkeit der Daten nicht auf, da die zeitliche Differenz zwischen zwei Stichproben zu groß war, um signifikante Abhängigkeiten zwischen Stichproben zu entdecken. Durch die kürzeren Stichprobenabstände tritt hingegen die Abhängigkeitsstruktur des Prozesses hervor.

Zudem erlauben mittlerweile viele Produktionsprozesse die Kontrolle jedes einzelnen Produktes während der gesamten Produktion. Möglich wird dies durch die Ausstattung moderner Produktionsanlagen mit Sensoren, welche die Meßwerte in Echtzeit erfassen und an die Qualitätskontrolle weiterleiten können. Auch in diesen Fällen ist es recht wahrscheinlich, daß die Meßwerte korreliert sind. Notohardjono und Ermer (1986), Yourstone und Montgomery (1989), Montgomery und Friedmann (1989) und Yourstone (1991) befassen sich ausführlich mit den Problemen, die aus dieser sogenannten Echtzeit-Kontrolle entstehen.

Auch durch die besondere Art des Produktionsprozesses können Korrelationsstrukturen zwischen den Produkten entstehen. Ein Beispiel dafür ist die Herstellung von Mikrochips (vergleiche Roes und Does (1995)), bei der einige Dutzend Chips gleichzeitig auf einem Siliziumträger hergestellt werden. Durch Fehler auf dem Träger werden dann mehrere Chips, die sich in direkter Umgebung der defekten Stelle befinden, zerstört. Für die Qualitätskontrolle bedeutet dies, daß die Defektwahrscheinlichkeit eines Chips in der unmittelbaren Umgebung eines defekten Chips steigt.

Die Prozeßkontrolle findet jedoch auch zunehmend in Anwendungsgebieten Verwendung, in denen die Voraussetzungen, daß die Daten unabhängig und identisch verteilt sind, nicht mehr oder nur noch teilweise erfüllt sind. Unter anderem sind dies Problemstellungen bei der Untersuchung von Umweltprozessen, wie zum Beispiel die Kontrolle von Ozonwerten, Giftstoffen in der Luft oder Schwebstoffen in geklärten Abwässern (vergleiche Berthouex et al. (1976), Smeach und Jernigan (1977) oder Berthouex et al. (1978)). Aber auch wirtschaftliche Kennzahlen wie Aktienkurse oder Untersuchungen über die Ruinwahrscheinlichkeit von Unternehmungen (siehe unter anderem Neftci (1982), Altman (1983) oder Theodossiou (1993)) können mit Instrumenten aus der statistischen Prozeßkontrolle behandelt werden.

Erst seit Beginn der siebziger Jahre wird der Einfluß korrelierter Daten auf die statistische Qualitätskontrolle näher untersucht. Die ersten Arbeiten zu diesem Thema beschäftigen sich ausnahmslos damit, welche Wirkungen abhängige Daten auf die klassischen Kontrollkarten haben. Dazu zählen unter anderem die Veröffentlichungen von Johnson und Bagshaw (1974), Berthouex et al. (1976), Vasilopoulos und Stamboulis (1978) oder Berthouex et al. (1978), die sich alle vorwiegend mit Shewhart-Karten beschäftigen. Erst in den letzten Jahren erschienen vermehrt Arbeiten, die sich mit Kontrollschemata für Zeitreihen auseinandersetzen (vergleiche Alwan und Roberts (1988), Montgomery (1991), Harris und Ross (1991), Montgomery und Mastrangelo (1991) oder Woodall und Faltin (1994)).

Mittlerweile gibt es auch eine große Anzahl von Veröffentlichungen in diesem Gebiet, die sich speziell mit dem Verhalten verschiedener Kontrollschemata bei korrelierten Daten auseinandersetzen. Diese Arbeiten befassen sich mit Modifikationen und Weiterentwicklungen klassischer Kontrollkarten zur Anpassung an eine zugrundegelegte Abhängigkeitsstruktur.

Inzwischen wurden Shewhart-, EWMA- und CUSUM-Karten auf korrelierte Daten übertragen. Zur Standardliteratur für Shewhart-Karten bei abhängigen Daten gehören die Arbeiten von Maragah und Woodall (1992), Roes und Does (1995) und Schmid (1995). Untersuchungen über die Anwendung der EWMA-Karte bei korrelierten Prozessen sind unter anderem in Montgomery und Mastrangelo (1991), Lu und Reynolds (1992), Schmid (1997), Schmid und Schöne (1997) und Kramer und Schmid (1997) zu finden. Die CUSUM-Karte wird ausführlich in Johnson und Bagshaw (1974), Bagshaw und Johnson (1975), Böhm und Hackl (1992) und Yashchin (1993) behandelt.

Einen umfassenden Überblick über die Problematik und Auswirkungen korrelierter Daten in der statistischen Prozeßkontrolle verschaffen die Arbeiten von ALWAN und ROBERTS (1988), HUBELE (1989), HARRIS und ROSS (1991), BROCKWELL und DAVIS (1991), MONTGOMERY (1991), MONTGOMERY und MASTRANGELO (1991), ALWAN (1992) und WOODALL und FALTIN (1994).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich näher mit drei verschiedenen Kontrollschemata aus dem Gebiet der statistischen Prozeßkontrolle bei korrelierten Daten.

Kapitel 1 ist eine Erweiterung der Arbeit von SCHMID und SCHÖNE (1997), die eine Abschätzung für die durchschnittliche Lauflänge der von SCHMID (1997) eingeführten modifizierten EWMA-Karte liefert. Diese Karte adaptiert die klassische EWMA-Karte für korrelierte Prozesse. SCHMID und SCHÖNE konnten zeigen, daß bei stationären Gaußschen Prozessen die Lauflänge der modifizierten EWMA-Karte stochastisch größer als die der klassischen EWMA-Karte ist. Daraus folgt unter anderem eine Abschätzung für beliebige Momente der Verteilung der Lauflänge beider Schemata. Das Hauptergebnis von Kapitel 1 stellt Satz 1.1 dar, der dieses Ergebnis drastisch erweitert. Er vergleicht die Lauflängen zweier modifizierter EWMA-Karten für beliebige stationäre Gaußsche Prozesse bezüglich der stochastischen Ordnung. Aus diesem Vergleich folgt ebenfalls eine Abschätzung für das Verhalten der Lauflängen zweier modifizierter EWMA-Karten. Diese Abschätzung ist von großer Bedeutung für die praktische Anwendung von EWMA-Karten, da sie Schranken für die Lauflängen bei korrelierten Daten liefert. Der Beweis dieser Aussagen beruht im wesentlichen auf der Ungleichung von Slepian, sowie einiger Abschätzungen für die Varianzen und Kovarianzen der EWMA-Statistik.

Die Hauptaussagen von Kapitel 1 gelten für die einseitige EWMA-Karte, die positive Abweichungen vom Sollwert kontrolliert, unter der Voraussetzung, daß ein Gaußscher Prozeß betrachtet wird. Wie in diesem Kapitel deutlich wird, gelten diese Aussagen aber auch für EWMA-Karten, die negative Abweichungen vom Sollwert kontrollieren, sowie für die größere Klasse von Prozessen mit elliptischen Randverteilungen.

In Kapitel 2 wird ein neues Kontrolldesign zur gleichzeitigen Kontrolle von Mittelwert und Varianz bei abhängigen Prozessen vorgestellt. In der bisherigen Literatur werden simultane Kontrollkarten für korrelierte Daten fast völlig vernachlässigt. Eine Übersicht über verschiedene simultane Kontrollschemata für unkorrelierte Daten findet man in GAN (1995). Anhand der durchschnittlichen Lauflänge werden dort die in der Anwendung üblichen simultanen Kontrollkarten miteinander verglichen. Ein Ergebnis von GAN (1995) ist die Aussage, daß eine zweiseitige EWMA-Karte sowohl zur Kontrolle des Mittelwertes, als auch der Varianz optimal ist. MACGREGOR und HARRIS (1993) untersuchen das Verhalten dieser Karten bei korrelierten Daten. Sie betrachten jedoch nicht die simultane Kontrollkarte, sondern untersuchen jede der beiden Karten getrennt.

In mehreren Arbeiten befaßt sich SANIGA (1977, 1979, 1984, 1989) mit der simultanen $\bar{X}$-R-Karte. Er geht in seiner Arbeit jedoch mehr auf das ökonomische Design dieser Karte, als auf das Verhalten der Kontrollkarte bei abhängigen Daten ein. Eine Betrachtung unterschiedlicher Kontrollschemata bei korrelierten Daten findet man in der noch zu erscheinenden Arbeit von KNOTH, SCHMID und SCHÖNE (1997).

Die Grundlage für das in Kapitel 2 eingeführte Kontrolldesign stellt Satz 2.1 dar, der die gemeinsame Dichte und Verteilung einer quadratischen und linearen Form liefert. Dieses Ergebnis ist nicht nur für die statistische Prozeßkontrolle interessant, sondern kann auch in anderen Bereichen der Stochastik, wie zum Beispiel der Bestimmung von simultanen Konfidenzintervallen, Verwendung finden.

Die Beweisidee von Satz 2.1 beruht auf der Theorie der Verteilung quadratischer Formen in Zufallsvariablen, deren Grundlagen unter anderem in MATHAI und PROVOST (1992) zu finden sind. Im allgemeinen wird die Verteilung und Dichte quadratischer Formen, falls dies möglich ist, in eine Reihe entwickelt. Üblicherweise betrachtet man dabei Potenzreihenentwicklungen, sowie Entwicklungen in Chi-quadrat-Verteilungsfunktionen oder verallgemeinerten Laguerre Polynomen. In KHATRI et al. (1977) und KNIGHT (1985) werden diese Methoden auf mehrere quadratische beziehungsweise lineare Formen erweitert.

Die Reihen in Satz 2.1 werden als Entwicklungen in verallgemeinerten Laguerre-Polynomen dargestellt. Da aufgrund der begrenzten Rechengenauigkeit bei der numerischen Auswertung dieser Reihen Fehler auftreten, wird in Kapitel 2 anhand einer umfangreichen Simulationsstudie untersucht, wie sich diese Reihen bei der numerischen Berechnung verhalten. Wie sich herausstellt, macht die numerischen Auswertungen der Reihen bis auf wenige Ausnahmen keine Probleme. Allein bei einigen extremen Parameterkombinationen, die jedoch in der Praxis keine wesentliche Rolle spielen, konvergieren die Reihen bei der gegebenen Rechengenauigkeit nicht mehr.

Im weiteren Verlauf wird die modifizierte $\bar{X}$-S^2-Karte eingeführt und deren Verhalten mit der klassischen $\bar{X}$-S^2-Karte und der zugehörigen Residuenkarte verglichen. Die Residuenkarte bezeichnet dabei die Anwendung des klassischen Kontrolldesigns auf einen unabhängigen Prozeß, der durch eine geeignete Transformation aus dem abhängigen Prozeß entstanden ist. Für die praktische Anwendung sind im Anhang zu Kapitel 2 die Eingriffsgrenzen dieser modifizierten Karte für eine Vielzahl von Parameterkombinationen tabelliert.

Die Vergleichsstudie zwischen den drei erwähnten Karten fällt für die klassische $\bar{X}$-S^2-Karte äußerst negativ aus. Es zeigt sich, daß das klassische Kontrolldesign bei korrelierten Daten völlig unzureichend reagiert. Das hier eingeführte modifizierte Kontrollschema zeigt hingegen ein deutlich besseres Leistungsverhalten. Es reagiert sehr schnell und zuverlässig sowohl auf Änderungen im Mittelwert, als auch in der Varianz des zugrundegelegten Prozesses.

Ein Vergleich zwischen modifizierter Karte und Residuenkarte ergibt ein anderes Bild. Die Residuenkarte zeigt geringe Störungen von Mittelwert und Varianz schneller auf, als die modifizierte Karte. Diese Vorteile nehmen jedoch mit zunehmender Störung deutlich ab. Letztendlich hängt es von der speziellen Einsatzsituation ab, welches Kontrolldesign der Anwender wählen sollte. Die Vorteile der Residuenkarte liegen in der bei gewissen Störungen besseren Leistungsfähigkeit, dafür muß jedoch eine kompliziertere Rechenvorschrift im Vergleich zur modifizierten Karte in Kauf genommen werden. Zusätzlich muß auch noch berücksichtigt werden, daß sich Residuenkarten nicht auf jede beliebige Korrelationsstruktur anwenden lassen.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Shewhart-Karte mit variablen Stichprobenabständen, der sogenannten VSI-Shewhart-Karte. Kontrollschemata mit variablen Stichprobenabständen wurden in der statistischen Prozeßkontrolle Mitte der achtziger Jahre vor allem von Reynolds, Amin, Arnold und Nachlas (vergleiche unter anderem Reynolds et al. (1988)) eingeführt. Der Gedanke hinter variablen Stichprobenabständen ist, daß für Stichproben, die am Rande des zulässigen Bereiches liegen, der zeitliche Abstand zur nächsten Stichprobenentnahme verkürzt wird. Realisationen in der Nähe des Sollwertes führen hingegen dazu, daß die Zeit bis zur nächsten Stichprobenentnahme verlängert wird. Die Theorie der variablen Stichprobenabstände wurde in den letzten Jahren auf die meisten der in der Literatur behandelten Kontrolldesigns angewandt (vergleiche unter anderem Amin (1987), Reynolds et al. (1988), Cui und Reynolds (1988), Rendtel (1990), Reynolds et al. (1990), Shamma et al. (1991), Kamps et al. (1994), Reynolds (1996)). Alle Untersuchungen ergaben, daß Karten mit variablen Stichprobenabständen deutliche Vorteile gegenüber den äquivalenten Karten mit festem Stichprobenabstand haben.

Variable Stichprobenabstände bei Kontrollkarten für korrelierte Daten wurden in der Literatur bis auf eine Ausnahme (siehe Harvey et al. (1995)) noch nicht behandelt. Harvey et al. (1995) untersuchen anhand von Simulationen das Verhalten der VSI-Shewhart-Karte, falls die zugrundegelegten Daten einem autoregressiven Prozeß der Ordnung eins gehorchen, jedoch irrtümlicherweise als unabhängig vorausgesetzt werden.

Die Hauptursache dafür, daß variable Stichprobenabständen bei Kontrollschemata für korrelierte Daten bis jetzt nicht eingehender untersucht wurden, dürfte darin zu suchen sein, daß sich die Berechnung von Kennzahlen der Karte als äußerst schwierig gestaltet. In Kapitel 3 werden mathematische Grundlagen für die Arbeit mit einer VSI-Shewhart-Karte für eine spezielle Abhängigkeitsstruktur gelegt.

Da variable Stichprobenabstände noch ein weniger bekanntes Gebiet aus der statistischen Prozeßkontrolle sind, werden zunächst einige Grundlagen und Ergebnisse der Theorie variabler Stichprobenabstände zusammengefaßt. Einen Überblick zusammen mit den wichtigsten fundamentalen Eigenschaften dieser Kontrollkarten vermitteln Reynolds (1989a,b). Zusätzlich werden die bei Kontrollkarten mit variablen Stichprobenabständen verwendeten Gütekriterien vorgestellt.

Daran anschließend wird die VSI-Shewhart-Karte für korrelierte Daten eingeführt. Ein wichtiges Ergebnis stellt Satz 3.1 dar. Er liefert eine Formel zur Berechnung der durchschnittlichen Laufzeit, sowie der durchschnittlichen Anzahl von Stichproben dieses Kontrolldesigns im Fall, daß die zugrundegelegten Daten austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen sind. Unter diesen Voraussetzungen wird die VSI-Shewhart-Karte der klassischen Shewhart-Karte gegenübergestellt. Wie sich zeigt, gilt auch bei korrelierten Daten, daß das Design mit variablen Stichprobenabständen klare Vorteile gegenüber der klassischen Kontrollkarte mit festem Stichprobenabstand hat. Zusätzlich werden noch verschiedene Schemata mit variablen Stichprobenabständen miteinander verglichen. Bei all diesen Designs wurden die Parameter so gewählt, daß gewisse Eigenschaften, wie zum Beispiel die Zeit bis zur Entdeckung einer vorgegebenen Störung, minimiert werden.

Abschließend werden beide Schemata auch noch unter der Annahmen miteinander verglichen, daß ein autoregressiver Prozeß der Ordnung eins zugrundeliegt. Da für diesen Fall keine exakte Aussagen hergeleitet werden können, erfolgt dieser Vergleich anhand von Simulationen. Hier ergibt sich in Abhängigkeit vom Koeffizienten α des autoregressiven Prozesses ein unterschiedliches Bild. Während für positive α die VSI-Shewhart-Karte klare Vorteile gegenüber dem klassischen Design hat, ändert sich dies für negative α. Hier benötigt zwar die VSI-Karte eine längere Zeit bis zur Entdeckung der Störung, dafür ist aber die Anzahl der dafür nötigen Stichproben deutlich niedriger. Somit läßt sich bei negativen α keine eindeutige Empfehlung zugunsten einer der beiden Karten geben.

Kapitel 1

Modifizierte EWMA-Karte

1.1 Grundlagen

Die EWMA-Karte ist aufgrund ihrer bereits bei geringen Störungen sehr guten Leistungsfähigkeit eine häufig verwendete Karte für unabhängige Prozesse. Wie aber schon in verschiedenen Publikationen festgestellt wurde (vergleiche DOMANGUE und PATCH (1991), HARRIS und ROSS (1991), ALWAN (1992), SCHMID (1997)), wirkt sich eine Abweichung von der Unabhängigkeitsannahme gravierend auf das Verhalten der EWMA-Karte aus.

In der Literatur wurden verschiedene Lösungsansätze diskutiert, unter anderem Residuenkarten und modifizierte Kontrollschemata (zum Beispiel MONTGOMERY und MASTRANGELO (1991), SCHMID (1995)). In diesem Kapitel soll die von SCHMID (1997) eingeführte modifizierte EWMA-Karte näher untersucht werden.

Die modifizierte EWMA-Karte ist eine Erweiterung der klassischen EWMA-Karte, die es ermöglicht, auch korrelierte Prozesse zu kontrollieren. Es bezeichne $\{Y_t\}$ den ungestörten Prozeß, der jedoch im allgemeinen nicht direkt beobachtet werden kann. Der beobachtete Prozeß soll im folgenden mit $\{X_t\}$ bezeichnet werden. Das zu kontrollierende Merkmal des Prozesses ist der Mittelwert $\mu_0 = E(Y_t)$. Der Zusammenhang zwischen dem Prozeß im Zustand unter Kontrolle $\{Y_t\}$ und dem gestörten Prozeß $\{X_t\}$ kann durch eine Vielzahl von Modellen hergestellt werden. So wird zum Beispiel ein Shift zur Zeit q durch das Modell

$$X_t = Y_t + aI_{\{q,q+1,\dots\}}(t)$$

beschrieben. Ist $a \neq 0$, so spricht man von einem „change-point" an der Stelle q.

Zur Kontrolle des Prozesses verwendet die EWMA-Karte die Statistik

$$Z_t = (1-\lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t \tag{1.1}$$

für $t \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in (0,1]$. Der Startwert $Z_0 := z_0$ wird im allgemeinen gleich dem Sollwert μ_0 gesetzt.

Man schließt, daß der Prozeß zur Zeit t gestört ist, falls

$$|Z_t - \mu_0| > c\sqrt{\mathrm{Var}_0\, Z_t}$$

ist. Dabei bezeichnet $\mathrm{Var}_0\, Z_t$ die Varianz von Z_t in Bezug auf den ungestörten Prozeß. In der Praxis wird zur Vereinfachung oft nicht die exakte Varianz $\mathrm{Var}_0\, Z_t$ verwendet, sondern die asymptotische Varianz $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{Var}_0\, Z_t$.

Schmid (1997) verglich diese modifizierte Karte mit der Residuen-EWMA-Karte, d.h. der klassischen EWMA-Karte angewendet auf die Residuen des abhängigen Prozesses (vergleiche Abschnitt 2.4). Als Vergleichskriterium wurde die durchschnittliche Lauflänge (average run length) ARL benutzt, welche die durchschnittliche Zeit vom Auftreten einer Störung bis zu deren Entdeckung angibt. Untersucht wurde der Fall, daß $\{Y_t\}$ einem autoregressiver Prozeß erster Ordnung genügt. Der Glättungsparameter λ der EWMA-Statistik wurde so gewählt, daß die durchschnittliche Lauflänge in einem festen, vorgegebenen Zustand außer Kontrolle minimal wurde. Es zeigte sich, daß die durchschnittliche Lauflänge der modifizierten EWMA-Karte geringer ist, als die der Residuen-EWMA-Karte, falls der Koeffizient α des autoregressiven Prozesses nicht allzu klein ist, nämlich für $\alpha \geq -0.6$.

In einer weiteren Arbeit betrachteten Schmid und Schöne (1997) die durchschnittliche Lauflänge der einseitigen modifizierten EWMA-Karte im Zustand unter Kontrolle, d.h. für $X_t = Y_t$ für alle t. Für eine vorgegebene Konstante $c > 0$ ergibt sich die Lauflänge dieser Karte zu

$$N_e := \inf\left\{t \in \mathbb{N} \,:\, Z_t - \mu_0 > c\sqrt{\mathrm{Var}\, Z_t}\right\},$$

wobei zur Vereinfachung, und da keine Unterscheidung zum Zustand außer Kontrolle mehr nötig ist, nur $\mathrm{Var}\, Z_t$ anstatt von $\mathrm{Var}_0\, Z_t$ geschrieben wird. Unter der Voraussetzung, daß $\{Y_t\}$ ein Gaußscher Prozeß ist, konnten Schmid und Schöne (1997) zeigen, daß die Lauflänge im abhängigen Fall stochastisch größer oder gleich der Lauflänge im unabhängigen Fall ist. Dabei muß jedoch vorausgesetzt werden, daß alle Autokovarianzen nicht negativ sind. Die dort bewiesene Ungleichung ist strikt, falls mindestens eine der Autokovarianzen echt größer als Null ist. Dies impliziert unter anderem, daß die durchschnittliche Lauflänge der EWMA-Karte bei abhängigen Daten größer ist, als im unabhängigen Fall. Nimmt man fälschlicherweise an, daß der zu kontrollierende Prozeß unabhängig ist, so bedeutet dies, daß die erwartete durchschnittliche Lauflänge unterschätzt wird.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Ungleichung auch für den allgemeineren Fall zweier korrelierter Prozesse bewiesen werden kann. Dieser Frage soll im folgenden Abschnitt nachgegangen werden.

1.2 Montonieverhalten der Lauflänge der modifizierten EWMA-Karte

Im folgenden werden nur noch (schwach) stationäre Gaußsche Prozesse betrachtet. Dies bedeutet unter anderem, daß alle Prozesse eine Autokovarianzfunktion besitzen, die nur von der Differenz der beiden Zeitpunkte abhängt, d.h.

$$\gamma_h = E\big((Y_{t+h} - E(Y_{t+h})(Y_t - E(Y_t)\big)$$

existiert für alle h und ist unabhängig von t.

Um eine Vielzahl von Notationen zu vermeiden, werden in diesem Abschnitt alle Prozesse mit $\{Y_t\}$ bezeichnet. Damit trotzdem explizit zwischen Prozessen mit verschiedenen Autokovarianzfunktionen unterschieden werden kann, wird die Notation $\operatorname{Var}_\gamma$, $\operatorname{Corr}_\gamma$ und P_γ verwendet, um auszudrücken, daß der betrachtete Prozeß die Autokovarianzfunktion $\{\gamma_\nu\}$ besitzt. So bezeichnet zum Beispiel $\operatorname{Var}_\gamma Y_t$ beziehungsweise $\operatorname{Var}_\delta Y_t$ die Varianz von Y_t, falls der Prozeß $\{Y_t\}$ die Autokovarianzfunktion $\{\gamma_\nu\}$ beziehungsweise $\{\delta_\nu\}$ besitzt. Weiterhin sei im folgenden stets $E(Y_t) = \mu_0$ für alle t und $z_0 = \mu_0$.

Da sich die Rekursionsgleichung (1.1) für $1 \leq i \leq t$ auch als

$$Z_t = (1-\lambda)^i Z_{t-i} + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^\nu Y_{t-\nu} \tag{1.2}$$

schreiben läßt, gilt für die Varianz der EWMA-Statistik

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}_\gamma Z_t &= E_\gamma\left((Z_t - \mu_0)^2\right) \\
&= \lambda^2 \sum_{\nu,\tau=0}^{t-1} (1-\lambda)^{\nu+\tau} E_\gamma\left((Y_{t-\nu} - \mu_0)(Y_{t-\tau} - \mu_0)\right) \\
&= \lambda^2 \sum_{\nu,\tau=0}^{t-1} (1-\lambda)^{\nu+\tau} \gamma_{\nu-\tau}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist der folgende Satz. Er liefert einen Vergleich zwischen den Lauflängen zweier korrelierter Prozesse bezüglich der stochastischen Ordnung. Daraus folgt ein Vergleich zwischen beliebigen Momenten der Verteilungen der Lauflängen beider Prozesse.

Satz 1.1: *$\{\gamma_\nu\}$ beziehungsweise $\{\delta_\nu\}$ seien die nicht negativen Autokovarianzfunktionen zweier stationärer Gaußscher Prozesse mit der Eigenschaft $0 < \delta_0 \leq \gamma_0$.*

(a) *Es sei $k \in \mathbb{N}$. Falls $\gamma_i \delta_s \leq \gamma_s \delta_i$ für alle $0 \leq i \leq s \leq k-1$ ist, dann gilt*

$$P_\delta(N_e > k) \leq P_\gamma(N_e > k).$$

Die Ungleichung ist strikt, falls $\gamma_i \delta_s < \gamma_s \delta_i$ für mindestens ein Paar (i, s) mit $0 \leq i \leq s \leq k-1$ ist.

(b) *Sei $\kappa \in \mathbb{N}$ und $\gamma_i \delta_s \leq \gamma_s \delta_i$ für alle $s, i \in \mathbb{N}_0$, $i \leq s$, dann ist*

$$E_\delta(N_e^\kappa) \leq E_\gamma(N_e^\kappa).$$

Die Ungleichung ist strikt, falls $\gamma_i \delta_s < \gamma_s \delta_i$ für mindestens ein Paar (i, s) mit $0 \leq i \leq s$ gilt.

Beweis: Der Beweis von Satz 1.1 erfolgt am Endes dieses Abschnitts. □

Dieses Ergebnis ist von grundlegender Bedeutung für die Arbeit mit EWMA-Karten. Geht man fälschlicherweise von einer geringeren Korrelation des betrachteten Prozesses aus, so folgt aus diesem Satz, daß die wahre durchschnittliche Lauflänge der EWMA-Karte unterschätzt wird.

Die Voraussetzung $\gamma_i \delta_s \leq \gamma_s \delta_i$ von Satz 1.1 läßt sich für eine positive Autokovarianzfunktion $\{\gamma_\nu\}$ übersichtlicher als $\dfrac{\delta_s}{\gamma_s} \leq \dfrac{\delta_i}{\gamma_i}$ für $0 \leq i \leq s \leq k-1$ darstellen. Dies bedeutet, daß $\left\{\dfrac{\delta_t}{\gamma_t}\right\}$ monoton fallend ist.

Wie man dem Beweis von Satz 1.1 entnehmen kann, gelten die Aussagen bereits unter der schwächeren Voraussetzung

$$\delta_s \sum_{\nu,\mu=0}^{s-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \gamma_{\nu-\mu} \leq \gamma_s \sum_{\nu,\mu=0}^{s-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \delta_{\nu-\mu} \tag{1.4}$$

für $1 \leq s \leq k-1$. Geht man wiederum davon aus, daß $\gamma_i > 0$ ist, so ist Bedingung (1.4) für alle Glättungsparameter erfüllt, wenn gilt

$$\frac{\delta_s}{\gamma_s} \leq \inf_{\lambda \in (0,1]} \frac{\sum\limits_{\nu,\mu=0}^{s-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \delta_{\nu-\mu}}{\sum\limits_{\nu,\mu=0}^{s-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \gamma_{\nu-\mu}}.$$

Wie man an dem folgenden Beispiel sieht, stellt Bedingung (1.4) tatsächlich eine schwächere Anforderung dar, als die im Satz 1.1 formulierten Voraussetzungen. Es sei $k = 3$ und $\delta_0 = \gamma_0 = 1$, $\delta_1 = 1/10$, $\gamma_1 = 3/4$, $\delta_2 = 1/3$ und $\gamma_2 = 1/2$. Man kann einfach nachrechnen, daß für diese Parameter (1.4) erfüllt ist. Es gilt jedoch nicht, daß $\gamma_i\delta_s \leq \gamma_s\delta_i$ für alle $0 \leq i \leq s \leq 2$ ist, da $\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 = 1/5 > 0$ ist.

An diesem Beispiel sieht man auch, daß die Voraussetzungen von Satz 1.1 nicht äquivalent zu der Anforderung $0 \leq \delta_s \leq \gamma_s$ für $0 \leq s \leq k-1$ sind. In obigen Beispiel gilt zwar $0 \leq \delta_s \leq \gamma_s$ für $0 \leq s \leq 2$. Wie bereits gezeigt, gilt jedoch nicht, daß $\gamma_i\delta_s \leq \gamma_s\delta_i$ für alle $0 \leq i \leq s \leq 2$ ist.

Wählt man $\delta_0 = \sigma^2$ und $\delta_i = 0$ für $i \in \mathbb{N}$, sowie $\{\gamma_\nu\}$ als positive Autokovarianzfunktion eines Gaußschen Prozesses mit $\gamma_0 \geq \sigma^2$, so vergleicht man die klassische EWMA-Karte für unabhängige Daten mit der modifizierten EWMA-Karte für abhängige Daten. Satz 1.1 entspricht dann Satz 1 der Arbeit von SCHMID und SCHÖNE (1997). In dieser Arbeit wird auch ein Beispiel angegeben, welches zeigt, daß der obige Satz falsch ist, falls die Autokovarianzen negativ sind.

Satz 1.1 wurde nur für einseitige EWMA-Karten formuliert, die auf positive Abweichungen vom Sollwert reagieren. Es ist jedoch offensichtlich, daß die gemachte Aussage auch für den zweiten Fall, d.h. für die Kontrolle von negativen Abweichungen vom Sollwert, gültig ist. Die Lauflänge ist in diesem Fall

$$N_e := \inf\left\{t \in \mathbb{N} \,:\, Z_t - \mu_0 < -c\sqrt{\operatorname{Var} Z_t}\right\}.$$

Zusätzlich lassen verschiedene Simulationsstudien vermuten, daß diese Aussagen auch für die zweiseitige Karte gelten.

Die Anforderungen von Satz 1.1 sind für eine große Klasse von populären Prozessen erfüllt. Betrachtet man beispielsweise zwei kausale autoregressive Prozesse $\{V_t\}$ und $\{W_t\}$ der Ordnung eins, d.h. $V_t = \alpha V_{t-1} + \varepsilon_t$, wobei $\{\varepsilon_t\}$ unabhängige, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen sind, und $W_t = \beta W_{t-1} + \theta_t$ mit $\{\theta_t\}$ unabhängige, $\mathcal{N}(0,\varphi^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Dann ist die Autokovarianzfunktion $\{\gamma_\nu\}$ von $\{V_t\}$ gegeben durch $\gamma_\nu = \alpha^{|\nu|}\,\sigma^2/(1-\alpha^2)$ und dementsprechend diejenige von $\{W_t\}$ durch $\delta_\nu = \beta^{|\nu|}\,\varphi^2/(1-\beta^2)$. Um die Voraussetzungen von Satz 1.1 zu gewährleisten, müssen nur relativ schwache Anforderungen an die Prozesse $\{V_t\}$ und $\{W_t\}$ gestellt werden. Für die zweite Voraussetzung von Satz 1.1 gilt mit $0 \leq \alpha, \beta < 1$

$$\begin{aligned}\gamma_i\delta_t - \gamma_t\delta_i &= \alpha^i\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\beta^t\frac{\varphi^2}{1-\beta^2} - \alpha^t\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\beta^i\frac{\varphi^2}{1-\beta^2}\\ &= \frac{\sigma^2\varphi^2}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\alpha^i\beta^i(\beta^{t-i} - \alpha^{t-i}).\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $\gamma_i\delta_t - \gamma_t\delta_i \leq 0$ für alle $i, t \in \mathbb{N}_0$, $i \leq t$ gilt, falls $\beta \leq \alpha$ ist. Zusätzlich gilt, daß die Ungleichung für $i < t$ strikt ist, falls $\beta < \alpha$ gilt. Durch die weitere Forderung $\varphi^2 \leq \sigma^2$ wird sichergestellt, daß $\delta_0 \leq \gamma_0$ erfüllt ist.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 1.1 erfüllt, woraus unter anderem folgt, daß die durchschnittliche Lauflänge der modifizierten EWMA-Karte für den Prozeß $\{V_t\}$ echt größer ist als die für den Prozeß $\{W_t\}$, falls $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ und $\varphi \leq \sigma$ gilt.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Aussagen von Satz 1.1 für eine größere Klasse von Prozessen gelten, als die in den Voraussetzungen gestellte Klasse. Mit einer Verallgemeinerung der Ungleichung von Slepian (vergleiche TONG (1980, Satz 4.3.6)) gilt Satz 1.1 auch für Prozesse mit elliptisch konturten Verteilungen, d.h. Prozesse, die eine Dichte der Form

$$(\det \boldsymbol{\Sigma})^{-\frac{1}{2}} g\left(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{x}\right)$$

haben, wobei $\boldsymbol{\Sigma}$ eine positiv definite $n \times n$ Matrix und g eine monoton fallende Funktion mit

$$\int_0^\infty u^{n-1} g(u^2)\, du < \infty$$

ist. Unter anderem erfüllen mehrdimensionale Normalverteilungen und mehrdimensionale t-Verteilungen diese Anforderungen.

Bevor Satz 1.1 bewiesen werden kann, müssen einige Eigenschaften für Varianz, Kovarianz und Korrelation der EWMA-Statistik bewiesen werden. Dies geschieht in den folgenden Lemmata.

Lemma 1.1: *Sei $\{Y_t\}$ ein (schwach) stationärer Prozeß mit Mittelwert μ_0 und Autokovarianzfunktion $\{\gamma_h\}$. Außerdem sei $\lambda \in (0,1)$. Dann gilt für $i, t \in \mathbb{N}_0$, $i \leq t$*

$$2 \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) = (1-\lambda)^i \operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i} + \frac{1}{(1-\lambda)^i} \left(\operatorname{Var}_\gamma Z_t - \operatorname{Var}_\gamma Z_i\right).$$

Beweis: Mit der Rekursionsgleichung (1.2) gilt für die Differenz zwischen der EWMA-Statistik und deren Erwartungswert

$$Z_t - E_\gamma(Z_t) = (1-\lambda)^i \left(Z_{t-i} - E_\gamma(Z_{t-i})\right) + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^\nu \left(Y_{t-\nu} - \mu_0\right).$$

Daraus folgt für die Kovarianz zweier EWMA-Statistiken

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) &= E_\gamma\Big(\left(Z_t - E_\gamma(Z_t)\right)\left(Z_{t-i} - E_\gamma(Z_{t-i})\right)\Big) \\ &= (1-\lambda)^i E_\gamma\left(\left(Z_{t-i} - E_\gamma(Z_{t-i})\right)^2\right) \\ &\qquad + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^\nu E_\gamma\Big(\left(Y_{t-\nu} - \mu_0\right)\left(Z_{t-i} - E_\gamma(Z_{t-i})\right)\Big) \\ &= (1-\lambda)^i \operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i} + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^\nu \operatorname{Cov}_\gamma(Y_{t-\nu}, Z_{t-i}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Analog erhält man für die Varianz von Z_t

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}_\gamma Z_t &= E_\gamma\big((Z_t - E_\gamma(Z_t))\,(Z_t - E_\gamma(Z_t))\big) \\
&= (1-\lambda)^i E_\gamma\big((Z_{t-i} - E_\gamma(Z_{t-i}))\,(Z_t - E_\gamma(Z_t))\big) \\
&\qquad + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^\nu E_\gamma\big((Y_{t-\nu} - \mu_0)\,(Z_t - E_\gamma(Z_t))\big) \\
&= (1-\lambda)^i \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^\nu \operatorname{Cov}_\gamma(Y_{t-\nu}, Z_t).
\end{aligned}$$

Ersetzt man im obigen Ausdruck Z_t durch die Rekursion (1.2), so folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}_\gamma Z_t &= (1-\lambda)^i \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^{\nu+i} \operatorname{Cov}_\gamma(Y_{t-\nu}, Z_{t-i}) \\
&\qquad + \lambda^2 \sum_{\nu,\mu=0}^{i-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \operatorname{Cov}_\gamma(Y_{t-\nu}, Y_{t-\mu}) \\
&= (1-\lambda)^i \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^{\nu+i} \operatorname{Cov}_\gamma(Y_{t-\nu}, Z_{t-i}) \\
&\qquad + \lambda^2 \sum_{\nu,\mu=0}^{i-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \gamma_{\nu-\mu} \\
&= (1-\lambda)^i \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) + \lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^{\nu+i} \operatorname{Cov}_\gamma(Y_{t-\nu}, Z_{t-i}) \\
&\qquad + \operatorname{Var}_\gamma Z_i
\end{aligned}$$

wegen Gleichung (1.3).

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_{\nu=0}^{i-1} (1-\lambda)^\nu \operatorname{Cov}_\gamma(Y_{t-\nu}, Z_{t-i}) \\
&\quad = \frac{1}{(1-\lambda)^i} \left(\operatorname{Var}_\gamma Z_t - \operatorname{Var}_\gamma Z_i\right) - \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Setzt man (1.6) in (1.5) ein, so folgt

$$2 \operatorname{Cov}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) = (1-\lambda)^i \operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i} + \frac{1}{(1-\lambda)^i} \left(\operatorname{Var}_\gamma Z_t - \operatorname{Var}_\gamma Z_i\right).$$

□

Als nächstes soll das Verhalten zweier aufeinanderfolgender Varianzen miteinander verglichen werden. Gleichung (1.3) impliziert, daß $\mathrm{Var}_\gamma Z_t \geq \lambda^2 \gamma_0$ für $t \geq 1$ ist. Unter der trivialen Voraussetzung $\gamma_0 > 0$ gilt dann, daß $\mathrm{Var}_\gamma Z_t > 0$ ist. Man kann also im nächsten, sowie in den folgenden Lemmata, bedenkenlos durch $\mathrm{Var}_\gamma Z_t$ dividieren.

Lemma 1.2: *Es sei $\lambda \in (0,1)$ und $t \in \mathbb{N}$. $\{\gamma_\nu\}$ und $\{\delta_\nu\}$ bezeichnen die nicht negativen Autokovarianzfunktionen zweier (schwach) stationärer Prozesse mit $0 < \delta_0 \leq \gamma_0$ und $\gamma_i \delta_s \leq \gamma_s \delta_i$ für $0 \leq i \leq s \leq t-1$. Dann gilt*

$$\frac{\mathrm{Var}_\gamma Z_{t-1}}{\mathrm{Var}_\gamma Z_t} \leq \frac{\mathrm{Var}_\delta Z_{t-1}}{\mathrm{Var}_\delta Z_t}.$$

Die Ungleichung ist strikt, falls $\gamma_i \delta_s < \gamma_s \delta_i$ für mindestens ein Paar (i,s) mit $0 \leq i \leq s \leq t-1$ richtig ist.

Beweis: Die Behauptung ist äquivalent zu

$$\mathrm{Var}_\gamma Z_{t-1} \, \mathrm{Var}_\delta Z_t \leq \mathrm{Var}_\gamma Z_t \, \mathrm{Var}_\delta Z_{t-1}$$

und gilt trivialerweise für $t = 1$. Es bleibt zu zeigen, daß die Behauptung auch für $t \geq 2$ gilt.

Mit der Rekursion (1.2) folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu,\mu=0}^{t-2} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \gamma_{\nu-\mu} \sum_{\nu,\mu=0}^{t-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \delta_{\nu-\mu} \\ &\qquad \leq \sum_{\nu,\mu=0}^{t-1} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \gamma_{\nu-\mu} \sum_{\nu,\mu=0}^{t-2} (1-\lambda)^{\nu+\mu} \delta_{\nu-\mu}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Zur Vereinfachung werden die Operatoren

$$\gamma(s) := \sum_{\mu=0}^{s} x^{s+\mu} \gamma_{s-\mu} \qquad \text{und}$$

$$\gamma^*(s) := \sum_{\nu,\mu=0}^{s} x^{\nu+\mu} \gamma_{\nu-\mu}$$

verwendet, wobei $x := 1 - \lambda$ gesetzt wird.

Man beachte, daß die Operatoren die folgenden Rekursionen erfüllen

$$
\begin{aligned}
\gamma(s) &= \sum_{\mu=0}^{s} x^{s+\mu}\gamma_{s-\mu} \\
&= \sum_{\mu=1}^{s} x^{s+\mu}\gamma_{s-\mu} + x^s\gamma_s \\
&= x^2 \sum_{\mu=0}^{s-1} x^{s-1+\mu}\gamma_{s-1-\mu} + x^s\gamma_s \\
&= x^2\gamma(s-1) + x^s\gamma_s,
\end{aligned}
$$

sowie, da $\gamma_t = \gamma_{-t}$ gilt,

$$
\begin{aligned}
\gamma^*(s) &= \sum_{\nu,\mu=0}^{s} x^{\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu} \\
&= \sum_{\nu,\mu=0}^{s-1} x^{\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu} + 2\sum_{\nu=0}^{s} x^{s+\nu}\gamma_{\nu-s} - x^{2s}\gamma_0 \\
&= \gamma^*(s-1) + 2\gamma(s) - x^{2s}\gamma_0.
\end{aligned}
$$

Analog zu $\gamma(s)$ und $\gamma^*(s)$ werden die Operatoren $\delta(s)$ und $\delta^*(s)$ definiert, für die natürlich ebenfalls die obigen Rekursionen gelten.

In Operatorschreibweise entspricht Ungleichung (1.7) damit

$$
\begin{aligned}
& \gamma^*(t-2)\delta^*(t-1) \le \gamma^*(t-1)\delta^*(t-2) \\
\Longleftrightarrow\ & \gamma^*(t-2)\left(\delta^*(t-2) + 2\delta(t-1) - x^{2(t-1)}\delta_0\right) \\
& \qquad \le \left(\gamma^*(t-2) + 2\gamma(t-1) - x^{2(t-1)}\gamma_0\right)\delta^*(t-2) \\
\Longleftrightarrow\ & \gamma^*(t-2)\left(2\delta(t-1) - x^{2(t-1)}\delta_0\right) \le \left(2\gamma(t-1) - x^{2(t-1)}\gamma_0\right)\delta^*(t-2). \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Mittels Induktion kann man zeigen, daß die Ungleichung (1.8) für $t \ge 2$ gültig ist.

Für $t = 2$ entspricht (1.8) aufgrund der gemachten Voraussetzungen

$$
\begin{aligned}
& \gamma_0\left(2x\delta_1 + 2x^2\delta_0 - x^2\delta_0\right) \le \left(2x\gamma_1 + 2x^2\gamma_0 - x^2\gamma_0\right)\delta_0 \\
\Longleftrightarrow\ & \gamma_0\delta_1 \le \gamma_1\delta_0.
\end{aligned}
$$

Für den Induktionsschritt von t nach $t+1$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& \gamma^*(t-1)\left(2\delta(t) - x^{2t}\delta_0\right) - \left(2\gamma(t) - x^{2t}\gamma_0\right)\delta^*(t-1) \\
&\quad = \left(\gamma^*(t-2) + 2\gamma(t-1) - x^{2(t-1)}\gamma_0\right)\left(2x^2\delta(t-1) + 2x^t\delta_t - x^{2t}\delta_0\right) \\
&\qquad - \left(2x^2\gamma(t-1) + 2x^t\gamma_t - x^{2t}\gamma_0\right)\left(\delta^*(t-2) + 2\delta(t-1)\right. \\
&\qquad \left. - x^{2(t-1)}\delta_0\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= 2x^2\gamma^*(t-2)\delta(t-1) + 2x^t\gamma^*(t-2)\delta_t - x^{2t}\gamma^*(t-2)\delta_0 \\
&\qquad + 4x^2\gamma(t-1)\delta(t-1) + 4x^t\gamma(t-1)\delta_t - 2x^{2t}\gamma(t-1)\delta_0 \\
&\qquad - 2x^{2t}\gamma_0\delta(t-1) - 2x^{3t-2}\gamma_0\delta_t + x^{4t-2}\gamma_0\delta_0 \\
&\qquad - 2x^2\gamma(t-1)\delta^*(t-2) - 4x^2\gamma(t-1)\delta(t-1) \\
&\qquad + 2x^{2t}\gamma(t-1)\delta_0 - 2x^t\gamma_t\delta^*(t-2) - 4x^t\gamma_t\delta(t-1) \\
&\qquad + 2x^{3t-2}\gamma_t\delta_0 + x^{2t}\gamma_0\delta^*(t-2) + 2x^{2t}\gamma_0\delta(t-1) \\
&\qquad - x^{4t-2}\gamma_0\delta_0 \\
&= x^2\Big[\gamma^*(t-2)\left(2\delta(t-1) - x^{2(t-1)}\delta_0\right) - \left(2\gamma(t-1) - x^{2(t-1)}\gamma_0\right) \\
&\qquad \delta^*(t-2)\Big] + 2x^t\left(\gamma^*(t-2)\delta_t - \gamma_t\delta^*(t-2)\right) \\
&\qquad + 4x^t\left(\gamma(t-1)\delta_t - \gamma_t\delta(t-1)\right) \\
&\qquad - 2x^{3t-2}\left(\gamma_0\delta_t - \gamma_t\delta_0\right),
\end{aligned}$$

woraus mit der Induktionsbehauptung unmittelbar folgt, daß

$$\begin{aligned}
&\leq 2x^t\left(\gamma^*(t-2)\delta_t - \gamma_t\delta^*(t-2)\right) + 4x^t\left(\gamma(t-1)\delta_t - \gamma_t\delta(t-1)\right) \\
&\qquad - 2x^{3t-2}\left(\gamma_0\delta_t - \gamma_t\delta_0\right) \\
&= 2x^t\Big(\gamma^*(t-2)\delta_t + 2\gamma(t-1)\delta_t - x^{2(t-1)}\gamma_0\delta_t \\
&\qquad - \gamma_t\delta^*(t-2) - 2\gamma_t\delta(t-1) + x^{2(t-1)}\gamma_t\delta_0\Big) \\
&= 2x^t\left(\gamma^*(t-1)\delta_t - \gamma_t\delta^*(t-1)\right) \\
&= 2x^t\sum_{\nu,\mu=0}^{t-1} x^{\nu+\mu}\left(\gamma_{\nu-\mu}\delta_t - \gamma_t\delta_{\nu-\mu}\right) \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

da $\gamma_i\delta_t \leq \gamma_t\delta_i$ für $0 \leq i \leq t-1$ ist.

Die Ungleichung ist offensichtlich strikt, falls $\gamma_i\delta_s < \gamma_s\delta_i$ für mindestens ein Paar (i, s) mit $0 \leq i \leq s \leq t$ gültig ist. □

Da

$$\frac{\mathrm{Var}_\gamma Z_i}{\mathrm{Var}_\gamma Z_t} = \prod_{\nu=i+1}^{t} \frac{\mathrm{Var}_\gamma Z_{\nu-1}}{\mathrm{Var}_\gamma Z_\nu}$$

gilt, impliziert Lemma 1.2

$$\frac{\mathrm{Var}_\gamma Z_i}{\mathrm{Var}_\gamma Z_t} \leq \frac{\mathrm{Var}_\delta Z_i}{\mathrm{Var}_\delta Z_t}. \tag{1.9}$$

Lemma 1.3: *Es sei $\{X_t\}$ ein (schwach) stationärer Prozeß mit positiver Autokovarianzfunktion $\{\gamma_\nu\}$. Falls $i, t \in \mathbb{N}_0$, $i \leq t$, dann gilt*

$$\operatorname{Var}_\gamma Z_t - \operatorname{Var}_\gamma Z_i \geq (1-\lambda)^{2i} \operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}.$$

Beweis: Mit der Notation aus Lemma 1.2 und der Rekursion (1.2) gilt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}_\gamma Z_t - \operatorname{Var}_\gamma Z_i \\
&\quad = \lambda^2 \left(\gamma^*(t-1) - \gamma^*(i-1)\right) \\
&\quad = \lambda^2 \left(\gamma^*(i-1) + 2\sum_{\nu=i}^{t-1}\sum_{\mu=0}^{i-1} x^{\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu} + \sum_{\nu,\mu=i}^{t-1} x^{\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu} - \gamma^*(i-1)\right) \\
&\quad = \lambda^2 \left(2\sum_{\nu=i}^{t-1}\sum_{\mu=0}^{i-1} x^{\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu} + \sum_{\nu,\mu=0}^{t-i-1} x^{2i+\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu}\right) \\
&\quad = \lambda^2 \left(2\sum_{\nu=i}^{t-1}\sum_{\mu=0}^{i-1} x^{\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu} + x^{2i}\gamma^*(t-i-1)\right) \\
&\quad = 2\lambda^2 \sum_{\nu=i}^{t-1}\sum_{\mu=0}^{i-1} x^{\nu+\mu}\gamma_{\nu-\mu} + x^{2i} \operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i} \\
&\quad \geq x^{2i} \operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}.
\end{aligned}$$

□

Das nächste Ergebnis spielt eine zentrale Rolle im Beweis von Satz 1.1. Der Beweis dazu basiert auf den vorhergehenden Lemmata.

Lemma 1.4: *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 1.2 erfüllt. Dann gilt für $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq t$, daß*

$$\operatorname{Corr}_\delta(Z_t, Z_{t-i}) \leq \operatorname{Corr}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}).$$

Für $i < t$ ist die Ungleichung strikt, falls $\gamma_j\delta_s < \gamma_s\delta_j$ für mindestens ein Paar (j, s) mit $0 \leq j \leq s \leq t-1$ gültig ist.

Beweis: Mit Lemma 1.1 folgt, daß

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{Corr}_\gamma(Z_t, Z_{t-i}) \\
&\quad = (1-\lambda)^i \sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}} + \frac{1}{(1-\lambda)^i}\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_t - \operatorname{Var}_\gamma Z_i}{\sqrt{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}\sqrt{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\lambda)^i \sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}} + \frac{1}{(1-\lambda)^i} \sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}} \left(1 - \frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_i}{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}\right) \\
&\geq (1-\lambda)^i \sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}} + \frac{1}{(1-\lambda)^i} \sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}} \left(1 - \frac{\operatorname{Var}_\delta Z_i}{\operatorname{Var}_\delta Z_t}\right), \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

wegen (1.9).

Die rechte Seite von Ungleichung (1.10) ist vom Typ $g(z) := az + b/(az)$ mit $a = (1-\lambda)^i$ und $b = (1 - \operatorname{Var}_\delta Z_i / \operatorname{Var}_\delta Z_t)$. Differenzieren von $g(z)$ zeigt, daß $g(z)$ für $0 < z \leq \sqrt{b/a^2}$ monoton fallend ist. Da nach Ungleichung (1.9) und Lemma 1.3

$$
\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\gamma Z_t} \leq \frac{\operatorname{Var}_\delta Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\delta Z_t} \leq \frac{1}{(1-\lambda)^{2i}} \left(1 - \frac{\operatorname{Var}_\delta Z_i}{\operatorname{Var}_\delta Z_t}\right) = \frac{b}{a^2}
$$

ist, gilt somit

$$
\begin{aligned}
g&\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\gamma Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\gamma Z_t}}\right) \\
&\geq g\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\delta Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\delta Z_t}}\right) \\
&= (1-\lambda)^i \sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\delta Z_{t-i}}{\operatorname{Var}_\delta Z_t}} + \frac{1}{(1-\lambda)^i} \sqrt{\frac{\operatorname{Var}_\delta Z_t}{\operatorname{Var}_\delta Z_{t-i}}} \left(1 - \frac{\operatorname{Var}_\delta Z_i}{\operatorname{Var}_\delta Z_t}\right) \\
&= 2 \operatorname{Corr}_\delta (Z_t, Z_{t-i}),
\end{aligned}
$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Es ist offensichtlich, daß für $i < t$ die Ungleichung (1.10) unter der zusätzlich gemachten Voraussetzung $\gamma_j \delta_s < \gamma_s \delta_j$ für mindestens ein Paar (j, s) mit $0 \leq j \leq s \leq t-1$ strikt ist. $\square$

Zusätzlich benötigt man noch die Ungleichung von Slepian, die der Vollständigkeit halber hier wiedergegeben wird.

Satz 1.2: Ungleichung von Slepian

Der Zufallsvektor $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k)^T$ genüge einer mehrdimensionalen Normalverteilung mit Erwartungsvektor $\mathbf{0}$ und Korrelationsmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$. Es seien $\boldsymbol{R} = (\rho_{i,j})$ und $\boldsymbol{T} = (\tau_{i,j})$ zwei positiv semidefinite Korrelationsmatrizen mit $\rho_{i,j} \geq \tau_{i,j}$. Dann gilt für alle $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k)^T$, daß

$$
P_{\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{Y_i \leq a_i\}\right) \geq P_{\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{T}}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{Y_i \leq a_i\}\right).
$$

Die Ungleichung ist strikt, falls $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{T}$ positiv definit sind und $\rho_{i,j} > \tau_{i,j}$ für mindestens ein Paar (i, j) gilt.

Beweis: Vergleiche Tong (1980, Theorem 2.1.1)). □

Mit diesen Ergebnissen kann nun Satz 1.1 bewiesen werden.

Beweis von Satz 1.1: Es gilt, daß

$$\begin{aligned} P(N_e > k) &= P\left(Z_i - \mu_0 \leq c\sqrt{\operatorname{Var} Z_i} \quad \text{für } i = 1, \ldots, k\right) \\ &= P\left(\max_{1 \leq i \leq k} \frac{Z_i - \mu_0}{\sqrt{\operatorname{Var} Z_i}} \leq c\right). \end{aligned}$$

Der Zufallsvektor $\left((Z_1 - \mu_0)/\sqrt{\operatorname{Var} Z_1}, \ldots, (Z_k - \mu_0)/\sqrt{\operatorname{Var} Z_k}\right)$ genügt einer mehrdimensionalen Normalverteilung mit Mittelwertvektor $\mathbf{0}$.

Für $\lambda \in (0, 1)$ folgt die Behauptung aus Lemma 1.4 und Slepian's Ungleichung. Falls $\lambda = 1$ gilt, so ist die Behauptung eine direkte Konsequenz von Slepian's Ungleichung.

Die zweite Aussage folgt aus der Gleichung

$$E\left(N_e^\kappa\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+1)^\kappa - k^\kappa\right) P\left(N_e > k\right).$$

□

Kapitel 2

Simultane $\bar{X}$-S^2-Karten

Obwohl in der Praxis in vielen Fällen der Mittelwert und die Streuung eines Produktionsprozesses kontrolliert werden müssen, werden gemeinsame Karten zur Kontrolle von Mittelwert und Streuung in der Literatur eher selten diskutiert. Dies liegt zum einen daran, daß in einfachen Fällen, wie der gemeinsamen $\bar{X}$-R-Karte, die Eigenschaften der simultanen Karte direkt aus den Eigenschaften der einzelnen Karten abgeleitet werden können. Zum anderen ist die Ursache darin zu suchen, daß in komplizierten Fällen, wie zum Beispiel zweier EWMA-Karten zur Kontrolle von Mittelwert beziehungsweise Streuung, die Eigenschaften der Karten nur sehr schwer zu bestimmen sind.

Zu den wenigen Veröffentlichungen über simultane Kontrollschemata gehören unter anderem Arbeiten von SANIGA (1977, 1979, 1984, 1989), der sich insbesondere mit dem ökonomischen Design der gemeinsamen $\bar{X}$-R-Karte beschäftigte, eine Arbeit von DOMANGUE und PATCH (1991) über eine EWMA-Karte zur gleichzeitigen Kontrolle von Mittelwert und Streuung, sowie eine Veröffentlichung von GAN (1995), in der verschiedene EWMA-Karten zur simultanen Kontrolle miteinander verglichen werden.

Der Großteil der Literatur über Kontrollschemata für korrelierte Beobachtungen beschäftigt sich mit der Kontrolle des Mittelwertes. Untersuchungen über Kontrollkarten für die Streuung bei abhängigen Daten existieren kaum. Zu den wenigen Ausnahmen zählt die Arbeit von MACGREGOR und HARRIS (1993), die eine auf der EWMA-Karte basierende Karte zur Kontrolle der Streuung bei Zeitreihen entwickelt, sowie eine Arbeit von AMIN et al. (1995b), die den Einfluß korrelierter Daten auf die R- und die S^2-Karte untersucht.

Eines der weitverbreitetsten Verfahren zur Kontrolle von Mittelwert und Streuung bei unabhängigen Karten ist die $\bar{X}$-S^2-Karte. Dies liegt unter anderem daran, daß die S^2-Karte bei unabhängigen Daten eine sehr gute Leistungsfähigkeit zeigt. Wie AMIN et al. (1995a) gezeigt haben, ändert sich dies bei abhängigen Daten jedoch drastisch. Untersuchungen über das Verhalten der gemeinsamen Karte bei korrelierten

Daten existieren in der Literatur bisher noch nicht. In diesem Kapitel soll eine simultane $\bar{X}$-S^2-Karte für Zeitreihen entwickelt werden. Zunächst wird in Abschnitt 2.1 die gemeinsame Dichte und Verteilung dieser Statistiken für eine relativ allgemeine Abhängigkeitsstruktur bestimmt. Mit diesem Ergebnis kann in Abschnitt 2.2 das Verhalten der klassischen Kontrollkarte bei korrelierten Daten untersucht werden. Daran anschließend wird in Abschnitt 2.3 das modifizierte Kontrolldesign für den wichtigen Spezialfall eines autoregressiven Prozesses erster Ordnung eingehender untersucht. Abschließend werden in Abschnitt 2.4 die klassische Karte und die modifizierte Karte mit der Residuenkarte verglichen.

2.1 Berechnung der gemeinsamen Dichte und Verteilung

2.1.1 Quadratische und lineare Formen in Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt sei $\boldsymbol{X}$ eine n-dimensionale, normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungsvektor $\mathbf{0}$ und positiv definiter Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$, d.h. $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Gegeben sei die quadratische Form

$$Q_1(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}, \tag{2.1}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix mit $\operatorname{rg} A = p$ ist, sowie die lineare Form

$$Q_2(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}. \tag{2.2}$$

Ziel dieses Abschnitts ist es, die gemeinsame Dichte und Verteilung von $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $Q_2(\boldsymbol{X})$ zu bestimmen. Es erweist sich als hilfreich, eine von (2.1) und (2.2) abweichende Repräsentation zu verwenden, die im folgenden Lemma formuliert wird.

Lemma 2.1: *Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit $\boldsymbol{\Sigma}$ positiv definit. Dann läßt sich die quadratische Form $Q_1(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ als*

$$Q_1(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i^2$$

darstellen und für die lineare Form $Q_2(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{X}$ gilt

$$Q_2(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{h}^{*T} \boldsymbol{U},$$

wobei

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X},$$
$$\boldsymbol{h}^* = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{h}$$

und $\boldsymbol{P}$ *orthogonal mit*

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: \boldsymbol{\Lambda}.$$

Dabei sind $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *die Eigenwerte von* $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$.

Beweis: Mit der normierten Zufallsvariablen

$$\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}$$

erhält man

$$\begin{aligned} Q_1 &= \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \\ &= \left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Z}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Z}\right) \\ &= \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Z} \\ &= \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}, \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{P}$ eine orthogonale Matrix ist, die $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$ auf Hauptachsenform bringt, d.h.

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Mit $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{h}^* = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{h}$ folgen dann die Behauptungen.

□

Um das Hauptergebnis dieses Kapitels zu beweisen, benötigt man die gemeinsame momenterzeugende Funktion von $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $Q_2(\boldsymbol{X})$. Diese wird in dem folgenden Lemma bestimmt.

Lemma 2.2: *Sei* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ *mit* $\boldsymbol{\Sigma}$ *positiv definit. Dann gilt für die gemeinsame momenterzeugende Funktion der Formen* $Q_1(\boldsymbol{X})$ *und* $Q_2(\boldsymbol{X})$ *aus (2.1) und (2.2)*

$$\begin{aligned} M_{Q_1,Q_2}(t_1, t_2) &= |\boldsymbol{I} - 2t_1\boldsymbol{\Lambda}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}t_2^2\boldsymbol{h}^{*T}(\boldsymbol{I} - 2t_1\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{h}^*\right) \\ &= \prod_{j=1}^{p}(1 - 2t_1\lambda_j)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}t_2^2\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{h_j^{*2}}{1 - 2t_1\lambda_j} + \sum_{j=p+1}^{n}h_j^{*2}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Beweis: Siehe Mathai und Provost (1992, S.66 ff.) □

Man kann nun den folgenden Satz zeigen.

Satz 2.1: *Es sei $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit $\boldsymbol{\Sigma}$ positiv definit. Zusätzlich sei $\beta > \frac{1}{2}\lambda_1$ und $p > 2$, falls $\sum\limits_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} > 0$ gilt, ansonsten sei $p > 4$. Dann ist durch*

$$f_{Q_1,Q_2}(q_1, q_2) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{i,j}}{\sqrt{2\pi}} g_i^{(p)}(q_1) q_2^{2j} \tag{2.4}$$

die gemeinsame Dichte der Formen $Q_1(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ und $Q_2(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{X}$ mit $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ gegeben. Die Funktion

$$\begin{aligned} F_{Q_1,|Q_2|}(q_1, q_2) = &\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{i+1,j}}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\beta}{2j+1} g_i^{(p+2)}(q_1) q_2^{2j+1} \\ &+ \chi_p^2\left(\frac{q_1}{\beta}\right)\left(\Phi\left(\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right) - \Phi\left(-\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

definiert dann die gemeinsame Verteilung der Formen $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $|Q_2(\boldsymbol{X})|$.

Dabei gilt $p = \operatorname{rg} \boldsymbol{A}$, $\beta > 0$ beliebig und die Funktion $g_i^{(p)}(x)$ ist gegeben durch

$$g_i^{(p)}(x) = \frac{i!}{2\beta\Gamma\left(\frac{p}{2}+i\right)}\left(\frac{x}{2\beta}\right)^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) L_i^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2\beta}\right), \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $L_k^{(\alpha)}(x)$ das k-te verallgemeinerte Laguerre-Polynom der Ordnung α bezeichnet, d.h.

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{k!}\exp(x)x^{-\alpha}\left(\frac{d^k}{dx^k}\left(\exp(-x)x^{k+\alpha}\right)\right), \quad \alpha > -1, k \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Koeffizienten $f_{i,j}$ gilt

$$f_{i,j} := \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{k} a_l c_{k-l} e_{i-k,j}$$

für $i, j \geq 0$ mit

$$a_0 = 1, \qquad a_i = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{i-1} a_k \sum_{l=1}^{p} \gamma_l^{i-k}, \quad i \geq 1,$$

$$b_0 = \sum_{j=1}^{n} h_j^{*2}, \qquad b_i = \sum_{k=1}^{p} h_k^{*2} \gamma_k^{i-1} (\gamma_k - 1), \quad i \geq 1,$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{b_0}}, \qquad c_i = -\frac{1}{2ib_0} \sum_{k=0}^{i-1} (i+k) c_k b_{i-k}, \quad i \geq 1,$$

$$d_0 = -\frac{1}{2b_0}, \qquad d_i = -\frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{i-1} d_k b_{i-k}, \quad i \geq 1$$

und

$$e_{0,0} = 1, \qquad e_{i,0} = 0, \quad i \geq 1,$$

$$e_{0,j} = \frac{d_0^j}{j!}, \quad j \geq 0 \qquad e_{i,j} = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} (i-k) e_{k,j-1} d_{i-k}, \quad i \geq 1, j \geq 1.$$

Weiterhin gilt $\gamma_i = 1 - \lambda_i/\beta$, wobei λ_i und h_i^*, $i = 1, \ldots, n$, durch Lemma 2.1 definiert sind.

Der Beweis von Satz 2.1 erfolgt im Anschluß.

Die Funktion

$$l_i^{(p)}(x) := \frac{1}{\binom{\frac{p}{2}+i-1}{i}} L_i^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}(x)$$

läßt sich aufgrund der rekursiven Darstellung

$$l_i^{(p)}(x) = \left(2 - \frac{p+2x}{p+2i-2}\right) l_{i-1}^{(p)}(x) - \left(1 - \frac{p}{p+2i-2}\right) l_{i-2}^{(p)}(x)$$

für $i \geq 2$, mit $l_0^{(p)}(x) = 1$ und $l_1^{(p)}(x) = 1 - 2x/p$ (vergleiche Johnson und Kotz (1968)) recht einfach berechnen.

Unter Anwendung des Horner Schemas und der obigen rekursiven Darstellung von $l_i^{(p)}(x)$, können die Reihen (2.4) und (2.5) aus Satz 2.1 für einen endlichen oberen Summationsindex verhältnismäßig einfach ausgewertet werden. Dies ist im Hinblick auf die praktische Anwendung dieser Ergebnisse (vergleiche Abschnitt 2.3) von großer Bedeutung.

Die im folgenden Beweis benötigten Lemmata 2.4 bis 2.7 sind reiner technischer Natur und werden daher erst im Anschluß an den Beweis formuliert.

Beweis von Satz 2.1: Wie in Lemma 2.1 vorausgesetzt, gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Aus $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = p$ folgt, daß $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ sind.

Da die momenterzeugende Funktion $M_{Q_1,Q_2}(t_1, t_2)$ in einer geeigneten Umgebung von $\mathbf{0}$ sinnvoll definiert ist, sind die folgenden Berechnungen für $|t_1| < \varepsilon$ und $|t_2| < \varepsilon$ mit entsprechend gewähltem $\varepsilon > 0$ zulässig.

Es sei nun $\beta > 0$ beliebig gewählt. Definiere $\theta_1 := \dfrac{-2\beta t_1}{1 - 2\beta t_1}$ und $\gamma_j := 1 - \dfrac{\lambda_j}{\beta}$ für $j = 1, \ldots, p$, dann ist $\dfrac{1}{1 - 2t_1\lambda_j} = \dfrac{1 - \theta_1}{1 - \gamma_j\theta_1}$ für $j = 1, \ldots, p$.

Daraus ergibt sich mit (2.3), daß

$$\begin{aligned} M_{Q_1,Q_2}(t_1, t_2) &= (1 - \theta_1)^{\frac{p}{2}} \prod_{j=1}^{p} (1 - \gamma_j\theta_1)^{-\frac{1}{2}} \\ &\qquad \exp\left(\frac{1}{2}t_2^2 \left((1 - \theta_1) \sum_{j=1}^{p} \frac{h_j^{*2}}{1 - \gamma_j\theta_1} + \sum_{j=p+1}^{n} h_j^{*2}\right)\right) \\ &= (1 - \theta_1)^{\frac{p}{2}}\, a(\theta_1) \exp\left(\frac{1}{2}t_2^2 b(\theta_2)\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

mit

$$a(x) = \prod_{j=1}^{p} (1 - \gamma_j x)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$b(x) = (1 - x) \sum_{j=1}^{p} \frac{h_j^{*2}}{1 - \gamma_j x} + \sum_{j=p+1}^{n} h_j^{*2}.$$

Mittels einer Rücktransformation kann man aus der gemeinsamen momenterzeugenden Funktion von $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $Q_2(\boldsymbol{X})$ die gemeinsame Dichte von $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $Q_2(\boldsymbol{X})$ berechnen. Da eine direkte Rücktransformation von (2.6) nicht möglich ist, muß man zuerst eine Entwicklung von $M_{Q_1,Q_2}(t_1, t_2)$ in eine Potenzreihe bestimmen, auf die dann unter Zuhilfenahme geeigneter Hilfsmittel eine Rücktransformation angewendet werden kann.

Für $u > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) \exp(tx)\, dx = \exp\left(\frac{1}{2}t^2 u\right)$$

und somit folgt aus (2.6)

$$M_{Q_1,Q_2}(t_1,t_2) = (1-\theta_1)^{\frac{p}{2}} a(\theta_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi b(\theta_1)}} \exp(t_2 x) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{b(\theta_1)}\right) dx \tag{2.7}$$

für $b(\theta_1) > 0$.

Mit Lemma 2.7 kann für $|\gamma_i \theta_1| < 1$, $i = 1, \ldots, p$ die Entwicklung

$$\frac{a(\theta_1)}{\sqrt{b(\theta_1)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{b(\theta_1)}\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}\theta_1^i x^{2j} \tag{2.8}$$

gezeigt werden, wobei die Koeffizienten $f_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}_0$ in Lemma 2.7 definiert werden. Wegen $|\gamma_j \theta_1| < 1$, ist die vorige Bedingung $b(\theta_1) > 0$ äquivalent zu $\boldsymbol{h}^* \neq \mathbf{0}$. Dies ist aufgrund der Voraussetzung $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$ erfüllt.

Mittels dieser Entwicklung und der Darstellung (2.7) erhält man also für die gemeinsame momenterzeugende Funktion von Q_1 und Q_2 den Ausdruck

$$M_{Q_1,Q_2}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_2 x) \frac{(1-\theta_1)^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}\theta_1^i x^{2j}\, dx.$$

Nach Lemma 2.3 gilt für $|2\beta t_1| < 1$

$$\int_0^{\infty} \exp(t_1 x)\, g_i^{(p)}(x)\, dx = (1-\theta_1)^{\frac{p}{2}}\theta_1^i$$

mit

$$g_i^{(p)}(x) = \frac{i!}{2\beta\Gamma\left(\frac{p}{2}+i\right)} \left(\frac{x}{2\beta}\right)^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) L_i^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2\beta}\right).$$

Mit dieser Identität erhält man

$$\begin{aligned} M_{Q_1,Q_2}(t_1,t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_2 x) \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{f_{i,j}}{\sqrt{2\pi}} x^{2j} \int_0^{\infty} \exp(t_1 y)\, g_i^{(p)}(y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \exp(t_1 y + t_2 x) \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{f_{i,j}}{\sqrt{2\pi}} g_i^{(p)}(y) x^{2j}\, dy\, dx \qquad (2.9) \\ &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_1 y + t_2 x) \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{f_{i,j}}{\sqrt{2\pi}} g_i^{(p)}(y) x^{2j}\, dx\, dy, \qquad (2.10) \end{aligned}$$

wobei die Vertauschung von Summation und Integration in (2.9) durch Lemma 2.4 und die Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (2.10) durch Lemma 2.5 gewährleistet werden.

Unter Anwendung von Lemma 2.6 folgt die gemeinsame Dichte von $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $Q_2(\boldsymbol{X})$ aus der Gleichung (2.10) durch eine Rücktransformation der momenterzeugenden Funktion. Es gilt also

$$f_{Q_1,Q_2}(q_1,q_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{f_{i,j}}{\sqrt{2\pi}} g_i^{(p)}(q_1) q_2^{2j} \tag{2.11}$$

für $q_1 \geq 0$ und $q_2 \in \mathbb{R}$.

Definiert man für $q_1, q_2 \geq 0$ die Funktion

$$F_{Q_1,|Q_2|}(q_1,q_2) := \int_0^{q_1} \int_{-q_2}^{q_2} f_{Q_1,Q_2}(x,y)\, dx\, dy,$$

dann entspricht $F_{Q_1,|Q_2|}(q_1,q_2)$ der gemeinsamen Verteilung von $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $|Q_2(\boldsymbol{X})|$.

Für $i \geq 1$ gilt unter Verwendung von Lemma 2.3

$$\begin{aligned}
\int_0^{q_1} g_i^{(p)}(x)\, dx &= \int_0^{q_1} \frac{i!}{2\beta\Gamma\left(\frac{p}{2}+i\right)} \left(\frac{x}{2\beta}\right)^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) L_i^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2\beta}\right) \\
&= \int_0^{\frac{q_1}{2\beta}} \frac{i!}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+i\right)} u^{\frac{p}{2}-1} \exp(-u) L_i^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}(u) \\
&= \frac{(i-1)!}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+i\right)} \left(\frac{q_1}{2\beta}\right)^{\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{q_1}{2\beta}\right) L_{i-1}^{\left(\frac{p}{2}\right)}\left(\frac{q_1}{2\beta}\right) \\
&= 2\beta g_{i-1}^{(p+2)}(q_1).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{q_1} g_0^{(p)}(x)\, dx &= \int_0^{q_1} \frac{1}{2\beta\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left(\frac{x}{2\beta}\right)^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{q_1}{\beta}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} u^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\, dx \\
&= \chi_p^2\left(\frac{q_1}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

Da

$$f_{0,j} = a_0 c_0 e_{0,j} = \frac{1}{j!\sqrt{b_0}} \left(-\frac{1}{2b_0}\right)^j$$

gilt, ist

$$\begin{aligned}
\int_{-q_2}^{q_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{0,j}}{\sqrt{2\pi}} y^{2j}\, dy &= \int_{-q_2}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_0}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{y^2}{2b_0}\right)^j dy \\
&= \int_{-q_2}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{2b_0}\right) dy \\
&= \Phi\left(\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right) - \Phi\left(-\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man also für $F_{Q_1,|Q_2|}(q_1, q_2)$

$$\begin{aligned}
&F_{Q_1,|Q_2|}(q_1, q_2) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{i,j}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{q_1} g_i^{(p)}(x)\, dx \int_{-q_2}^{q_2} y^{2j}\, dy + \int_0^{q_1} g_0^{(p)}(x)\, dx \int_{-q_2}^{q_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{0,j}}{\sqrt{2\pi}} y^{2j}\, dy \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{i,j}}{\sqrt{2\pi}} 2\beta g_{i-1}^{(p+2)}(q_1) \frac{2}{2j+1} q_2^{2j+1} \\
&\qquad + \chi_p^2\left(\frac{q_1}{\beta}\right) \left(\Phi\left(\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right) - \Phi\left(-\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{f_{i+1,j}}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\beta}{2j+1} g_i^{(p+2)}(q_1) q_2^{2j+1} \\
&\qquad + \chi_p^2\left(\frac{q_1}{\beta}\right) \left(\Phi\left(\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right) - \Phi\left(-\frac{q_2}{\sqrt{b_0}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Da $(Q_1(\boldsymbol{X}), Q_2(\boldsymbol{X}))$ und $(Q_1(\boldsymbol{X}), -Q_2(\boldsymbol{X}))$ identisch verteilt sind, erhält man die gemeinsame Verteilung von $Q_1(\boldsymbol{X})$ und $Q_2(\boldsymbol{X})$ durch den Zusammenhang

$$F_{Q_1,Q_2}(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left(F_{Q_1}(q_1) + \operatorname{sgn}(q_2) F_{Q_1,|Q_2|}(q_1, |q_2|)\right), \tag{2.12}$$

wobei die Verteilungsfunktion $F_{Q_1}(q_1)$ von Q_1 zum Beispiel in Mathai und Provost (1992) oder Frank (1995) gegeben ist. □

Für den Beweis von Satz 2.1 ist das folgende Lemma hilfreich. Es liefert Eigenschaften für das verallgemeinerte Laguerre-Polynom, die für diverse Umformungen im Beweis benötigt werden.

Lemma 2.3: *Für das verallgemeinerte Laguerre-Polynom gelten die folgenden Beziehungen, wobei die Bezeichnungen aus Satz 2.1 übernommen werden.*

(a) $L_k^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{(-x)^r}{r!(k-r)!} \prod_{j=r+1}^{k} (\alpha + j)$ *für* $\alpha > -1, k \in \mathbb{N}_0$,

(b) $\int_0^\infty \exp(tx) g_i^{(\alpha)}(x)\, dx = \left(\frac{1}{1-2\beta t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{-2\beta t}{1-2\beta t}\right)^i$ *für* $|2\beta t| < 1$ *und*

(c) $\int_0^y x^{\alpha-1} e^{-x} L_k^{(\alpha-1)}(x)\, dx = \frac{1}{k} y^\alpha e^{-y} L_{k-1}^{(\alpha)}(y)$ *für* $k \geq 1$.

Beweis: Zu (a):
Da

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}\left(\exp(-x)x^{k+\alpha}\right) &= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{d^r}{dx^r}\left(\exp(-x)\right) \frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}}\left(x^{\alpha+k}\right) \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \exp(-x) x^{\alpha+r} \prod_{j=r+1}^{k} (\alpha + j)
\end{aligned}$$

folgt für das verallgemeinerte Laguerre-Polynom der Ordnung α

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{(-x)^r}{r!(k-r)!} \prod_{j=r+1}^{k} (\alpha + j).$$

Zu (b):

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp(tx) g_i^{(\alpha)}(x)\, dx \\
&\quad = \int_0^\infty \exp(tx) \frac{i!}{2\beta\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+i\right)} \left(\frac{x}{2\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) \sum_{r=0}^{i} \frac{1}{r!(i-r)!} \\
&\qquad\qquad \left(-\frac{x}{2\beta}\right)^r \prod_{j=r+1}^{i} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 + j\right) dx
\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \frac{(-1)^r}{2\beta\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+i\right)} \prod_{j=r+1}^{i} \left(\frac{\alpha}{2}-1+j\right)$$
$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1-2\beta t}{2\beta}x\right)\left(\frac{x}{2\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1+r} dx.$$

Substitution mit $u = x/(2\beta)$ ergibt

$$= \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \frac{(-1)^r}{2\beta\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+i\right)} \prod_{j=r+1}^{i} \left(\frac{\alpha}{2}-1+j\right)$$
$$2\beta \int_0^\infty \exp\left(-(1-2\beta t)u\right) u^{\frac{\alpha}{2}-1+r} du.$$

Für $|2\beta t| < 1$ gilt damit

$$\int_0^\infty \exp(tx) g_i^{(\alpha)}(x)\, dx$$
$$= \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \frac{(-1)^r}{2\beta\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+i\right)} \prod_{j=r+1}^{i} \left(\frac{\alpha}{2}-1+j\right) 2\beta \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+r\right)}{(1-2\beta t)^{\frac{\alpha}{2}+r}}$$
$$= \left(\frac{1}{1-2\beta t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \left(\frac{-1}{1-2\beta t}\right)^r$$
$$= \left(\frac{1}{1-2\beta t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{-2\beta t}{1-2\beta t}\right)^i.$$

Zu (c):
Sei $k \geq 1$.

$$\left(\frac{1}{k} y^\alpha e^{-y} L_{k-1}^{(\alpha)}(y)\right)'$$
$$= \left(\frac{1}{k} e^{-y} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^r}{r!(k-1-r)!} y^{\alpha+r} \prod_{j=r+1}^{k-1} (\alpha+j)\right)'$$
$$= -\frac{1}{k} e^{-y} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^r}{r!(k-1-r)!} y^{\alpha+r} \prod_{j=r+1}^{k-1} (\alpha+j) + \frac{1}{k} e^{-y}$$
$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^r}{r!(k-1-r)!} y^{\alpha+r-1} \prod_{j=r}^{k-1} (\alpha+j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} e^{-y} y^{\alpha-1} \Bigg(\sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{1}{(r-1)!(k-r)!} + \frac{1}{r!(k-1+r)!} \right) (-y)^r \\
&\qquad \prod_{j=r}^{k-1} (\alpha+j) + \frac{1}{(k-1)!} (-y)^k + \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha+j) \Bigg) \\
&= e^{-y} y^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{k} \frac{(-y)^r}{r!(k-r)!} \prod_{j=r+1}^{k} (\alpha+j-1) \\
&= y^{\alpha-1} e^{-y} L_k^{(\alpha-1)}(y).
\end{aligned}
$$

Da

$$\int_0^0 x^{\alpha-1} e^{-x} L_k^{(\alpha-1)}(x)\, dx = 0 = \frac{1}{k} 0^\alpha e^{-0} L_{k-1}^{(\alpha)}(0)$$

gilt, folgt somit

$$\int_0^y x^{\alpha-1} e^{-x} L_k^{(\alpha-1)}(x)\, dx = \frac{1}{k} y^\alpha e^{-y} L_{k-1}^{(\alpha)}(y).$$

□

Die folgenden zwei Lemmata spielen eine entscheidende Rolle im Beweis von Satz 2.1. Sie stellen sicher, daß die Vertauschung von Summation und Integration, beziehungsweise der Integrationsreihenfolge, in der momenterzeugenden Funktion $M_{Q_1,Q_2}(t_1, t_2)$ von (Q_1, Q_2) zulässig ist (vergleiche Gleichungen (2.9) und (2.10)).

Lemma 2.4: *Es sei $s < 1/(4\beta)$, $\beta > \frac{1}{2}\lambda_1$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_0^\infty \exp(sy) \sum_{i,j=0}^\infty \left| f_{i,j} g_i^{(p)}(y) x^{2j} \right| dy < \infty.$$

Beweis: Nach (2.8) gilt für $|\gamma_j \theta_1| < 1$, $j = 1, \ldots, p$

$$h(\theta_1, x) := \frac{a(\theta_1)}{\sqrt{b(\theta_1)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{b(\theta_1)} \right) = \sum_{i,j=0}^\infty f_{i,j} \theta_1^i x^{2j} > 0.$$

Aufgrund der Äquivalenz

$$|\gamma_j z_1| < 1, j = 1, \ldots,\ p \quad \Longleftrightarrow \quad |z_1| < \frac{1}{\max\limits_{1 \le j \le p} |1 - \lambda_j/\beta|}$$

folgt, daß $h(z_1, z_2)$ holomorph für $z_2 \in \mathbb{C}$ und $|z_1| < \left(\max\limits_{1\le j\le p} |1-\lambda_j/\beta|\right)^{-1}$ ist.

Es sei nun $0 < r_1 < \left(\max\limits_{1\le j\le p} |1-\lambda_j/\beta|\right)^{-1}$ und $r_2 > |x|$. Wegen

$$\max_{1\le j\le p} |1-\lambda_j/\beta| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta > \frac{1}{2}\lambda_1 \tag{2.13}$$

kann $r_1 > 1$ gewählt werden.

Nach der Cauchy-Ungleichung für mehrdimensionale holomorphe Funktionen (vergleiche VLADIMIROV (1966, Abschnitt 4.4)), gilt für die Koeffizienten $f_{i,j}$ der Reihenentwicklung von $h(\theta_1, z)$, daß

$$|f_{i,j}| \le \frac{1}{r_1^i r_2^{2j}} \max_{(z_1,z_2)\in \bar{D}(r_1,r_2)} |h(z_1,z_2)|$$

mit $D(r_1, r_2) = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |z_i| < r_i, i = 1, 2\right\}$ ist.

Im folgenden bezeichnen C_i, $i = 1, \ldots, 4$, positive Konstanten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|g_i^{(p)}(y)\right| &= \left|\frac{1}{2\beta\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\binom{\frac{p}{2}+i-1}{i}}\left(\frac{y}{2\beta}\right)^{\frac{p}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2\beta}\right)L_i^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right)\right| \\
&\le C_1 y^{\frac{p}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2\beta}\right)\frac{1}{\binom{\frac{p}{2}+i-1}{i}}\exp\left(\frac{y}{4\beta}\right)\frac{1}{(1-R)^{\frac{p}{2}}R^i} \\
&= C_2 y^{\frac{p}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{4\beta}\right)\frac{1}{\binom{\frac{p}{2}+i-1}{i}}\frac{1}{R^i}
\end{aligned}$$

mit $0 < R < 1$ beliebig (vergleiche KOTZ et al. (1967b, Seite 832)). Da für $p \ge 2$

$$\binom{\frac{p}{2}+i-1}{i} = \prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{p/2-1}{j}\right) \ge 1$$

und

$$\binom{i-\frac{1}{2}}{i} \ge \frac{1}{2i},$$

gilt für $p \ge 1$

$$\left|g_i^{(p)}(y)\right| \le C_3 y^{\frac{p}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{4\beta}\right)\frac{i}{R^i}.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty \exp(sy) \sum_{i,j=0}^\infty \left| f_{i,j} g_i^{(p)}(y) \right| x^{2j}\, dy \\
&\quad \le C_4 \int\limits_0^\infty \exp(sy)\, dy \sum_{i,j=0}^\infty \frac{i x^{2j}}{r_1^i r_2^{2j} R^i}\, y^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{4\beta}\right) \\
&\quad = C_4 \sum_{i=0}^\infty \frac{i}{(Rr_1)^i} \sum_{j=0}^\infty \left(\frac{x}{r_2}\right)^{2j} \int\limits_0^\infty y^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-y\left(\frac{1}{4\beta} - s\right)\right)\, dy \\
&\quad = C_4 \frac{1/(Rr_1)}{\big(1 - 1/(Rr_1)\big)^2} \frac{1}{1 - (x/r_2)^2} \int\limits_0^\infty y^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-y\left(\frac{1}{4\beta} - s\right)\right)\, dy.
\end{aligned}$$

Dabei wurde R derartig gewählt, daß $Rr_1 > 1$ gilt. Dann folgt für $s < 1/(4\beta)$

$$\int\limits_0^\infty \exp(sy) \sum_{i,j=0}^\infty \left| f_{i,j} g_i^{(p)}(y) \right| x^{2j}\, dy < \infty.$$

$\square$

Lemma 2.5: *Es sei* $0 < s < 1/(4\beta)$ *und* $\beta > \frac{1}{2}\lambda_1$. *Außerdem sei* $p > 2$ *für* $\sum_{j=p+1}^n h_j^{*2} > 0$ *beziehungsweise* $p > 4$, *falls* $\sum_{j=p+1}^n h_j^{*2} = 0$. *Dann gilt für* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *mit* $|t_1| < s$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_0^\infty \exp(t_1 y + t_2 x) \left| \sum_{i,j=0}^\infty f_{i,j} g_i^{(p)}(y) x^{2j} \right| dy\, dx < \infty.$$

Beweis: Es sei $\theta_1 := -2\beta t_1/(1 - 2\beta t_1)$ (vergleiche Beweis von Satz 2.1) und

$$K(t_1, x) := \frac{a(\theta_1)}{\sqrt{b(\theta_1)}} (1 - \theta_1)^{\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{b(\theta_1)}\right)$$

für $|t_1| < 1/(4\beta)$. Da zunächst angenommen wird, daß x fest ist, soll im folgenden die vereinfachte Notation $K(t_1)$ verwendet werden. Dann gilt für $|t_1| < 1/(4\beta)$ mit

Lemma 2.3(b)

$$\begin{aligned} K(t_1) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}\theta_1^i(1-\theta_1)^{\frac{p}{2}}x^{2j} \qquad (2.14) \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}x^{2j}\int_0^{\infty}\exp(t_1y)g_i^{(p)}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Man beachte, daß Gleichung (2.14) aufgrund der Äquivalenz (2.13) gilt.

Es sei $\tau_x(y) = \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}g_i^{(p)}(y)x^{2j}$. Dann folgt mit Lemma 2.4

$$\begin{aligned} K(t_1) &= \int_0^{\infty}\exp(t_1y)\sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}g_i^{(p)}(y)x^{2j}\,dy \\ &= \int_0^{\infty}\exp(t_1y)\tau_x(y)\,dy. \end{aligned}$$

Nach dem Umkehrsatz für Laplacetransformierte Funktionen (vergleiche KAWATA (1972, Satz 7.4.4)) folgt für $y > 0$

$$\begin{aligned} \tau_x(y) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-s-iT}^{-s+iT} K(-z)\exp(zy)\,dz \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iT}^{s+iT} K(z)\exp(-zy)\,dz \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} K(s+it)\exp\big(-(s+it)y\big)\,dt. \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Wegen (2.15) ist es somit hinreichend zu zeigen, daß

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(t_1y+t_2x)\,|K(s+it)|\exp(-sy)\,dx\,dt\,dy < \infty,$$

denn dies impliziert

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\exp(t_1y+t_2x)\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|K(s+it)|\exp(-sy)\,dt\,dy\,dx < \infty,$$

also die Behauptung.

Es ist

$$K(s+it)=\prod_{j=1}^{p}\left(1-2\lambda_j(s+it)\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{h_j^{*2}}{1-2\lambda_j(s+it)}+\sum\limits_{j=p+1}^{n}h_j^{*2}}}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{h_j^{*2}}{1-2\lambda_j(s+it)}+\sum\limits_{j=p+1}^{n}h_j^{*2}}\right).$$

Mit

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p}\frac{h_j^{*2}}{1-2\lambda_j(s+it)}+\sum_{j=p+1}^{n}h_j^{*2}\\
&\quad=\sum_{j=1}^{p}h_j^{*2}\frac{1-2\lambda_j s+i2\lambda_j t}{(1-2\lambda_j s)^2+4\lambda_j^2t^2}+\sum_{j=p+1}^{n}h_j^{*2}\\
&\quad=\left(\sum_{j=1}^{p}h_j^{*2}\frac{1-2\lambda_j s}{(1-2\lambda_j s)^2+4\lambda_j^2t^2}+\sum_{j=p+1}^{n}h_j^{*2}\right)\\
&\qquad\qquad+i\left(\sum_{j=1}^{p}h_j^{*2}\frac{2\lambda_j t}{(1-2\lambda_j s)^2+4\lambda_j^2t^2}\right)\\
&\quad=:A+iB
\end{aligned}$$

und wegen

$$\left|\exp\left(\frac{c}{a+ib}\right)\right|=\exp\left(\frac{ac}{a^2+b^2}\right)$$

für $a,b,c\in\mathbb{R},\ a^2+b^2>0$, folgt

$$|K(s+it)|=\prod_{j=1}^{p}\left|1-2\lambda_j(s+it)\right|^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|A+iB|}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\frac{A}{A^2+B^2}\right). \tag{2.16}$$

Mit $s<\frac{1}{4\beta}<\frac{1}{2\lambda_1}$ ist $1-2\lambda_j s>0,\ j=1,\dots,p$. Da ferner $\boldsymbol{h}^*\neq\mathbf{0}$ ist, gilt $A>0$.

Weiterhin gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(t_2x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\frac{A}{A^2+B^2}\right)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{A}{A^2+B^2}}\,x \right)^2 - 2t_2 \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A}} \sqrt{\frac{A}{A^2+B^2}}\,x \right) \right] dx \\
&= \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2 - 2t_2 \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A}} u \right) \right] du \\
&= \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A}} \exp\left(\frac{1}{2} t_2^2 \frac{A^2+B^2}{A} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(u - t_2 \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A}} \right)^2 \right] du \\
&= \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A}} \exp\left(\frac{1}{2} t_2^2 \frac{A^2+B^2}{A} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} v^2 \right) dv \\
&= \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A}} \exp\left(\frac{1}{2} t_2^2 \frac{A^2+B^2}{A} \right).
\end{aligned}
$$

Nun ist $(A^2+B^2)/A$ gleichmäßig beschränkt in t. Dies ist offensichtlich für den Fall $\sum_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} > 0$. Ist dagegen $\sum_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} = 0$, so ergibt sich aus $\boldsymbol{h}^* \neq \mathbf{0}$, daß $\sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} > 0$ ist. Dann folgt für $|t| > 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{A^2+B^2}{A} &\leq \sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{1}{1-2\lambda_j s} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{2\lambda_j}{(1-2\lambda_j s)^2/t^2 + 4\lambda_j^2} \right)^2}{\sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{1-2\lambda_j s}{(1-2\lambda_j s)^2/t^2 + 4\lambda_j^2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{1}{1-2\lambda_j s} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{1}{2\lambda_j} \right)^2}{\sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{1-2\lambda_j s}{(1-2\lambda_j s)^2 + 4\lambda_j^2}}.
\end{aligned}
$$

Überdies ist für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{t^2} \sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{1-2\lambda_j s}{(1-2\lambda_j s)^2/t^2 + 4\lambda_j^2} + \sum_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} \\
&\geq \frac{1}{\max\{1, t^2\}} \sum_{j=1}^{p} h_j^{*2} \frac{1-2\lambda_j s}{(1-2\lambda_j s)^2 + 4\lambda_j^2} + \sum_{j=p+1}^{n} h_j^{*2}.
\end{aligned}
$$

Für $\sum\limits_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} > 0$ ist also $A \geq \sum\limits_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} > 0$, während für $\sum\limits_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} = 0$ gilt

$$A \geq C_5 \frac{1}{\max\{1, t^2\}}.$$

Wie bereits vorher erwähnt, bezeichnen im folgenden C_i, $i = 5, \ldots 10$ positive Konstanten.

Damit gilt für $\sum\limits_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{|A+iB|}} \leq \frac{1}{\sqrt{|A|}} \leq C_6 \tag{2.17}$$

und für $\sum\limits_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{|A+iB|}} \leq \max\{1, |t|\} \frac{1}{C_5}. \tag{2.18}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left|1 - 2\lambda_j(s+it)\right|^2} &= \frac{1}{(1-2\lambda_j d)^2 + 4\lambda_j^2 t^2} \\ &\leq \frac{1}{\left(1 - 2\lambda_1 s\right)^2 + 4\lambda_p^2 t^2} \\ &=: \frac{1}{c_0 + c_1 t^2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

mit den Konstanten $c_0, c_1 > 0$.

Insgesamt folgt für $\sum\limits_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} > 0$ aus (2.16), (2.17), (2.19) und der gleichmäßigen Beschränktheit von $(A^2 + B^2)/A$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_2 x) \left|K(s+it)\right| \, dx \, dt &\leq C_7 \int_{-T}^{T} \frac{1}{(c_0 + c_1 t^2)^{\frac{p}{4}}} \, dt \\ &\leq C_8 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{p}{4}}} \, dt \\ &= C_8 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(\cosh u)^{\frac{p}{2}-1}} \, du \end{aligned}$$

$$< \infty,$$

da $p > 2$.

Für $\sum_{j=p+1}^{n} h_j^{*2} = 0$ ist dagegen mit (2.16), (2.18) und (2.19)

$$\begin{aligned}\int_{1<|t|\leq T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_2 x)\, |K(s+it)|\; dx\, dt &\leq C_9 \int_{1<|t|\leq T} \frac{|t|}{(c_0 + c_1 t^2)^{\frac{p}{4}}}\, dt \\ &\leq C_{10} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+u)^{\frac{p}{4}}}\, du \\ &< \infty\end{aligned}$$

für $-p/4 + 1 < 0$, d.h. $p > 4$.

Da für $|t_1| < s$

$$\int_0^\infty \exp(-(s-t_1)y)\; dy < \infty$$

gilt, ergibt sich somit die Behauptung

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^\infty \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_1 y + t_2 x)\, |K(s+it)| \exp(-sy)\; dx\, dt\, dy < \infty.$$

$\square$

Das nächste Lemma stellt sicher, daß der durch die Umformung der momenterzeugenden Funktion entstandene Ausdruck in (2.11) wirklich eine gemeinsame Dichte von (Q_1, Q_2) ist.

Lemma 2.6: *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.5 gilt, daß die Funktion* $\tau_x(y)/\sqrt{2\pi} = 1/\sqrt{2\pi} \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j} g_i^{(p)}(y) x^{2j}$ *eine Dichte von* (Q_1, Q_2) *ist.*

Beweis: Aus dem Beweis von Lemma 2.5 folgt

$$M(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_1 y + t_2 x) \tau_x(y)\; dx\, dy.$$

Da $M(t_1, t_2)$ die momenterzeugende Funktion von (Q_1, Q_2) ist, gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß H mit

$$M(t_1, t_2) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(t_1 y + t_2 x)\, dH(x, y).$$

Damit gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(t_1 y + t_2 x) \tau_x(y)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(t_1 y + t_2 x)\, dH(x, y). \tag{2.20}$$

Bezeichnet v das von $\tau_x(y)$ erzeugte signierte Maß, so ist

$$v = v^+ - v^- = ||v^+||\, v_*^+ - ||v^-||\, v_*^-$$

mit $||v^+|| = v^+(\mathbb{R}^2)$, $||v^-|| = v^-(\mathbb{R}^2)$ und den Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$v_*^+ = \frac{v^+}{||v^+||}$$

und

$$v_*^- = \frac{v^-}{||v^-||}.$$

Gleichung (2.20) impliziert zum einen $v(\mathbb{R}^2)/\sqrt{2\pi} = 1$ und zum anderen

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(t_1 y + t_2 x)\, d\frac{\sqrt{2\pi}H + ||v^-||\, v_*^-}{||v^+||} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(t_1 y + t_2 x)\, dv_*^+.$$

Analog zu Billingsley (1986, Satz 22.2) folgt daraus

$$\frac{\sqrt{2\pi}H + ||v^-||\, v_*^-}{||v^+||} = v_*^+,$$

d.h.

$$H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v(x, y)$$

und somit die Behauptung. □

Das nun folgende Lemma stellt im wesentlichen die Reihenentwicklungen der im Beweis von Satz 2.1 benötigten Funktionen bereit.

Lemma 2.7 (Reihenentwicklungen): *Es seien die folgenden Ausdrücke gegeben:*

$$a(x) = \prod_{j=1}^{p} (1-u_j x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$b(x) = (1-x)\sum_{j=1}^{p} \frac{v_j^2}{1-u_j x} + \sum_{j=p+1}^{n} v_j^2,$$

$$c(x) = \frac{1}{\sqrt{b(x)}},$$

$$d(x) = -\frac{1}{2b(x)},$$

$$e(x,y) = \exp\left(d(x)y^2\right) \qquad \textit{und}$$

$$f(x,y) = \frac{a(x)}{\sqrt{b(x)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2b(x)}\right),$$

mit $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ und $u_j, v_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$.
Falls $|u_i x| < 1$ für $i = 1, \ldots, p$, dann existieren Entwicklungen der Form

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \textit{mit}$$

$$a_0 = 1 \quad \textit{und} \quad a_i = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{i-1} a_k \sum_{l=1}^{p} u_l^{i-k}, \quad i \geq 1,$$

$$b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad \textit{mit}$$

$$b_0 = \sum_{j=1}^{n} {v_j}^2 \quad \textit{und} \quad b_i = \sum_{k=1}^{p} {v_k}^2 u_k^{i-1}(u_k - 1), \quad i \geq 1,$$

$$c(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad \textit{mit}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{b_0}} \quad \textit{und} \quad c_i = -\frac{1}{2ib_0}\sum_{k=0}^{i-1}(i+k)c_k b_{i-k}, \quad i \geq 1,$$

$$d(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \quad \textit{mit}$$

$$d_0 = -\frac{1}{2b_0} \quad \textit{und} \quad d_i = -\frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{i-1} d_k b_{i-k}, \quad i \geq 1,$$

$$\begin{aligned}
e(x,y) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} e_{i,j}x^i y^{2j} \quad \mathit{mit} \\
e_{0,0} &= 1, & e_{i,0} &= 0, \quad i \geq 1, \\
e_{0,j} &= \frac{d_0^j}{j!}, \quad j \geq 0 & e_{i,j} &= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{i-1}(i-k)e_{k,j-1}d_{i-k}, \quad i \geq 1, j \geq 1,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j}x^i y^{2j} \ \mathit{mit} \\
f_{i,j} &= \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{k} a_l c_{k-l} e_{i-k,j} \qquad \mathit{für}\ i,j \geq 0.
\end{aligned}$$

Beweis: **Entwicklung von** $\prod_{j=1}^{p}(1-u_j x)^{-\frac{1}{2}}$

Durch den Ansatz

$$a(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k := \prod_{j=1}^{p}(1-u_j x)^{-\frac{1}{2}}$$

erhält man für die Ableitung von $a(x)$

$$\begin{aligned}
a'(x) &= \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{p}(1-u_j x)^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{p}\frac{u_i}{1-u_i x} \\
&= \frac{1}{2}a(x)\sum_{i=1}^{p}u_i\sum_{k=0}^{\infty}u_i^k x^k \qquad \text{falls } |u_i x| < 1 \text{ für } i = 1,\ldots,p \\
&= \frac{1}{2}a(x)\sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{i=1}^{p}u_i^{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{i=1}^{p}u_i^{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{l=0}^{k}a_l\sum_{i=1}^{p}u_i^{k-l+1}.
\end{aligned}$$

Es gilt aber auch, daß

$$a'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k.$$

Somit erhält man durch Koeffizientenvergleich, daß

$$(k+1)a_{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k} a_l \sum_{i=1}^{p} u_i^{k-l+1} \qquad \text{für } k \geq 0.$$

Daraus folgt

$$a_k = \frac{1}{2k}\sum_{l=0}^{k-1} a_l \sum_{i=1}^{p} u_i^{k-l} \qquad \text{für } k \geq 1$$

und $a_0 = a(0) = 1$.

Entwicklung von $(1-x)\sum_{j=1}^{p} \frac{{v_j}^2}{1-u_j x} + \sum_{j=p+1}^{n} {v_j}^2$

Da falls $|u_j x| < 1$ für $j = 1, \ldots, p$

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{j=1}^{p}\frac{{v_j}^2}{1-u_j x} &= (1-x)\sum_{j=1}^{p} {v_j}^2 \sum_{k=0}^{\infty} u_j^k x^k \\ &= (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=1}^{p} {v_j}^2 u_j^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=1}^{p} {v_j}^2 u_j^k - \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{j=1}^{p} {v_j}^2 u_j^{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{p} {v_j}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{j=1}^{p} {v_j}^2 \left(u_j^k - u_j^{k-1}\right)\end{aligned}$$

ist, folgt

$$b(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k := (1-x)\sum_{j=1}^{p}\frac{{v_j}^2}{1-u_j x} + \sum_{j=p+1}^{n} {v_j}^2$$

mit

$$\begin{aligned} b_0 &= \sum_{j=1}^{n} {v_j}^2, \\ b_k &= \sum_{j=1}^{p} {v_j}^2 u_j^{k-1}(u_j - 1) \qquad \text{für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{b(x)}}$

Mit dem Ansatz

$$c(x) := \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i := \frac{1}{\sqrt{b(x)}}$$

kann man analog zur Reihenentwicklung von $b(x)$ durch Koeffizientenvergleich eine Reihe für $1/\sqrt{b(x)}$ entwickeln. Die Ableitung von $c(x)$ ergibt sich zum einen zu

$$c'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) c_{i+1} x^i.$$

Zum anderen gilt aber auch

$$c'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b(x)}} b^{-1}(x) b'(x).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\sqrt{b(x)}}\right)' b(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b(x)}} b'(x) \\
\iff \quad & c'(x) b(x) = -\frac{1}{2} c(x) b'(x) \\
\iff \quad & \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{k=0}^{i} (k+1) c_{k+1} b_{i-k} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{k=0}^{i} (i+1-k) c_k b_{i+1-k}.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann

$$\sum_{k=1}^{i+1} k c_k b_{i+1-k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i} (i+1-k) c_k b_{i+1-k}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
(i+1) c_{i+1} b_0 &= -\sum_{k=1}^{i} c_k b_{i+1-k} \left(\frac{i+1-k}{2} + k\right) - \frac{1}{2}(i+1) c_0 b_{i+1} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i} (i+1+k) c_k b_{i+1-k}.
\end{aligned}$$

Somit lauten die Koeffizienten für die Reihenentwicklung von $1/\sqrt{b(x)}$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\sqrt{b_0}},\\
c_i &= -\frac{1}{2ib_0}\sum_{k=0}^{i-1}(i+k)c_k b_{i-k} \qquad \text{für } i \geq 1.
\end{aligned}
$$

Entwicklung von $-\dfrac{1}{2b(x)}$

Entsprechend entwickelt man $-1/(2b(x))$ durch den Ansatz

$$d(x) := \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i := -\frac{1}{2b(x)}.$$

Für die Ableitung gilt

$$d'(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)d_{i+1}x^i.$$

Da

$$
\begin{aligned}
& & \left(-\frac{1}{2b(x)}\right)' &= \frac{1}{2}b^{-2}(x)b'(x)\\
&\iff & \left(-\frac{1}{2b(x)}\right)' b(x) &= -\left(-\frac{1}{2b(x)}\right)b'(x)\\
&\iff & d'(x)b(x) &= -d(x)b'(x)\\
&\iff & \sum_{i=0}^{\infty}x^i\sum_{k=0}^{i}(k+1)d_{k+1}b_{i-k} &= -\sum_{i=0}^{\infty}x^i\sum_{k=0}^{i}(i+1-k)d_k b_{i+1-k}
\end{aligned}
$$

gilt, ergibt ein Vergleich der Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{i+1}kd_k b_{i+1-k} = -\sum_{k=0}^{i}(i+1-k)d_k b_{i+1-k},$$

also

$$(i+1)d_{i+1}b_0 = -(i+1)\sum_{k=0}^{i}d_k b_{i+1-k}.$$

Die Koeffizienten für die Reihenentwicklung von $-1/(2b(x))$ ergeben sich nun wie folgt

$$d_0 = -\frac{1}{2b_0}$$

und

$$d_i = -\frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{i-1} d_k b_{i-k} \qquad \text{für } i \geq 1.$$

Entwicklung von $\exp\left(d(x)y^2\right)$

Für den Term $\exp\left(d(x)y^2\right)$ wählt man den Ansatz

$$e(x,y) := \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} e_{i,j}x^i y^{2j} := \exp\left(d(x)y^2\right).$$

Die partielle Ableitung von $e(x,y)$ nach x lautet

$$\frac{\partial}{\partial x}e(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)e_{i+1,j}x^i y^{2j}.$$

Es gilt aber auch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}e(x,y) &= \exp\left(d(x)y^2\right)d'(x)y^2 \\ &= e(x,y)d'(x)y^2.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)e_{i+1,j}x^i y^{2j} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}x^i y^{2j+2}\sum_{k=0}^{i}(i+1-k)e_{k,j}d_{i+1-k}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)e_{i+1,0}x^i + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(i+1)e_{i+1,j}x^i y^{2j} \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x^i y^{2j}\sum_{k=0}^{i}(i+1-k)e_{k,j-1}d_{i+1-k}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man dadurch die Koeffizienten der Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}
e_{i,0} &= 0 \qquad \text{für } i \geq 1, \\
e_{0,0} &= e(0,0) = \exp(0) = 1, \\
e_{i,j} &= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{i-1}(i-k)e_{k,j-1}d_{i-k} \qquad \text{für } i \geq 1, j \geq 1, \\
e_{0,j} &= \frac{d_0^j}{j!} \qquad \text{für } j \geq 0,
\end{aligned}$$

da

$$\sum_{j=0}^{\infty} e_{0,j}y^{2j} = e(0,y) = \exp\left(d(0)y^2\right) = \exp\left(d_0y^2\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{d_0^j}{j!}y^{2j}.$$

Entwicklung von $a(x)c(x)e(x,y)$

Abschließend definiert man folgende Reihe

$$\begin{aligned}
a(x)c(x)e(x,y) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} x^i y^{2j} \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{k} a_l c_{k-l} e_{i-k,j} \\
&=: \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}x^i y^{2j}
\end{aligned}$$

mit

$$f_{i,j} := \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{k} a_l c_{k-l} e_{i-k,j} \qquad \text{für } i,j \geq 0.$$

□

2.1.2 Die gemeinsame Verteilung einer quadratischen und linearen Form

Satz 2.1 liefert eine Möglichkeit, die gemeinsame Dichte beziehungsweise Verteilung einer quadratischen und einer linearen Form zu berechnen. Um diesen Satz für das hier gestellte Problem, die Berechnung der gemeinsamen Dichte von $\bar{X}$ und S^2 anwenden zu können, müssen die beiden Statistiken zuerst in eine den Voraussetzungen von Satz 2.1 entsprechende Form gebracht werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$\operatorname{Var} X_i = 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Man kann dann die beiden Statistiken $\bar{X}$ und S^2 wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \boldsymbol{X} \\ &= \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{h} := (1/n, \ldots, 1/n)^{\mathrm{T}}$ und

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & -\frac{1}{n(n-1)} \\ & \ddots & \\ -\frac{1}{n(n-1)} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ &= \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X} \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{A} := \frac{1}{n-1}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\,(\mathbf{1})\right)$, wobei $\boldsymbol{I}$ die Einheitsmatrix und $(\mathbf{1})$ eine Matrix bestehend aus lauter Einsen bezeichnet.

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ erfüllt unter anderem folgende Eigenschaften:

- $\boldsymbol{A}$ ist symmetrisch und positiv semidefinit, sowie
- $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = n - 1$.

Außerdem gilt aufgrund der gemachten Voraussetzungen, daß die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ der Verteilung von $\boldsymbol{X}$ symmetrisch und positiv definit ist. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und man erhält eine Möglichkeit, die exakte gemeinsame Dichte und Verteilung von $\bar{X}$ und S^2, zumindest theoretisch zu bestimmen.

Diese Möglichkeit soll im folgenden näher unter der Annahme untersucht werden, daß die Zufallsvariablen $\{X_i\}$ einem kausalen autoregressiven Prozeß erster Ordnung genügen. Es ist also

$$X_i = \alpha X_{i-1} + \varepsilon_i,$$

wobei $\{\varepsilon_i\}$ unabhängige, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen sind. Dann ist $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$ mit

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-1} \\ \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha^{n-1} & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

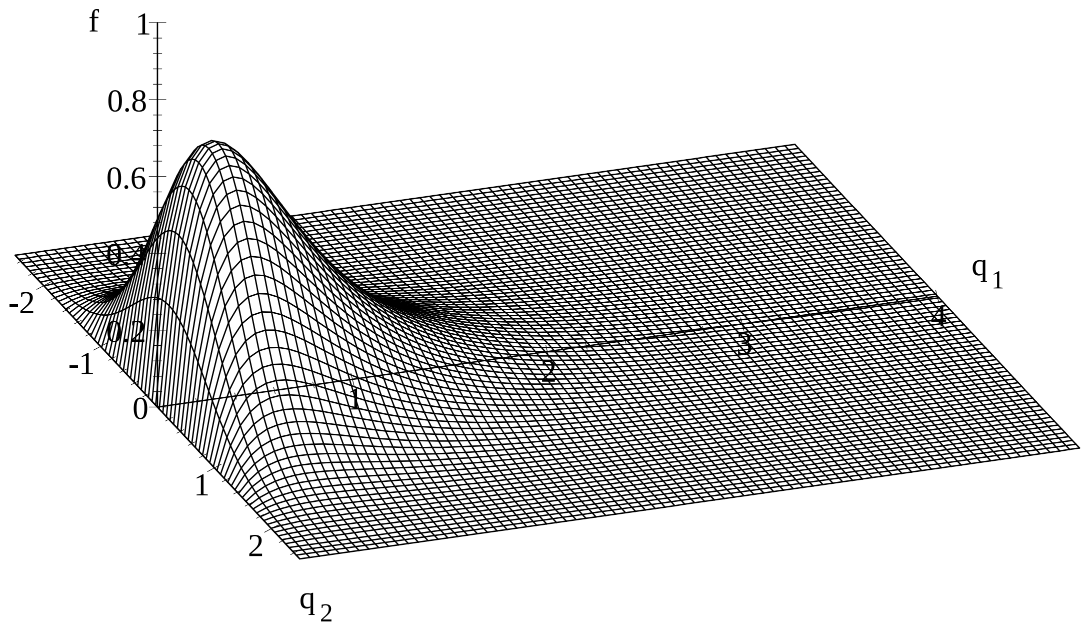

Abbildung 2.1: Gemeinsame Dichte für $n = 5$ und $\alpha = 0.5$

Wählt man $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{h}$ wie oben, kann man Satz 2.1 anwenden, um die gemeinsame Dichte und Verteilung von $\bar{X}$ und S^2 in diesem Fall zu berechnen. Analog zu der Arbeit von Kotz et al. (1967b) wird im folgenden β als $(\lambda_1 + \lambda_p)/2$ gewählt.

Zur Veranschaulichung sind in den Abbildungen 2.1 bis 2.6 die Dichten für Stichprobenumfänge von $n = 5$ beziehungsweise $n = 20$ für $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.0$ und $\alpha = -0.5$ abgebildet.

In der Praxis steht man vor dem Problem, daß man die Berechnung der Reihe nach einer endlichen Anzahl von Summanden abbrechen muß. Dies und die begrenzte Anzahl von Stellen bei der Berechnung der Reihe, führen dazu, daß bei der numerischen Auswertung der Reihen Fehler auftreten. Es stellt sich daher die Frage, wie genau das numerische Ergebnis die exakte Dichte approximiert.

Kotz et al. (1967b) haben eine Fehlerabschätzung für ein ähnlich gelagertes, eindimensionales Problem bewiesen. In der Praxis erweist sich diese Abschätzung jedoch als sehr konservativ, so daß sie keine in der Anwendung verwertbaren Ergebnisse liefert (vergleiche Frank (1995)).

Leider ist in diesem Fall keine ähnliche Abschätzung bekannt, so daß man die Güte der Approximation auf andere Art überprüfen muß. Zu diesem Zweck wurde eine groß angelegte Simulationsstudie durchgeführt, deren Ergebnisse in dem folgenden Abschnitt kurz vorgestellt werden sollen.

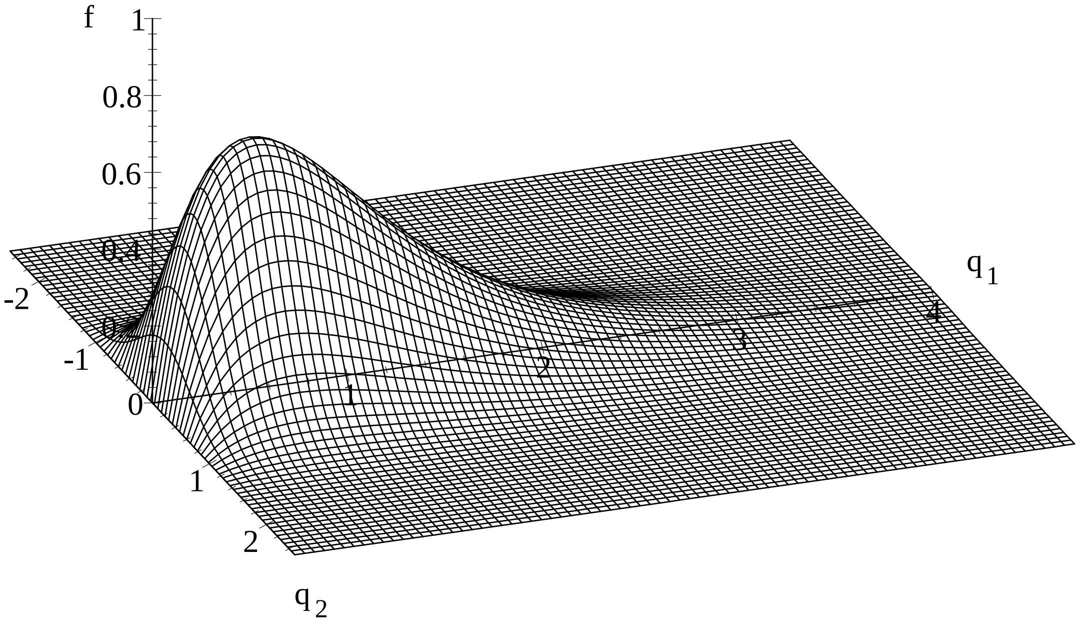

Abbildung 2.2: Gemeinsame Dichte für $n = 5$ und $\alpha = 0.0$

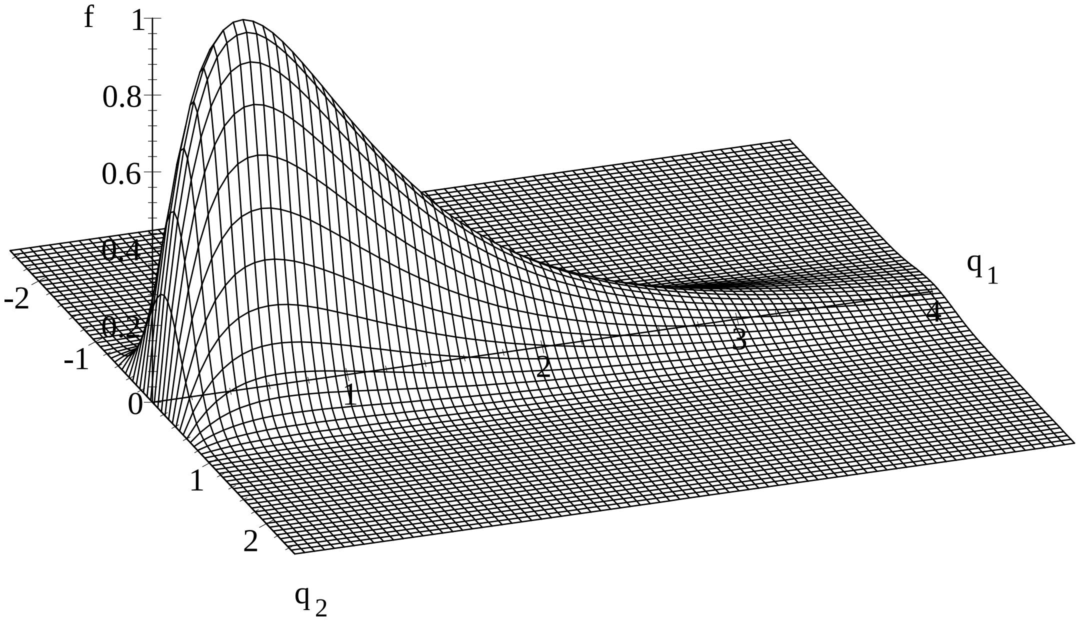

Abbildung 2.3: Gemeinsame Dichte für $n = 5$ und $\alpha = -0.5$

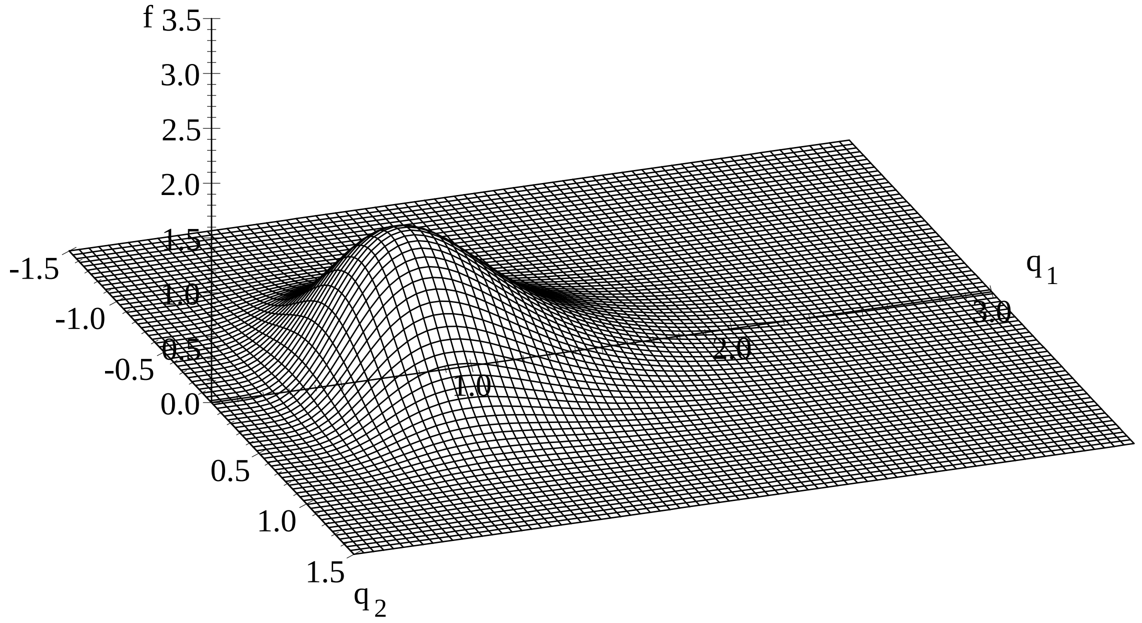

Abbildung 2.4: Gemeinsame Dichte für $n = 20$ und $\alpha = 0.5$

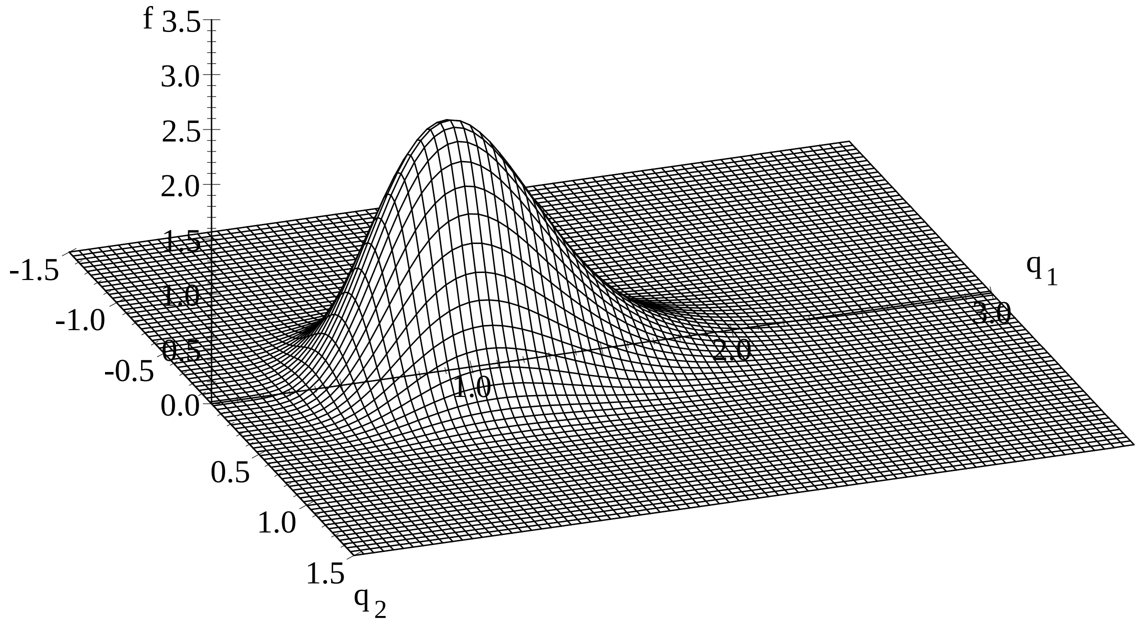

Abbildung 2.5: Gemeinsame Dichte für $n = 20$ und $\alpha = 0.0$

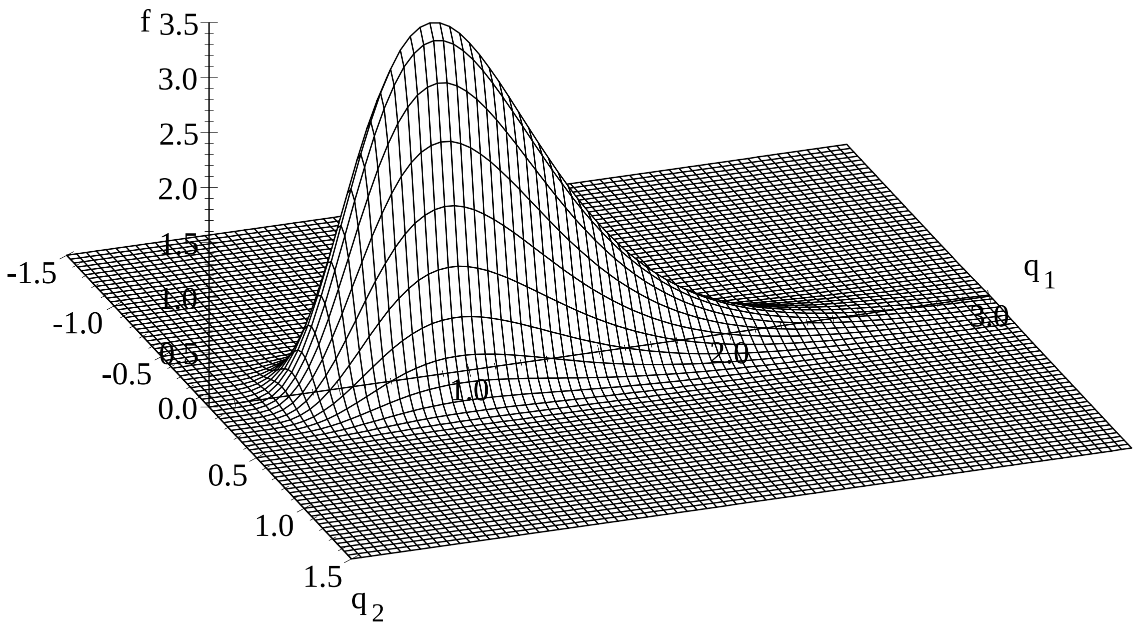

Abbildung 2.6: Gemeinsame Dichte für $n = 20$ und $\alpha = -0.5$

2.1.3 Beurteilung der Approximationsgüte

Das erste Problem bei der numerischen Auswertung der Reihen in Satz 2.1 besteht darin, wie viele Summanden der Reihe bestimmt werden sollen. Normalerweise löst man dieses Problem dadurch, daß man so lange neue Summanden berechnet, bis die Änderung der Gesamtsumme für längere Zeit unter einem vorher festgelegten, möglichst kleinem Wert bleibt. Dieses Verfahren kann in diesem Fall nicht verwendet werden, da durch die rekursive, aufeinander beruhende Art der Definition der Koeffizienten, bereits vorher festgelegt werden muß, wie viele Koeffizienten bestimmt werden sollen. Eine möglichst große Anzahl von Koeffizienten ist jedoch ineffizient, da der Aufwand zur Berechnung der Koeffizienten exponentiell ansteigt. Um dieses Problem in den Griff zu kriegen, wurde mit einer Vielzahl von unterschiedlichen oberen Summationsgrenzen experimentiert. Damit die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten etwas eingeschränkt werden konnte, wurde für beide Summen in der Doppelsumme der Verteilung dieselbe maximale Summandenanzahl N gewählt. N wurde dann zwischen 15 und 200 variiert und die Auswirkungen auf den berechneten Wert der Verteilung verglichen. Dies wurde für verschiedene Eingriffsgrenzen und Prozeßzustände durchgeführt.

Einige typische Resultate dieser Untersuchung sind in Tabelle 2.1 zu sehen. Im ersten Beispiel sieht man die Ergebnisse für eine Stichprobenanzahl von $n = 10$ und einem Prozeßparameter $\alpha = 0.3$. Dazu wurde die Verteilung an drei verschiedenen Punkten $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ berechnet. Das zweite Beispiel in Tabelle 2.1 entspricht im Vorgehen dem ersten, hier wurde jedoch $n = 25$ und $\alpha = 0.7$ gewählt.

	$\alpha = 0.3,\ n = 10$		
N	$(0.0, 1.0)$	$(0.5, 2.0)$	$(1.0, 3.0)$
200	0.31960	0.86026	0.99029
175	0.31960	0.86026	0.99029
150	0.31960	0.86026	0.99029
125	0.31960	0.86026	0.99029
100	0.31960	0.86026	0.99029
75	0.31960	0.86026	0.99029
50	0.31960	0.86026	0.99029
25	0.31960	0.86026	0.99029
20	0.31960	0.86026	0.99029
15	0.31960	0.87930	0.99363

	$\alpha = 0.7,\ n = 25$		
N	$(0.0, 1.0)$	$(0.5, 2.0)$	$(1.0, 3.0)$
200	0.36745	0.85582	0.98640
175	0.36745	0.85582	0.98640
150	0.36745	0.85582	0.98640
125	0.36745	0.85555	0.98653
100	0.36745	0.85751	0.98692
75	0.36745	0.82750	0.98104
50	0.36745	0.71323	*
25	*	*	*
20	*	*	*
15	*	*	*

Tabelle 2.1: Einfluß des Summationsindexes auf die numerische Methode (Verteilungsfunktion)

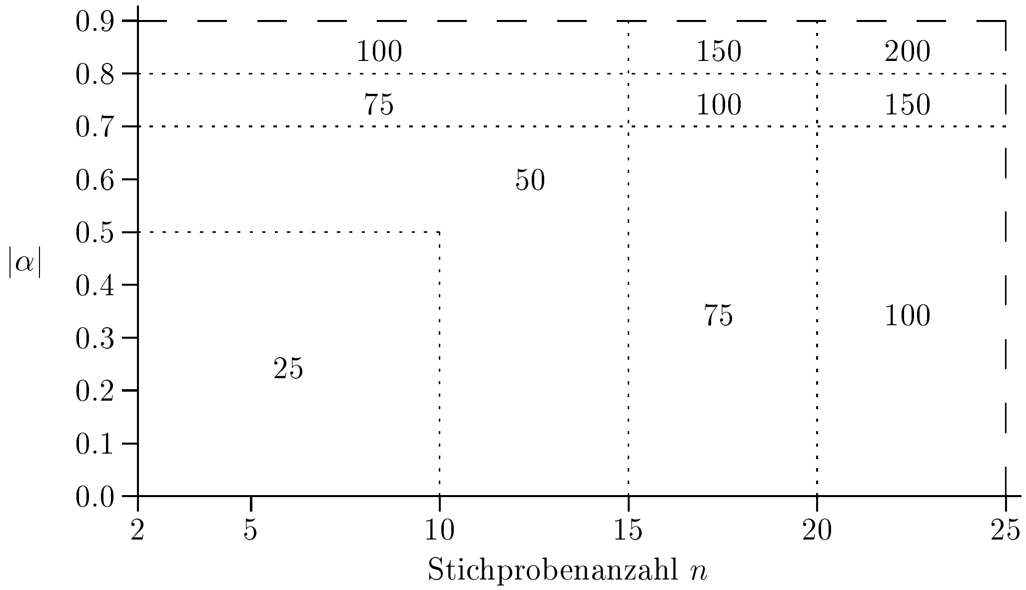

Abbildung 2.7: Optimale maximale Summandenzahl N

Wie man im ersten Beispiel sieht, ist es völlig ausreichend, eine maximale Summandenanzahl von $N = 20$ zu wählen. Höhere Werte haben auf das Ergebnis keinen Einfluß mehr. Im zweiten Beispiel hingegen erkennt man, wie wichtig es sein kann, möglichst viele Summanden zu betrachten. Erst ab $N = 150$ erhält man stabile Werte durch die Reihenauswertung.

Beide Beispiele sind typisch für die Ergebnisse dieser Untersuchung. Als Faustregel gilt, daß für kleine und mittlere Stichprobenanzahl n und betragsmäßig nicht zu große

s \ x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.25	0.22495 0.22495	0.32952 0.32942	0.40157 0.40130	0.43577 0.43554	0.44695 0.44671	0.44947 0.44925	0.44986 0.44963
0.50	0.30099 0.30078	0.44090 0.44069	0.53731 0.53695	0.58307 0.58267	0.59803 0.59763	0.60139 0.60100	0.60192 0.60150
0.75	0.34969 0.34952	0.51224 0.51205	0.62425 0.62397	0.67741 0.67708	0.69479 0.69446	0.69870 0.69839	0.69931 0.69898
1.00	0.38400 0.38392	0.56251 0.56241	0.68550 0.68532	0.74388 0.74363	0.76297 0.76272	0.76726 0.76703	0.76793 0.76768
1.25	0.40928 0.40947	0.59953 0.59969	0.73062 0.73069	0.79284 0.79279	0.81318 0.81316	0.81776 0.81776	0.81847 0.81846
1.50	0.42838 0.42873	0.62752 0.62803	0.76473 0.76516	0.82986 0.83018	0.85115 0.85146	0.85594 0.85629	0.85668 0.85702
2.00	0.45452 0.45476	0.66580 0.66617	0.81138 0.81172	0.88048 0.88064	0.90307 0.90321	0.90815 0.90832	0.90894 0.90909
2.50	0.47061 0.47067	0.68937 0.68952	0.84011 0.84017	0.91166 0.91157	0.93505 0.93496	0.94031 0.94022	0.94113 0.94103
3.00	0.48078 0.48085	0.70428 0.70450	0.85827 0.85843	0.93137 0.93137	0.95526 0.95526	0.96064 0.96064	0.96147 0.96146
3.50	0.48733 0.48733	0.71386 0.71398	0.86995 0.87002	0.94404 0.94394	0.96826 0.96814	0.97371 0.97360	0.97456 0.97444
4.00	0.49159 0.49159	0.72010 0.72022	0.87756 0.87762	0.95230 0.95221	0.97673 0.97665	0.98222 0.98216	0.98308 0.98300

Tabelle 2.2: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 2$, $\alpha = 0.3$ (Verteilungsfunktion)

α eine maximale Summandenanzahl von $N = 50$ völlig ausreicht. Erst für hohe Stichprobengrößen n und α empfiehlt es sich, die Summandenanzahl N auf 200 zu erhöhen. Diese Werte gelten für betragsmäßig große x und s. Arbeitet man hingegen nur mit kleineren bis mittleren x und s, kann die maximale Summandenanzahl N problemlos um 10 bis 20 Prozent verringert werden.

Genauere Regeln für die maximale Summandenanzahl, die auch für die weiteren Berechnungen in dieser Arbeit angewandt wurden, können Abbildung 2.7 entnommen werden.

Nachdem nun feststeht, wieviel Summanden der Reihenentwicklung ausgewertet werden sollen, stellt sich die Frage, wie genau die Approximation eigentlich ist, d.h., wie sich Approximation und Simulation bei verschiedenen Prozeßparametern zueinander verhalten.

Zur Beurteilung der Approximationsgüte wurden für eine große Anzahl von Prozeßparametern die Werte der Verteilungsfunktion an einer Vielzahl von Punkten durch

$s \backslash x$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.25	0.00207 0.00208	0.00384 0.00382	0.00413 0.00410	0.00414 0.00411	0.00414 0.00411	0.00414 0.00411	0.00450 0.00411
0.50	0.04832 0.04811	0.08964 0.08930	0.09647 0.09606	0.09664 0.09623	0.09664 0.09623	0.09664 0.09623	0.09665 0.09623
0.75	0.17185 0.17140	0.31873 0.31823	0.34309 0.34263	0.34370 0.34324	0.34370 0.34324	0.34370 0.34324	0.34371 0.34324
1.00	0.30767 0.30718	0.57054 0.57047	0.61423 0.61413	0.61534 0.61523	0.61534 0.61523	0.61534 0.61523	0.61434 0.61523
1.25	0.40370 0.40354	0.74853 0.74864	0.80593 0.80603	0.80739 0.80748	0.80740 0.80749	0.80740 0.80749	0.80740 0.80749
1.50	0.45673 0.45673	0.84678 0.84707	0.91179 0.91214	0.91345 0.91381	0.91345 0.91382	0.91345 0.91382	0.91345 0.91382
2.00	0.49284 0.49272	0.91367 0.91361	0.98388 0.98385	0.98567 0.98566	0.98568 0.98567	0.98568 0.98567	0.98568 0.98567
2.50	0.49898 0.49881	0.92504 0.92502	0.99613 0.99613	0.99795 0.99796	0.99795 0.99797	0.99795 0.99797	0.99796 0.99797
3.00	0.49986 0.49968	0.92668 0.92666	0.99790 0.99789	0.99972 0.99973	0.99973 0.99974	0.99973 0.99974	0.99974 0.99974
3.50	0.49998 0.49979	0.92690 0.92687	0.99814 0.99812	0.99996 0.99996	0.99997 0.99997	0.99997 0.99997	0.99998 0.99997
4.00	0.50000 0.49980	0.92693 0.92690	0.99817 0.99815	0.99999 0.99999	1.00000 1.00000	1.00000 1.00000	1.00000 1.00000

Tabelle 2.3: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 15$, $\alpha = 0.3$ (Verteilungsfunktion)

Simulationen bestimmt. Anschließend wurden diese Werte mit dem entsprechenden Ergebnis der numerischen Berechnung über die Formel 2.12 verglichen.

Zur Ermittlung der Simulationswerte wurden pro Tabelle 5 Millionen Stichproben mit jeweils n Elementen erzeugt, wobei n zwischen 2 und 25 variierte. Als Schätzer für den wahren Wert der Verteilung an einer beliebigen Stelle $(s, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, wurde die relative Häufigkeit des Ereignisses $(S^2, \bar{X}) \in [0, s] \times (-\infty, x]$ gewählt.

In den Tabellen 2.2 bis 2.4 sind als Beispiele die ermittelten Werte der numerischen Methode und der Simulationen für $\alpha = 0.3$ und verschiedene n gegenübergestellt. In diesen wie in den folgenden Tabellen, stehen die numerischen Ergebnisse jeweils in der ersten Zeile, während die Ergebnisse der Simulationen in der zweiten Zeile zu finden sind. Da die Verteilung in der $\bar{X}$-Komponente symmetrisch bezüglich $x = 0$ ist, wurden nur Werte für $x \geq 0$ tabelliert. Wie man erkennt, stimmen die numerisch ermittelten Werte und die Simulation selbst für hohe Stichprobengrößen noch sehr gut überein. In den meisten Fällen entsprechen sich beide Werte bis inklusive

s \ x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.25	0.00009	0.00017	0.00017	0.00017	0.00017	0.00017	0.00017
	0.00009	0.00017	0.00018	0.00018	0.00018	0.00018	0.00018
0.50	0.01666	0.03228	0.03332	0.03332	0.03332	0.03332	0.03332
	0.01654	0.03205	0.03311	0.03311	0.03311	0.03311	0.03311
0.75	0.12568	0.24348	0.25133	0.25135	0.25135	0.25135	0.25135
	0.12574	0.24345	0.25133	0.25136	0.25136	0.25136	0.25136
1.00	0.29516	0.57177	0.59026	0.59032	0.59032	0.59032	0.59032
	0.29520	0.57201	0.59052	0.59058	0.59058	0.59058	0.59058
1.25	0.41694	0.80766	0.83381	0.83389	0.83389	0.83389	0.83389
	0.41680	0.80777	0.83398	0.83407	0.83407	0.83407	0.83407
1.50	0.47290	0.91602	0.94570	0.94580	0.94580	0.94580	0.94580
	0.47251	0.91574	0.94549	0.94559	0.94559	0.94559	0.94559
2.00	0.49809	0.96479	0.99607	0.99617	0.99617	0.99617	0.99617
	0.49769	0.96464	0.99599	0.99610	0.99610	0.99610	0.99610
2.50	0.49990	0.96831	0.99970	0.99980	0.99980	0.99980	0.99980
	0.49956	0.96825	0.99971	0.99982	0.99982	0.99982	0.99982
3.00	0.50000	0.96849	0.99989	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
	0.49964	0.96842	0.99988	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.50	0.50000	0.96850	0.99990	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0.49964	0.96842	0.99989	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
4.00	0.50000	0.96850	0.99990	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0.49964	0.96842	0.99989	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Tabelle 2.4: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 25$, $\alpha = 0.3$ (Verteilungsfunktion)

zur vierten Nachkommastelle, in vielen Fällen sogar bis zur fünften oder sechsten Nachkommastelle.

Dieses Beispiel stellt jedoch bei weitem noch nicht das Optimum dar. Besonders für betragsmäßig kleine α und kleine n, stimmen Simulation und numerische Methode bis auf wenige Ausnahmen überein.

Allerdings gibt es auch Fälle, in denen die numerische Methode versagt, da trotz hohem Summationsindex und großer Rechengenauigkeit die Reihe numerisch nicht mehr konvergiert. Dies macht sich allerdings erst bei negativen α-Werten ab ungefähr -0.6 und großen Stichprobenumfang n bemerkbar. Dieser Fall tritt im allgemeinen aber nur ab betragsmäßig mittleren Werten für x auf, so daß zumindest noch für kleine x Werte die Verteilung über den numerischen Ansatz ermittelt werden kann. Ein Beispiel für diesen Fall ist in Tabelle 2.5 zu sehen. Für $|x| \leq 2.0$ konvergiert die Reihe noch sehr gut, erst ab diesen Wert versagt die numerische Methode in einigen Fällen, besonders dann, wenn auch s größere Werte annimmt.

s \ x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.25	0.00304	0.00609	0.00609	0.00609	0.00609	0.00609	0.00609
	0.00310	0.00618	0.00618	0.00618	0.00618	0.00618	0.00618
0.50	0.05906	0.11812	0.11814	0.11814	0.11814	0.11814	0.11814
	0.05926	0.11834	0.11834	0.11834	0.11834	0.11834	0.11834
0.75	0.17185	0.34371	0.34372	0.34372	0.34372	0.34372	*
	0.17216	0.34407	0.34407	0.34407	0.34407	0.34407	0.34407
1.00	0.28104	0.56208	0.56209	0.56209	0.56209	0.56209	*
	0.28110	0.56220	0.56220	0.56220	0.56220	0.56220	0.56220
1.50	0.41546	0.83093	0.83094	0.83094	0.83094	0.83094	*
	0.41514	0.83094	0.83094	0.83094	0.83094	0.83094	0.83094
2.00	0.46948	0.93896	0.93897	0.93897	0.93897	*	*
	0.46908	0.93897	0.93897	0.93897	0.93897	0.93897	0.93897
3.00	0.49614	0.99229	0.99231	0.99232	*	*	*
	0.49591	0.99237	0.99237	0.99237	0.99237	0.99237	0.99237
4.00	0.49950	0.99901	0.99901	*	*	*	*
	0.49920	0.99902	0.99902	0.99902	0.99902	0.99902	0.99902

Tabelle 2.5: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 20$, $\alpha = -0.7$ (Verteilungsfunktion)

s \ x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.25	0.00898	0.01526	0.01761	0.01794	0.01796	0.01796	0.01796
	0.00898	0.01520	0.01758	0.01793	0.01794	0.01794	0.01794
0.50	0.12013	0.20366	0.23544	0.24000	0.24025	0.24025	0.24025
	0.11976	0.20301	0.23479	0.23933	0.23957	0.23957	0.23957
0.75	0.27308	0.46223	0.53491	0.54555	0.54614	0.54615	0.54615
	0.27326	0.46212	0.53497	0.54561	0.54619	0.54620	0.54621
1.00	0.37932	0.64138	0.74273	0.75777	0.75862	0.75863	0.75863
	0.37925	0.64100	0.74259	0.75762	0.75849	0.75851	0.75851
1.50	0.46935	0.79273	0.91864	0.93759	0.93867	0.93870	0.93870
	0.46925	0.79245	0.91849	0.93740	0.93852	0.93855	0.93855
2.00	0.49240	0.83136	0.96363	0.98363	0.98478	0.98481	0.98481
	0.49236	0.83125	0.96374	0.98368	0.98487	0.98490	0.98490
3.00	0.49952	0.84324	0.97749	0.99782	0.99900	0.99903	0.99903
	0.49944	0.84310	0.97754	0.99782	0.99903	0.99906	0.99906
4.00	0.49997	0.84399	0.97837	0.99873	0.99991	0.99993	0.99993
	0.49987	0.84382	0.97839	0.99869	0.99991	0.99994	0.99994

Tabelle 2.6: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 20$, $\alpha = 0.7$ (Verteilungsfunktion)

Das dieses Problem nur für negative α auftritt, wird in Tabelle 2.6 illustriert, in der dieselben Parameter wie in Tabelle 2.5 gewählt wurden. Anstatt $\alpha = -0.7$ wurde hier jedoch der Wert 0.7 gewählt. Man erkennt, daß in diesem Fall Simulation und numerische Methode auch für große s und x wieder sehr gut übereinstimmen.

2.2 Die klassische $\bar{X}$-S^2-Kontrollkarte

2.2.1 Grundlagen

Im folgenden wird erneut zwischen zwei Prozessen unterschieden. Zum einen dem beobachteten Prozeß $\{X_{i,j}\}$ und zum anderen dem ungestörten Prozeß $\{Y_{i,j}\}$. Der Index i, j bezeichnet dabei das j-te Element der i-ten Stichprobe. Bei der klassischen simultanen $\bar{X}$-S^2-Karte wird vorausgesetzt, daß die Stichproben aus dem ungestörten Prozeß unabhängig und identisch normalverteilt sind, d.h. $Y_{i,j} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, für $i \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \ldots, n$.

Der Zusammenhang zwischen $\{X_{i,j}\}$ und $\{Y_{i,j}\}$ wird durch das Modell

$$X_{i,j} = \Delta(Y_{i,j} - \mu_0) + \mu_0 + a\sigma_0 \tag{2.21}$$

mit $\Delta \geq 1$ und $a \in \mathbb{R}$ hergestellt. Dies bedeutet, daß sowohl Störungen im Mittelwert, als auch in der Varianz modelliert werden. Im obigen Modell wären zwar auch Werte von Δ zwischen 0 und 1 sinnvoll, dies entspräche jedoch einer Verringerung der Varianz des zu kontrollierenden Prozesses. Eine solche Qualitätsverbesserung ist aber keine negative Störung des Produktionsprozesses und soll daher auch kein Signal zum Eingreifen in den Prozeß geben. Würde man zusätzlich auch noch die Produktionskosten betrachten, müßte man auch diese Werte für Δ in die Untersuchung mit einbeziehen, da eine ungewünschte Qualitätsverbesserung unter Umständen höhere Produktionskosten verursacht.

Zur Kontrolle des Prozesses verwendet man die Teststatistiken

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{i,j}$$

und

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{i,j} - \bar{X}_i\right)^2 .$$

Es gilt

$$\bar{X}_i = \Delta(\bar{Y}_i - \mu_0) + \mu_0 + a\sigma_0$$

und

$$S_i^2 = \Delta^2 S_{Y,i}^2,$$

wobei $S_{Y,i}^2$ die empirische Varianz von $Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,n}$ bezeichnet.

Die Entscheidungsregel, wann in den Prozeß eingegriffen werden muß, formuliert man mittels der normierten Teststatistiken. Man greift in den Prozeß ein, wenn entweder

$$\frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0} \notin [-x_c, x_c],$$

oder

$$\frac{S_i^2}{\sigma_0^2} \notin [0, s_c].$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Stichprobenelemente untereinander, beziehungsweise zwischen den Stichproben, kann man zu einer gewünschten durchschnittlichen Lauflänge im Zustand unter Kontrolle, ARL_0, die Eingriffsgrenzen x_c und s_c aus der Formel

$$\mathrm{ARL}_0 = \frac{1}{1 - P\left(-x_c \leq \frac{\bar{Y}_i - \mu_0}{\sigma_0} \leq x_c\right) P\left(\frac{S_{Y,i}^2}{\sigma_0^2} \leq s_c\right)}$$

berechnen. Dabei hat man noch die Freiheit, entweder x_c oder s_c vorzugeben. Im allgemeinen werden die Eingriffsgrenzen jedoch so gewählt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine der beiden Teststatistiken ein Signal zum Eingreifen gibt, im Zustand unter Kontrolle gleich groß wird. D.h., man wählt x_c und s_c so, daß

$$P\left(-x_c \leq \frac{\bar{Y}_i - \mu_0}{\sigma_0} \leq x_c\right) = P\left(\frac{S_{Y,i}^2}{\sigma_0^2} \leq s_c\right)$$

gilt. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt, daß $\sqrt{n}(\bar{Y}_i - \mu_0)/\sigma_0$ standardnormalverteilt ist, während $(n-1)S_{Y,i}^2/\sigma_0^2$ einer Chi-quadrat-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden genügt. Wählt man x_c als das $1/\sqrt{n}$ fache des $(1-\tilde{\alpha}/2)$-Quantils der Standardnormalverteilung und s_c als das $1/(n-1)$ fache des $(1-\tilde{\alpha})$-Quantils der χ_{n-1}^2-Verteilung für $\tilde{\alpha} = 1 - \sqrt{1 - 1/\mathrm{ARL}_0}$, so sind die obigen Anforderungen erfüllt.

Im gestörten Zustand ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß kein Signal zum Eingreifen in den Prozeß gegeben wird, zu

$$P_0(a, \Delta) = \left(\Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{x_c - a}{\Delta}\right) - \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{-x_c - a}{\Delta}\right)\right) \chi_{n-1}^2\left((n-1)\frac{s_c}{\Delta^2}\right).$$

Man erhält damit als durchschnittliche Lauflänge der gemeinsamen $\bar{X}$-S^2-Karte für den gestörten Prozeß

$$\mathrm{ARL}(a, \Delta) = \frac{1}{1 - P_0(a, \Delta)}.$$

2.2.2 Verhalten bei Korrelation

Das Verhalten der simultanen $\bar{X}$-S^2-Karte ist im unabhängigen Fall relativ einfach bestimmbar. Sowohl die $\bar{X}$-Karte als auch die S^2-Karte wurden in der Literatur für unabhängige, aber auch für abhängige Daten diskutiert (vergleiche Montgomery und Mastrangelo (1991), Maragah und Woodall (1992), McCulloch und Tsay (1993), Roes und Does (1995), Amin et al. (1995b)). Dabei wurde festgestellt, daß beide Karten bei abhängigen Daten eigentlich nicht mehr brauchbar sind. Man kann daher davon ausgehen, daß dies erst recht für die gemeinsame Karte zutrifft. Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt nur kurz auf die Auswirkungen korrelierter Daten auf die simultane Karte eingegangen werden.

Zur Veranschaulichung wird in den Abbildungen 2.8 und 2.9 an verschiedenen Beispielen verdeutlicht, wie sich Korrelation auf das Verhalten der Karte auswirkt. Den Beispielen zugrunde liegt ein autoregressiver Prozeß der Ordnung eins, d.h.

$$Y_{i,j} = \alpha(Y_{i,j-1} - \mu_0) + \mu_0 + \varepsilon_{i,j}$$

mit $\{\varepsilon_{i,j}\}$ unabhängige, $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Die Störungen werden, wie bereits vorher erwähnt, durch (2.21) modelliert.

Die Eingriffsgrenzen wurden so gewählt (vergleiche Abschnitt 2.3.3), daß im unabhängigen Fall, d.h. für $\alpha = 0$ im Zustand unter Kontrolle eine durchschnittliche Lauflänge von $\mathrm{ARL}_0 = 100, 200$ beziehungsweise 500 erreicht wird.

Ist nun $\alpha \neq 0$, d.h. der zugrundegelegte Prozeß ist korreliert, so ergibt sich die Varianz der ungestörten Stichproben $\{X_{i,j}\}$ zu $\gamma_0 = \sigma_0^2/(1 - \alpha^2)$. Für die Kontrolle des Prozesses verwendet der Anwender daher γ_0 anstatt von σ_0^2, die Eingriffsgrenzen entsprechen jedoch weiterhin denen des unabhängigen Falls. Die sich dadurch ergebende durchschnittliche Lauflänge ist für α von -0.9 bis 0.9 in den Abbildungen 2.8 und 2.9 für $n = 5$ und $n = 20$ abgebildet. Um das Verhalten der herkömmlichen Karte auch bei Störungen von Mittelwert und Streuung beurteilen zu können, wurde noch zusätzlich die durchschnittliche Lauflänge für zwei gestörte Prozeßzustände mit $a = 0.5$ und $\Delta = 1.1$, beziehungsweise $a = 1.0$ und $\Delta = 1.2$ berechnet.

Wie man an den Abbildungen erkennt, läßt die Leistungsfähigkeit der Karte bei abhängigen Daten stark zu wünschen übrig. Im ungestörten Zustand liegt die durchschnittliche Lauflänge für alle α außerhalb des Intervalls $[-0.2, 0.0]$ unter dem Sollwert ARL_0. Für Werte von α innerhalb dieses Intervalls kann die durchschnittliche Lauflänge sogar bis zu 125% des Sollwertes betragen. Mit wachsendem $|\alpha|$ nimmt die durchschnittliche Lauflänge dann rapide ab. Bereits für $\alpha = 0.2$ beziehungsweise $\alpha = -0.4$ beträgt die Lauflänge im Zustand unter Kontrolle nur noch 30% bis 50% des eigentlich gewünschten Wertes.

Im Zustand außer Kontrolle ergeben sich vergleichbare Resultate. Zwar wächst der Bereich in dem die durchschnittliche Lauflänge über dem entsprechenden Wert im

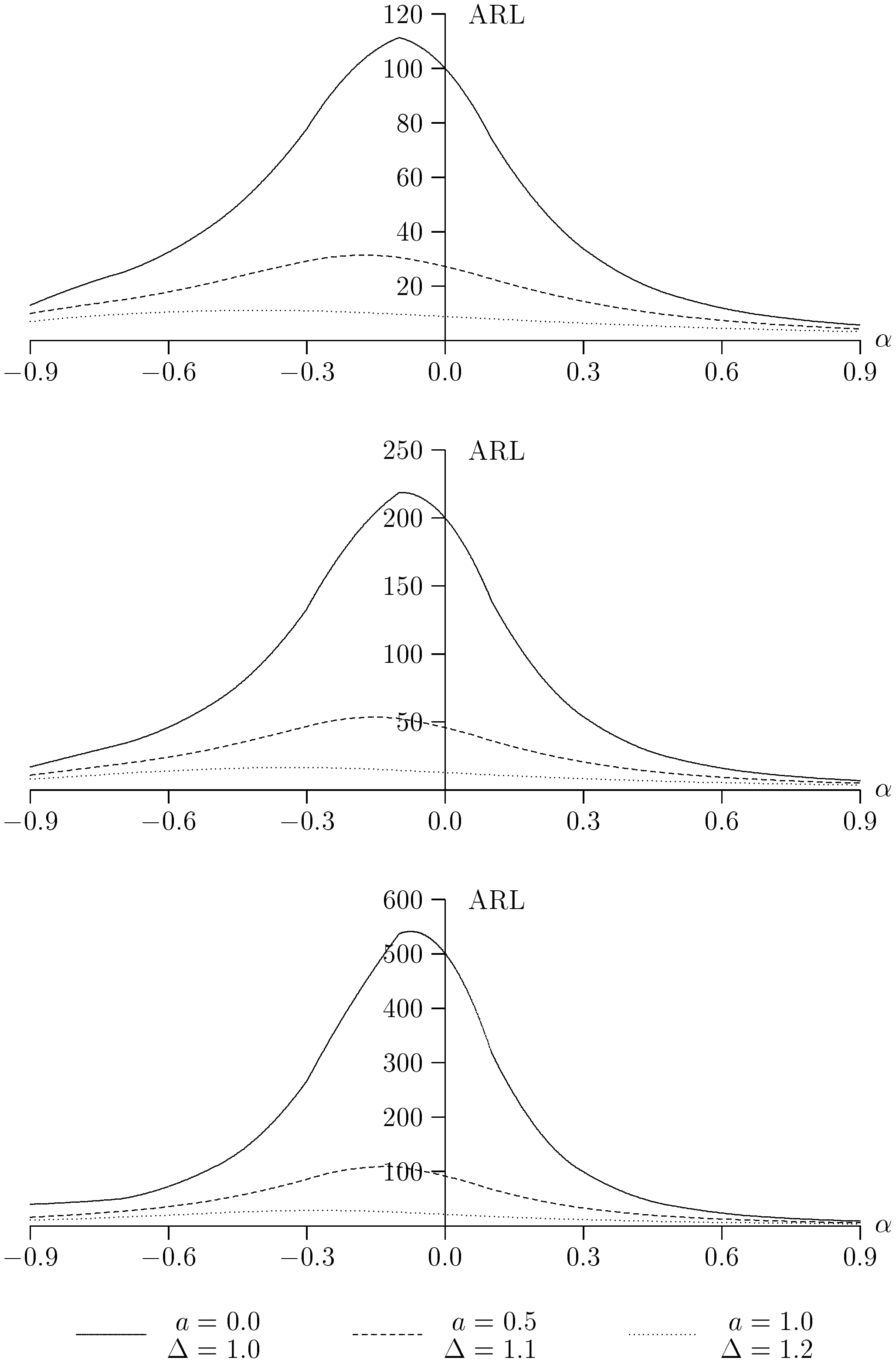

Abbildung 2.8: ARL der klassischen $\bar{X}$-S^2-Karte bei Korrelation ($n = 5$)

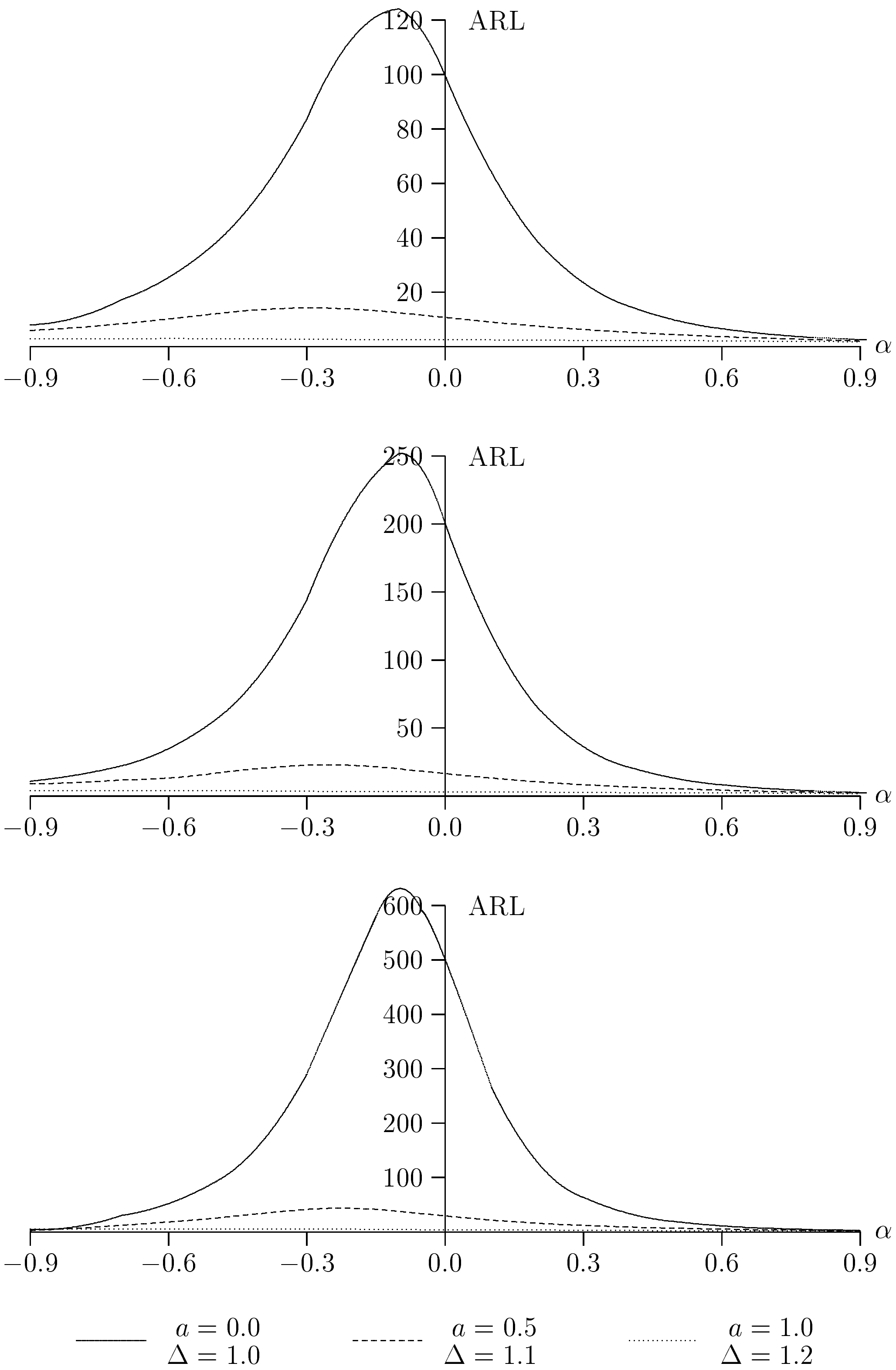

Abbildung 2.9: ARL der klassischen $\bar{X}$-S^2-Karte bei Korrelation ($n = 20$)

unkorrelierten Zustand liegt auf bis zu $[-0.5, 0.0]$, jedoch weicht auch hier bereits für betragsmäßig kleine α die durchschnittliche Lauflänge signifikant vom Sollwert ab.

Insgesamt läßt sich also feststellen, daß für korrelierte Daten die klassische simultane Kontrollkarte nicht mehr sinnvoll angewendet werden kann. Sie reagiert zwar auch für $\alpha \neq 0$ auf Änderungen in dem zugrundegelegten Prozeß, jedoch weicht die Lauflänge im ungestörten Zustand stark vom gewünschten Wert ab. Man ist nicht mehr in der Lage zu erkennen, ob die Änderungen in der durchschnittlichen Lauflänge auf Prozeßfehler oder auf die Abhängigkeit der Daten untereinander zurückzuführen sind.

2.3 Modifizierte $\bar{X}$-S^2-Karte

2.3.1 Grundlagen

Die modifizierte simultane $\bar{X}$-S^2-Karte für abhängige Daten basiert auf der in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten klassischen $\bar{X}$-S^2-Karte für unabhängige Daten. Der Unterschied besteht darin, daß man bei der Normierung der Teststatistiken die Varianz der Stichprobenelemente durch den entsprechenden Ausdruck für abhängige Daten ersetzt und die Berechnung der Eingriffsgrenzen anhand der Verteilung der Teststatistiken bei abhängigen Daten durchführt.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Elemente der einzelnen Stichproben einem autoregressiven Prozeß der Ordnung eins genügen. Folglich gilt $Y_{i,j} = \alpha(Y_{i,j-1} - \mu_0) + \mu_0 + \varepsilon_{i,j}$, wobei $\{\varepsilon_{i,j}\}$ unabhängige, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen sind. Die verschiedenen Stichproben seien unabhängig voneinander. γ_0 bezeichne die Varianz der einzelnen Stichprobenelemente $Y_{i,j}$.

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich für die Modellierung der Störung des zu kontrollierenden Prozesses

$$X_{i,j} = \Delta(Y_{i,j} - \mu_0) + \mu_0 + a\sqrt{\gamma_0}.$$

Für die Entscheidungsregel der modifizierten Karte gilt, daß man in den Prozeß eingreift, falls

$$\frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sqrt{\gamma_0}} \notin [-x_c, x_c],$$

oder

$$\frac{S_i^2}{\gamma_0} \notin [0, s_c].$$

Bereits in Abschnitt 2.1.2 wurde die gemeinsame Verteilung dieser beiden Statistiken hergeleitet, d.h. man ist auch bei der modifizierten Karte in der Lage, die genaue

Verteilung anzugeben, exakte Eingriffsgrenzen zu berechnen und somit das Verhalten der Karte im Zustand außer Kontrolle präzise vorherzusagen.

Bevor dies geschieht, soll jedoch noch einmal kurz auf die Approximationsgüte der Verteilung der modifizierten Karte eingegangen werden.

2.3.2 Beurteilung der Approximationsgüte

Wie man im Abschnitt 2.1.3 sieht, unterscheiden sich die simulierten und approximierten Werte der gemeinsamen Verteilung im allgemeinen nur sehr geringfügig voneinander. Deswegen soll an dieser Stelle ein weiterer Teil der bereits erwähnten Simulationsstudie vorgestellt werden, der sich speziell mit der durchschnittlichen Lauflänge als Vergleichsmerkmal befaßt. Diese Betrachtungsweise hat den Vorteil, daß durch die Inversion bei der Berechnung der durchschnittlichen Lauflänge, die Unterschiede zwischen den beiden Methoden „vergrößert“ werden. Außerdem ist für die Berechnung der durchschnittlichen Lauflänge nur die gemeinsame Verteilung von S^2 und $|\bar{X}|$ wichtig, so daß in diese Untersuchung nur die Verteilungsfunktion $F_{Q_1,|Q_2|}$ aus Satz 2.1 eingeht und nicht noch zusätzlich die Verteilung F_{Q_1} von S^2, die ebenfalls nur approximiert werden kann und somit zusätzlich zu Ungenauigkeiten beiträgt.

Diese Methodik hat jedoch auch Nachteile, da man nicht nur anhand der Differenzen in der Lauflänge die Güte beurteilen kann, sondern zusätzlich die übrigen Rahmenparameter mit berücksichtigen muß. Dadurch, daß die Verteilungsfunktion als Kehrwert in die Berechnung der durchschnittlichen Lauflänge eingeht, können je nach Wahl der Parameter betragsmäßige Differenzen von 10 Zeiteinheiten zwischen den beiden Methoden nur auf einen Unterschied in der fünften Nachkommastelle der zugehörigen Verteilungen hinweisen. Dies sollte bei der Beurteilung der Ergebnisse mit berücksichtigt werden.

Simulation und Approximation wurden nun folgendermaßen miteinander verglichen. Anhand vorgegebener Eingriffsgrenzen wurde durch Simulationen sowohl für den ungestörten Zustand, als auch für eine große Bandbreite von gestörten Zuständen, die durchschnittliche Lauflänge ermittelt. Im Gegensatz zu den Simulationen in Abschnitt 2.1.3 wurden in den folgenden Beispielen nur 5 000 Lauflängen pro Parameterkonstellation erzeugt. Dies mag auf den ersten Blick niedrig erscheinen. Man muß jedoch berücksichtigen, daß für jede Lauflänge je nach Wahl der Prozeßparameter und Eingriffsgrenzen im Schnitt 2 000 Zufallszahlen erzeugt werden müssen, so daß insgesamt für jede durchschnittliche Lauflänge 10 Millionen Zufallszahlen erzeugt wurden. Abweichend von der ersten Studie konnten auch nicht alle Werte einer Tabelle in einer Simulation ermittelt werden, sondern es mußte für jeden Wert der Tabelle eine neue Simulation durchgeführt werden. So benötigt man im Endeffekt ungefähr 1 Milliarde Zufallszahlen für die Erstellung einer Tabelle in diesem Abschnitt, während für die Tabellen im vorigen Abschnitt nur 5 Millionen Zufallszahlen nötig waren.

	$\alpha = 0.3$, $n = 10$		
N	in-control	out-of-control	
200	500.000	29.724	4.128
175	500.000	29.724	4.128
150	500.000	29.724	4.128
125	500.000	29.724	4.128
100	500.000	29.724	4.128
75	500.000	29.724	4.128
50	500.000	29.724	4.128
25	500.000	29.724	4.128
20	500.001	29.724	4.128
15	363.228	47.283	4.837

	$\alpha = 0.7$, $n = 25$		
N	in-control	out-of-control	
200	1000.000	66.565	12.283
175	1000.172	66.566	12.283
150	1001.445	66.573	12.283
125	969.854	66.798	12.280
100	1622.688	68.269	12.263
75	290.670	42.825	13.252
50	29.914	113.043	12.135
25	1999.208	119.403	19.921
20	*	*	*
15	*	*	*

Tabelle 2.7: Einfluß des Summationsindexes auf die numerische Methode (durchschnittlich Lauflänge)

Diese Wahl für die Anzahl der Simulationen liefert noch immer gute und verläßliche Ergebnisse, jedoch vergrößert sich dadurch natürlich die Streuung der simulierten Werte um den exakten Wert. Man sollte dies bei der Auswertung der folgenden Tabellen berücksichtigen.

Nachdem die Simulationswerte ermittelt waren, wurden für dieselben Eingriffsgrenzen und Prozeßparameter der entsprechende Wert mittels der Approximation berechnet. Dies geschah für verschiedene Werte des oberen Summationsindex.

Die Ergebnisse dieser Studie sollen erneut anhand einiger repräsentativer Beispiele erläutert werden. In allen Beispielen wurde $\mu_0 = 0$ und $\sigma_0^2 = 1$ gewählt.

Analog zur Studie in Abschnitt 2.1.3, wurde zuerst untersucht, wie sich die obere Summationsgrenze N auf die Genauigkeit auswirkt. In Tabelle 2.7 sind zwei typische Beispiele zu sehen. Im ersten Beispiel sind die Ergebnisse für eine Stichprobenanzahl von $n = 10$ und Prozeßparameter $\alpha = 0.3$ tabelliert. Die durchschnittliche Lauflänge ist für drei verschiedene Prozeßzustände aufgeführt. Zum einen im ungestörten Zustand, zum anderen zwei Zustände außer Kontrolle mit $a = 0.5$ und $\Delta = 1.1$, beziehungsweise $a = 1.0$ und $\Delta = 1.2$. Die Eingriffsgrenzen sind natürlich für alle N identisch und wurden so gewählt, daß im Zustand unter Kontrolle bei der maximalen Anzahl von Summanden eine durchschnittliche Lauflänge von 500 erreicht wird. Das zweite Beispiel in Tabelle 2.7 entspricht im Vorgehen dem ersten, hier wurde jedoch $n = 25$, $\alpha = 0.7$ und $\mathrm{ARL}_0 = 1000$ gewählt.

Wie zu erwarten, erhält man auch bei der durchschnittlichen Lauflänge als Gütekriterium analoge Ergebnisse zu denen in Abschnitt 2.1.3. Man kann daher für die obere Summationsgrenze N dieselben Empfehlungen wie in Abbildung 2.7 geben.

Diese Regeln gelten für durchschnittliche Lauflängen in der Größenordnung von 900 bis 1000. Für Werte zwischen 500 und 900 können von dem vorgeschlagenen N noch 10

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.0	500.295 505.629	385.219 389.186	207.054 207.423	98.704 98.365	47.279 47.190	23.883 23.842	12.942 12.935	4.767 4.766
1.1	180.306 181.046	150.005 150.234	94.856 94.793	53.362 53.161	29.518 29.461	16.821 16.812	10.071 10.066	4.294 4.292
1.2	82.161 82.585	71.919 72.030	50.996 50.901	32.505 32.497	20.128 20.110	12.628 12.629	8.191 8.189	3.930 3.929
1.3	44.236 44.352	40.080 40.076	30.846 30.821	21.616 21.600	14.633 14.628	9.922 9.917	6.872 6.871	3.637 3.636
1.4	26.914 26.929	24.978 24.965	20.402 20.384	15.371 15.361	11.168 11.167	8.068 8.062	5.900 5.899	3.390 3.389
1.5	17.948 17.924	16.946 16.941	14.462 14.449	11.521 11.514	8.858 8.851	6.739 6.735	5.156 5.155	3.179 3.177
2.0	5.268 5.270	5.168 5.171	4.890 4.892	4.491 4.492	4.034 4.036	3.574 3.575	3.145 3.145	2.438 2.438
2.5	2.934 2.934	2.911 2.910	2.843 2.843	2.738 2.738	2.605 2.605	2.457 2.456	2.302 2.301	2.002 2.001

Tabelle 2.8: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 2$, $\alpha = 0.3$ (durchschnittliche Lauflänge)

Prozent abgezogen werden. Bei Werten unter 500 für die durchschnittliche Lauflänge kann man ohne weiteres 20 Prozent abziehen.

Es stellt sich nun ebenfalls die Frage, wie genau die Approximation eigentlich ist, d.h., wie sich Approximation und Simulation bei verschiedenen Stichprobengrößen unterscheiden. In den Tabellen 2.8 bis 2.11 sind die Lauflängen für verschiedene α und Stichprobengrößen n von 2 bis 25 dargestellt. Analog zu den Tabellen in Abschnitt 2.1.3 stehen in der ersten Zeile der Tabellen die numerisch ermittelten Werte und in der zweiten Zeile die entsprechenden Ergebnisse der Simulation. Wie man sieht, stimmen auch für die durchschnittliche Lauflänge der numerisch ermittelte Wert und die Simulation sehr gut überein.

Die bei der Berechnung der Verteilungsfunktion auftretenden Konvergenzprobleme, spielen natürlich auch bei der Ermittlung der durchschnittlichen Lauflänge eine Rolle. Da es hier ausreicht, eine kleinere Bandbreite von Werten für a und Δ zu betrachten, treten diese Probleme jedoch seltener auf. Um dies zu veranschaulichen, sind in den Tabellen 2.10 und 2.11 die Werte für $\alpha = \pm 0.7$, $n = 25$ und eine vorgegebene Lauflänge von 500 Zeiteinheiten aufgelistet. Man erkennt, daß auch noch bei diesen Größenordnungen von n und α Simulation und numerische Methode fast übereinstimmen. Erst für $|\alpha| > 0.8$ treten bei der numerischen Auswertung der Reihenentwicklung teilweise schon für kleine a und Δ Konvergenzprobleme auf, so daß die Ergebnisse für diese Parameterkonstellationen nicht tabelliert wurden. Erst durch

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.0	498.842	215.984	51.691	14.446	5.320	2.582	1.605	1.070
	498.107	214.691	51.647	14.433	5.318	2.583	1.606	1.070
1.1	128.878	80.642	29.724	10.809	4.682	2.502	1.630	1.092
	129.446	80.301	29.685	10.799	4.681	2.503	1.630	1.092
1.2	44.298	33.966	17.601	8.187	4.128	2.410	1.641	1.114
	44.346	33.984	17.593	8.183	4.127	2.411	1.642	1.114
1.3	19.220	16.415	10.735	6.173	3.596	2.291	1.635	1.133
	19.220	16.425	10.737	6.167	3.596	2.292	1.636	1.133
1.4	10.029	9.084	6.884	4.663	3.090	2.144	1.607	1.147
	10.036	9.092	6.886	4.660	3.090	2.145	1.608	1.147
1.5	6.043	5.663	4.704	3.582	2.639	1.979	1.559	1.155
	6.050	5.669	4.707	3.582	2.640	1.981	1.560	1.155
2.0	1.689	1.669	1.614	1.532	1.435	1.337	1.247	1.113
	1.689	1.669	1.614	1.531	1.435	1.337	1.247	1.113
2.5	1.168	1.165	1.156	1.142	1.125	1.106	1.086	1.050
	1.168	1.165	1.156	1.142	1.125	1.105	1.086	1.050

Tabelle 2.9: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 10$, $\alpha = 0.3$ (durchschnittliche Lauflänge)

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.0	497.466	3.103	1.009	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	499.035	3.103	1.009	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.1	135.742	2.942	1.017	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	136.334	2.943	1.016	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.2	48.530	2.784	1.025	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	48.681	2.784	1.025	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.3	21.466	2.608	1.034	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	21.492	2.608	1.034	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.4	11.226	2.408	1.044	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	11.230	2.408	1.044	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.5	6.700	2.193	1.053	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	6.706	2.193	1.053	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2.0	1.705	1.371	1.056	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.704	1.371	1.056	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000
2.5	1.134	1.089	1.025	1.003	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.134	1.089	1.025	1.003	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabelle 2.10: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 25$, $\alpha = -0.7$ (durchschnittliche Lauflänge)

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.0	499.749	238.771	63.606	18.696	6.921	3.262	1.923	1.140
	500.835	240.154	63.885	18.706	6.930	3.262	1.923	1.140
1.1	136.960	89.207	35.289	13.418	5.868	3.074	1.923	1.169
	137.602	89.843	35.373	13.425	5.870	3.074	1.924	1.169
1.2	49.032	38.133	20.505	9.855	5.020	2.893	1.911	1.196
	49.091	38.243	20.520	9.862	5.024	2.892	1.911	1.196
1.3	21.651	18.590	12.375	7.264	4.268	2.696	1.879	1.218
	21.676	18.613	12.380	7.270	4.269	2.695	1.880	1.218
1.4	11.279	10.245	7.839	5.378	3.588	2.475	1.823	1.232
	11.279	10.239	7.834	5.381	3.587	2.474	1.823	1.232
1.5	6.698	6.291	5.262	4.044	2.997	2.241	1.742	1.237
	6.697	6.287	5.260	4.045	2.996	2.240	1.743	1.237
2.0	1.675	1.658	1.612	1.541	1.456	1.366	1.280	1.142
	1.675	1.659	1.612	1.541	1.456	1.365	1.280	1.142
2.5	1.119	1.117	1.112	1.104	1.093	1.081	1.068	1.043
	1.119	1.117	1.112	1.104	1.093	1.081	1.068	1.043

Tabelle 2.11: Vergleich numerische Methode (oben) – Simulation (unten): $n = 25$, $\alpha = 0.7$ (durchschnittliche Lauflänge)

eine Erhöhung der Rechengenauigkeit könnte man für diese Parameter die entsprechenden Werte bestimmen.

Es ist offensichtlich, daß die benötigte Rechenzeit zur numerischen Auswertung der Reihe deutlich unter der Zeit für die Durchführung der Simulationen liegt. Dies soll kurz am Beispiel der Tabellen 2.9 und 2.11 verdeutlicht werden.

Zur Berechnung aller Werte in Tabelle 2.9 über den numerischen Ansatz wurden auf einer Hewlett Packard HP K220 mit 4 Prozessoren und 512 MByte Hauptspeicher 0.2 Sekunden benötigt. Für die entsprechenden Simulationen vergingen 492 Sekunden. Diese Zeiten entsprechen der reinen Ablaufzeit der Programme und sind daher von eventuellen negativen Einflüssen anderer, parallel laufender Rechenprozesse bereinigt.

Noch deutlicher werden die Unterschiede bei Tabelle 2.11. Zur numerischen Auswertung wurden 95.8 Sekunden benötigt, davon entfielen allein 91.3 Sekunden auf die Ermittlung der Koeffizienten und nur 4.5 Sekunden auf die Berechnung der verschiedenen Lauflängen. Da die Koeffizienten nur einmal ermittelt werden müssen und von da an für beliebig viele Auswertungen zur Verfügung stehen, ist in diesem Fall besonders der zweite Wert von Bedeutung. Man sieht an diesem Beispiel auch sehr gut, wie die Rechenzeit exponentiell zunimmt, wenn der Summationsindex N erhöht wird. Die entsprechenden Simulationen nahmen hingegen 3090.8 Sekunden, also über 50 Minuten in Anspruch.

Dies zeigt, daß der numerische Ansatz eine sinnvolle und effektive Möglichkeit zur

Untersuchung der gemeinsamen $\bar{X}$-S^2-Karte darstellt. So wird zum Beispiel für die Bestimmung der Eingriffsgrenzen in Abschnitt 2.3.3, die anhand einer Intervallschachtelung durchgeführt wird, der Wert der gemeinsamen Verteilungsfunktion an durchschnittlich mehreren tausend Punkten benötigt. Mittels Simulationen wäre dies nicht mehr in einem zeitlich annehmbaren Rahmen zu bewältigen. Über die numerische Auswertung der Reihe, kann dieses Verfahren jedoch in kürzester Zeit durchgeführt werden.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Approximation in fast allen Fällen, besonders in den für die Anwendung wichtigen Fällen, sehr gut ist. Die sehr geringen Differenzen zwischen beiden Methoden lassen sich eher auf die Schwankungsbreite der Simulationen, als auf Fehler in der numerischen Reihenauswertung zurückführen. Erst für sehr große $|\alpha|$ und starke Abweichungen vom Sollzustand liefert die Approximation schlechte, in Extremfällen sogar völlig ungeeignete Werte. Dies entspricht jedoch Situationen, die in der Anwendung nicht auftreten würden, da solchermaßen gestörte Zustände in einer Produktion nicht denkbar sind.

2.3.3 Berechnung der Eingriffsgrenzen der modifizierten Karte

In gleichem Maße wie bei der klassischen $\bar{X}$-S^2-Karte, bestimmt die Wahl der Eingriffsgrenzen direkt die durchschnittliche Lauflänge im ungestörten Zustand, da gilt

$$\mathrm{ARL}_0 = \frac{1}{1 - F_{Q_1,|Q_2|}(s_c, x_c)}$$

mit $Q_1 = \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Y}_i / \gamma_0 = S^2_{Y,i}/\gamma_0$ und $Q_2 = (\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_i - \mu_0)/\sqrt{\gamma_0} = (\bar{Y}_i - \mu_0)/\sqrt{\gamma_0}$, wobei $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{A}$ wie in Abschnitt 2.1.2 definiert sind.

Gibt man sich wie allgemein üblich einen Wert für die durchschnittliche Lauflänge im Zustand unter Kontrolle vor, so kann analog zum Fall unabhängiger Stichproben eine der beiden Eingriffsgrenzen in gewissen Rahmen frei gewählt werden, während die andere dann aus obiger Formel folgt. Es erscheint jedoch vernünftig, entsprechend dem unabhängigen Fall eine weitere Anforderung an die Eingriffsgrenzen zu stellen, um diesen Freiheitsgrad bei der Bestimmung der Grenzen aufzuheben. Als sinnvolle weitere Anforderung wurde in dieser Arbeit

$$F_{Q_1}(s_c) = F_{|Q_2|}(x_c)$$

gewählt, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß die einzelnen Teststatistiken in ihrem jeweiligen Kontrollbereich liegen, soll gleich groß sein. Dies ist dieselbe Anforderung wie im Falle unabhängiger Beobachtungen.

Die Berechnung der Eingriffsgrenzen zu einer gegebenen durchschnittlichen Lauflänge im ungestörten Zustand unter obiger Zusatzbedingung, stellt mittels der hergeleiteten Reihenentwicklung kein großes Problem dar. Unter Zuhilfenahme einer Intervallschachtelung kann das zweidimensionale Gleichungssystem $F_{Q_1,|Q_2|}(x, s) = p$ mit

$F_{Q_1}(x) = F_{|Q_2|}(s)$ für eine gegebene Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ beliebig genau gelöst werden.

Zu diesem Zweck wird eine Folge $\{(x_i, s_i)\}$ mit $F_{Q_1,|Q_2|}(x_i, s_i) \to p$ unter der Randbedingung $F_{Q_1}(x_i) = F_{|Q_2|}(s_i)$ konstruiert. Zu gegebenen Wertepaaren (x_n, s_n) und (x_{n-1}, s_{n-1}) für $n \geq 2$ wird das neue Paar (x_{n+1}, s_{n+1}) berechnet, indem man zuerst x_{n+1} durch eine lineare Interpolation der Funktion $F_{Q_1,|Q_2|}(x, s)$ für festes $s = s_n$ zwischen den Stellen x_n und x_{n-1} bestimmt. Daran anschließend wird s_{n+1} mittels einer weiteren Intervallschachtelung aus der Bedingung $F_{Q_1}(x_{n+1}) = F_{|Q_2|}(s_{n+1})$ ermittelt. Die Wahl der Startwerte (x_1, s_1) und (x_2, s_2) ist, solange die Randbedingung eingehalten wird, nebensächlich für die Güte dieses Verfahrens. Schon nach wenigen Schritten liefert die Intervallschachtelung unabhängig von den Startwerten eine sehr gute Näherung für die gesuchten Werte. Aufgrund der unter anderem in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen Konvergenzprobleme bei der numerischen Auswertung der Reihe für große x und s, sollten x_1 und x_2 jedoch nicht allzu groß gewählt werden.

Selbst für große Stichprobenumfänge n und betragsmäßig große α, führt das hier beschriebene Verfahren im Bruchteil einer Sekunde zum Ergebnis. Die Intervallschachtelung wurde beendet, falls die Differenz zweier aufeinanderfolgender Näherungswerte für die Eingriffsgrenzen geringer als 10^{-6} war.

Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind für die wohl häufigsten Kombinationen von ARL_0, n und α in den Tabellen 2.23 bis 2.32 im Anhang zu Kapitel 2 zu finden. Dabei stehen die Werte für x_c jeweils in der ersten und diejenigen für s_c in der zweiten Zeile. Da die Reihenentwicklung für $|\alpha| = 0.9$ in vielen Fällen nicht konvergierte, oder das Abbruchkriterium für die Intervallschachtelung nicht erfüllt wurde, beschränken sich die Tabellen auf Werte von α mit $|\alpha| \leq 0.8$.

2.3.4 Verhalten im Zustand außer Kontrolle

Wie bereits in Abschnitt 2.3.1 erwähnt, modelliert man den Zusammenhang zwischen dem gestörten Prozeß $\{X_{i,j}\}$ und dem ungestörten Prozeß $\{Y_{i,j}\}$ durch

$$X_{i,j} = \Delta(Y_{i,j} - \mu_0) + \mu_0 + a\sqrt{\gamma_0}$$

mit $\Delta \geq 1$ und $a \in \mathbb{R}$. Aus Gründen der Symmetrie reicht es, nur Werte $a \geq 0$ zu untersuchen.

Die Teststatistiken für den gestörten Prozeß ergeben sich dadurch zu

$$\bar{X}_i = \Delta(\bar{Y}_i - \mu_0) + \mu_0 + a\sqrt{\gamma_0}$$

und

$$S_i^2 = \Delta^2 S_{Y,i}^2.$$

Nach Gleichung (2.12) gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion von $S^2_{Y,i}/\gamma_0$ und $(\bar{Y}_i - \mu_0)/\sqrt{\gamma_0}$

$$F_{S^2_{Y,i}/\gamma_0,(\bar{Y}_i-\mu_0)/\sqrt{\gamma_0}}(s,x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}(x)F_{Q_1,|Q_2|}(s,|x|) + F_{Q_1}(s)\right)$$

mit Q_1 und Q_2 wie in Abschnitt 2.3.3. Damit erhält man für die Wahrscheinlichkeit, daß kein Signal zum Eingreifen in den Prozeß gegeben wird, zu

$$\begin{aligned}
P_0(a,\Delta) &= P\left(-x_c \le \frac{\bar{X}_i-\mu_0}{\sqrt{\gamma_0}} \le x_c,\ \frac{S_i^2}{\gamma_0} \le s_c\right)\\
&= P\left(\frac{-x_c-a}{\Delta} \le \frac{\bar{Y}_i-\mu_0}{\sqrt{\gamma_0}} \le \frac{x_c-a}{\Delta},\ \frac{S^2_{Y,i}}{\gamma_0} \le \frac{s_c}{\Delta^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{x_c-a}{\Delta}\right)F_{Q_1,|Q_2|}\left(\frac{s_c}{\Delta^2},\left|\frac{x_c-a}{\Delta}\right|\right) + F_{Q_1}\left(\frac{s_c}{\Delta^2}\right)\right)\\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{-x_c-a}{\Delta}\right)F_{Q_1,|Q_2|}\left(\frac{s_c}{\Delta^2},\left|\frac{-x_c-a}{\Delta}\right|\right) + F_{Q_1}\left(\frac{s_c}{\Delta^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}(x_c-a)F_{Q_1,|Q_2|}\left(\frac{s_c}{\Delta^2},\left|\frac{x_c-a}{\Delta}\right|\right) + F_{Q_1,|Q_2|}\left(\frac{s_c}{\Delta^2},\frac{x_c+a}{\Delta}\right)\right).
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die durchschnittliche Lauflänge der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte für den gestörten Prozeß zu

$$\mathrm{ARL}(a,\Delta) = \frac{1}{1-P_0(a,\Delta)}.$$

In den Tabellen 2.12 bis 2.15 ist das Verhalten der durchschnittlichen Lauflänge der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte in verschiedenen Zuständen außer Kontrolle für eine Vielzahl von Prozeßzuständen tabelliert. Aus denselben Gründen wie bei der Berechnung der Eingriffsgrenzen, wurde der zulässig Bereich für α auf $[-0.8, 0.8]$ eingeschränkt.

Speziell in der Tabelle 2.12 ist die durchschnittliche Lauflänge für festen Stichprobenumfang $n = 15$ und verschiedene Werte für α von -0.6 bis 0.6 tabelliert. Anhand dieser Tabelle kann man vorrangig das Verhalten der Karte bei sich ändernder Korrelation beurteilen. Das Verhalten der Karte bei sich änderndem Stichprobenumfang n läßt sich anhand der Tabellen 2.14 und 2.15 untersuchen. In diesen Tabellen ist die Lauflänge für $\alpha = 0.3$ beziehungsweise $\alpha = -0.3$ für Stichprobenumfänge n von 2 bis 25 tabelliert.

Für alle Tabellen wurden die Eingriffsgrenzen anhand Abschnitt 2.3.3 so gewählt, daß im ungestörten Zustand eine durchschnittliche Lauflänge von 500 erreicht wurde. Da die Eingriffsgrenzen nur auf drei Stellen genau angegeben werden, treten in den Tabellen geringfügige Abweichungen von der gewünschten Lauflänge im Zustand unter

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	503.142	13.891	1.562	1.015	1.000	1.000	1.000	1.000
1.10	143.387	10.544	1.590	1.024	1.000	1.000	1.000	1.000
1.20	53.349	8.204	1.607	1.035	1.000	1.000	1.000	1.000
1.30	24.341	6.430	1.612	1.047	1.002	1.000	1.000	1.000
1.40	13.006	5.058	1.600	1.059	1.002	1.000	1.000	1.000
1.50	7.865	4.014	1.572	1.069	1.003	1.003	1.000	1.000
2.00	1.971	1.717	1.304	1.080	1.012	1.001	1.000	1.000
2.50	1.232	1.194	1.113	1.045	1.012	1.000	1.000	1.000

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	501.307	90.337	11.295	2.858	1.390	1.065	1.006	1.000
1.10	93.088	39.627	8.617	2.721	1.421	1.086	1.011	1.000
1.20	25.234	16.820	6.301	2.534	1.436	1.105	1.018	1.000
1.30	9.734	7.909	4.400	2.273	1.423	1.118	1.025	1.000
1.40	4.923	4.381	3.094	1.978	1.380	1.122	1.030	1.001
1.50	3.034	2.829	2.290	1.710	1.317	1.116	1.033	1.001
2.00	1.182	1.172	1.146	1.109	1.071	1.039	1.018	1.002
2.50	1.023	1.023	1.020	1.016	1.012	1.008	1.004	1.001

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	499.813	134.655	21.385	5.295	2.140	1.309	1.069	1.000
1.10	101.205	52.713	14.442	4.627	2.112	1.342	1.090	1.001
1.20	28.823	21.021	9.401	3.961	2.051	1.364	1.111	1.005
1.30	11.266	9.556	5.955	3.259	1.940	1.365	1.126	1.008
1.40	5.657	5.151	3.892	2.616	1.784	1.342	1.132	1.011
1.50	3.429	3.239	2.729	2.112	1.615	1.299	1.128	1.014
2.00	1.228	1.219	1.196	1.160	1.119	1.080	1.048	1.012
2.50	1.032	1.031	1.028	1.024	1.020	1.015	1.010	1.004

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	498.951	259.421	76.448	23.718	8.909	4.129	2.339	1.246
1.10	142.653	96.663	40.999	16.353	7.274	3.776	2.294	1.280
1.20	53.072	41.931	23.430	11.667	6.041	3.466	2.241	1.309
1.30	24.154	20.844	14.105	8.451	5.023	3.165	2.171	1.331
1.40	12.857	11.685	8.977	6.207	4.161	2.861	2.080	1.342
1.50	7.740	7.261	6.061	4.656	3.445	2.561	1.968	1.343
2.00	1.917	1.896	1.833	1.739	1.627	1.509	1.397	1.215
2.50	1.208	1.205	1.197	1.183	1.166	1.146	1.124	1.083

Tabelle 2.12: Lauflänge $\bar{X}$-S^2-Karte: $n = 15$, $\alpha = -0.6$, 0.0, 0.2 und 0.6 (von oben nach unten)

Δ \ a	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
1.00	501.670	491.248	461.917	418.696	367.879	315.244	265.041
1.10	95.310	94.583	92.442	89.005	84.457	79.034	72.997
1.20	26.154	26.070	25.818	25.403	24.832	24.114	23.264
1.30	10.115	10.099	10.050	9.968	9.855	9.711	9.536
1.40	5.103	5.098	5.084	5.061	5.028	4.987	4.936
1.50	3.130	3.129	3.123	3.115	3.103	3.087	3.068
1.52	1.193	1.193	1.192	1.192	1.192	1.191	1.190
1.54	1.025	1.025	1.025	1.025	1.025	1.025	1.025

Δ \ a	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
1.00	501.307	492.656	468.043	431.040	386.333	338.535	291.373
1.10	93.088	92.512	90.811	88.060	84.378	79.921	74.869
1.20	25.234	25.169	24.974	24.653	24.209	23.648	22.978
1.30	9.734	9.721	9.684	9.621	9.535	9.424	9.289
1.40	4.923	4.919	4.909	4.891	4.866	4.834	4.795
1.50	3.034	3.033	3.029	3.022	3.013	3.001	2.986
1.52	1.182	1.182	1.182	1.181	1.181	1.180	1.180
1.54	1.023	1.023	1.023	1.023	1.023	1.023	1.023

Tabelle 2.13: Lauflänge $\bar{X}$-S^2-Karte: $n = 15$, $\alpha = -0.1$ (oben) und $\alpha = 0.0$ (unten)

Kontrolle auf. Erfahrungsgemäß wirken sich diese Fehler jedoch nicht mehr auf die Werte der durchschnittlichen Lauflänge im Zustand außer Kontrolle aus.

Wie man in den Tabellen erkennt, reagiert die modifizierte $\bar{X}$-S^2-Karte sehr gut auf Störungen des zugrundegelegten Prozesses. Erwartungsgemäß verbessert sich das Reaktionsverhalten der Karte bei zunehmender Störung. Ein interessanter Effekt ist jedoch für mittlere bis große Stichprobenumfänge zu beobachten. Kurz bevor die durchschnittliche Lauflänge den Wert 1 annimmt, zeigt die modifizierte $\bar{X}$-S^2-Karte für festes a ein unerwartetes Verhalten. Mit wachsendem Δ nimmt zunächst auch die Lauflänge geringfügig zu, bevor sie wie erwartet bei weiter wachsendem Δ wieder abnimmt (vergleiche Tabellen 2.12, 2.14 und 2.15). Dieses eigentlich widersprüchliche Verhalten der modifizierten Karte drückt sich jedoch nur in den Nachkommastellen der durchschnittlichen Lauflänge aus und hat keinerlei Auswirkung auf die praktische Anwendung dieser Karte. Das diese ungewöhnliche Verhaltensweise der simultanen Karte nicht auf Rechenungenauigkeiten des numerischen Verfahrens zurückzuführen ist, erkennt man durch einen genaueren Vergleich zwischen numerischen Verfahren und Simulation in Abschnitt 2.3.2. Auch dort ist dieses Verhalten sowohl bei den numerischen Werten, als auch bei den durch Simulationen ermittelten Werten erkennbar (siehe Tabellen 2.9 und 2.11).

Auffällig ist, daß die durchschnittliche Lauflänge für $a = 0$ fast symmetrisch bezüglich

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.295	385.219	207.054	98.704	47.279	23.883	12.942	4.767
1.10	180.306	150.005	94.856	53.362	29.518	16.821	10.071	4.294
1.20	82.161	71.919	50.996	32.505	20.128	12.628	8.191	3.930
1.30	44.236	40.080	30.846	21.616	14.633	9.922	6.872	3.637
1.40	26.914	24.978	20.402	15.371	11.168	8.068	5.900	3.390
1.50	17.948	16.946	14.462	11.521	8.858	6.739	5.156	3.179
2.00	5.268	5.168	4.890	4.491	4.034	3.574	3.145	2.438
2.50	2.934	2.911	2.843	2.738	2.605	2.457	2.302	2.002

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.417	305.351	111.441	39.400	15.641	7.208	3.866	1.690
1.10	154.475	113.451	55.738	24.868	11.695	6.098	3.571	1.711
1.20	61.910	50.729	30.853	16.681	9.074	5.260	3.320	1.723
1.30	30.095	26.339	18.554	11.677	7.191	4.576	3.088	1.724
1.40	16.925	15.432	12.010	8.482	5.789	3.996	2.864	1.714
1.50	10.645	9.966	8.301	6.385	4.733	3.502	2.649	1.692
2.00	2.833	2.787	2.657	2.467	2.247	2.024	1.817	1.483
2.50	1.657	1.648	1.622	1.580	1.528	1.469	1.408	1.289

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.371	161.237	29.349	7.446	2.847	1.576	1.166	1.000
1.10	110.308	61.511	18.703	6.184	2.720	1.601	1.197	1.011
1.20	33.238	24.723	11.691	5.070	2.566	1.608	1.222	1.018
1.30	13.277	11.321	7.221	4.025	2.360	1.588	1.238	1.025
1.40	6.658	6.070	4.625	3.134	2.112	1.536	1.238	1.032
1.50	3.980	3.760	3.174	2.461	1.862	1.461	1.224	1.037
2.00	1.296	1.287	1.260	1.219	1.171	1.123	1.081	1.027
2.50	1.045	1.044	1.041	1.036	1.030	1.024	1.018	1.008

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.446	98.894	12.977	3.241	1.502	1.096	1.010	1.000
1.10	84.015	40.027	9.540	3.028	1.528	1.121	1.019	1.000
1.20	20.639	15.078	6.490	2.732	1.528	1.141	1.028	1.000
1.30	7.487	6.473	4.128	2.325	1.482	1.149	1.036	1.001
1.40	3.696	3.429	2.699	1.908	1.394	1.141	1.039	1.001
1.50	2.290	2.197	1.927	1.577	1.290	1.118	1.038	1.002
2.00	1.060	1.057	1.050	1.039	1.027	1.016	1.008	1.001
2.50	1.003	1.003	1.002	1.002	1.001	1.001	1.001	1.000

Tabelle 2.14: Lauflänge $\bar{X}$-S^2-Karte: $\alpha = 0.3$, $n = 2, 5, 15$ und 25 (von oben nach unten)

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.611	316.179	121.421	44.439	17.965	8.316	4.430	1.865
1.10	180.402	130.042	62.828	28.063	13.265	6.922	4.029	1.874
1.20	82.197	64.727	37.003	19.309	10.344	5.945	3.718	1.877
1.30	44.254	37.029	23.975	14.140	8.383	5.216	3.463	1.877
1.40	26.923	23.511	16.708	10.856	6.992	4.649	3.247	1.871
1.50	17.954	16.167	12.326	8.651	5.966	4.194	3.059	1.861
2.00	5.268	5.086	4.610	3.994	3.375	2.832	2.386	1.765
2.50	2.934	2.891	2.770	2.593	2.388	2.177	1.978	1.643

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.577	165.539	30.768	7.846	2.981	1.628	1.187	1.003
1.10	155.843	74.788	20.402	6.557	2.846	1.652	1.219	1.013
1.20	62.914	38.386	14.296	5.599	2.722	1.669	1.248	1.021
1.30	30.750	21.887	10.394	4.832	2.599	1.675	1.274	1.031
1.40	17.356	13.654	7.792	4.193	2.471	1.671	1.293	1.041
1.50	10.939	9.197	6.014	3.655	2.338	1.655	1.307	1.051
2.00	2.904	2.776	2.458	2.079	1.738	1.473	1.287	1.087
2.50	1.685	1.660	1.590	1.494	1.389	1.290	1.205	1.088

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	499.798	42.055	4.161	1.388	1.031	1.000	1.000	1.000
1.10	109.570	24.548	3.778	1.420	1.046	1.003	1.000	1.000
1.20	32.961	14.059	3.387	1.440	1.061	1.004	1.000	1.000
1.30	13.179	8.103	2.948	1.440	1.075	1.007	1.001	1.000
1.40	6.621	4.962	2.500	1.414	1.085	1.010	1.001	1.000
1.50	3.966	3.317	2.103	1.366	1.088	1.013	1.001	1.000
2.00	1.297	1.268	1.193	1.108	1.046	1.014	1.003	1.000
2.50	1.045	1.042	1.033	1.022	1.012	1.005	1.002	1.000

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	498.464	18.207	1.887	1.041	1.000	1.000	1.000	1.000
1.10	83.446	12.420	1.883	1.058	1.000	1.000	1.000	1.000
1.20	20.491	7.736	1.835	1.074	1.002	1.000	1.000	1.000
1.30	7.443	4.565	1.718	1.084	1.004	1.000	1.000	1.000
1.40	3.681	2.850	1.552	1.084	1.005	1.000	1.000	1.000
1.50	2.284	1.985	1.385	1.075	1.006	1.000	1.000	1.000
2.00	1.060	1.052	1.031	1.012	1.003	1.000	1.000	1.000
2.50	1.003	1.002	1.002	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabelle 2.15: Lauflänge $\bar{X}$-S^2-Karte: $\alpha = -0.3$, $n = 2$, 5, 15 und 25 (von oben nach unten)

$\alpha = 0$ ist. So liegt die Differenz zwischen den beiden Werten für die durchschnittliche Lauflänge bei gleichem $|\alpha|$ bis auf wenige Ausnahmen immer unter 0.2%.

Für $a > 0$ bietet sich jedoch ein anderes Bild. Die modifizierte Karte zeigt für $\alpha = 0.8$ das schlechteste Verhalten, welches sich aber mit fallendem α deutlich verbessert, bis sie für $\alpha = -0.8$ ihr Optimum erreicht. Interessanterweise gilt dies aber nur für $a > 0$. Im Falle $a = 0$ gilt aufgrund der bereits vorher erwähnten Symmetrie, daß sich das Verhalten der Karte mit fallendem α ab $\alpha = 0.0$ wieder verschlechtert. Dieses „Umkippen" von einem symmetrischen zu einem streng monoton fallenden Verhalten findet bereits für sehr kleines a statt. Man erkennt dies in Tabelle 2.13, in der für den Fall $n = 15$ und $\alpha = -0.1$, beziehungsweise $\alpha = 0.0$, die durchschnittliche Lauflänge für besonders kleine Werte von a tabelliert ist. In diesem speziellen Beispiel beginnt die Monotonie in einer Umgebung von $a = 0.1$. Für geringere Stichprobenumfänge n erhöht sich dieser Wert etwas und dementsprechend verringert er sich ein wenig für größere n.

Das Verhalten der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte ist natürlich nicht nur allein von α abhängig. Auch der Stichprobenumfang n hat einen großen Einfluß auf die Leistungsfähigkeit der Karte. Man sieht deutlich, daß sich mit wachsendem n das Verhalten der Karte signifikant verbessert.

2.4 $\bar{X}$-S^2-Residuenkarte

2.4.1 Grundlagen

Das Prinzip der Residuenkarten besteht darin, den ursprünglich abhängigen Prozeß durch eine geeignete Transformation in einen unabhängigen Prozeß zu überführen und auf diesen eine der herkömmlichen Karten anzuwenden. Man vergleicht dazu die Beobachtung $X_{i,j}$ mit einer Vorhersage $\hat{X}_{i,j}$, die auf den vorherigen Beobachtungen $X_{i,1}, \ldots, X_{i,j-1}$ basiert. Wie in den meisten Fällen üblich (vergleiche Box und Pierce (1970), Quesenberry (1986), Brockwell und Davis (1991), Lu und Reynolds (1995), Kramer und Schmid (1996), Kramer und Schmid (1997)), wird $\hat{X}_{i,j}$ als die beste lineare Prognose für $X_{i,j}$ gewählt.

Unter den Voraussetzungen des vorigen Abschnitts gilt für den hier betrachteten gestörten Prozeß $X_{i,j}$, daß

$$X_{i,j} = \Delta(Y_{i,j} - \mu_0) + \mu_0 + a\sqrt{\gamma_0}$$

mit

$$Y_{i,j} = \alpha(Y_{i,j-1} - \mu_0) + \mu_0 + \varepsilon_{i,j}$$

und $\varepsilon_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Die beste lineare Prognose hat dann die Form

$$\hat{X}_{i,1} = \mu_0$$

und

$$\hat{X}_{i,j} = \alpha(X_{i-1,j} - \mu_0) + \mu_0$$

für $j \geq 2$. Somit gilt

$$X_{i,1} - \hat{X}_{i,1} = \Delta(Y_{i,1} - \mu_0) + a\sqrt{\gamma_0}$$

und für $j \geq 2$

$$\begin{aligned} X_{i,j} - \hat{X}_{i,j} &= \Delta(Y_{i,j} - \mu_0) + \mu_0 + a\sqrt{\gamma_0} - \alpha(X_{i,j-1} - \mu_0) - \mu_0 \\ &= \Delta\big(\alpha(Y_{i,j-1} - \mu_0) + \varepsilon_{i,j}\big) + a\sqrt{\gamma_0} - \alpha\big(\Delta(Y_{i,j-1} - \mu_0) + a\sqrt{\gamma_0}\big) \\ &= \Delta\varepsilon_{i,j} + a\sqrt{\gamma_0}(1-\alpha). \end{aligned}$$

Definiert man

$$\hat{\varepsilon}_{i,1} = \sqrt{1-\alpha^2}\,(X_{i,1} - \hat{X}_{i,1})$$

und

$$\hat{\varepsilon}_{i,j} = X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}$$

für $j = 2, \ldots, n$, so sind $\hat{\varepsilon}_{i,1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{i,n}$ normalverteilte, unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\hat{\varepsilon}_{i,1} \sim \mathcal{N}\left(a\sqrt{\gamma_0}\sqrt{1-\alpha^2}, \Delta^2\sigma^2\right)$$

und

$$\hat{\varepsilon}_{i,j} \sim \mathcal{N}\left(a\sqrt{\gamma_0}(1-\alpha), \Delta^2\sigma^2\right)$$

für $j \geq 2$. Man kann somit die klassische $\bar{X}$-S^2-Karte auf die Residuen $\hat{\varepsilon}_{i,1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{i,n}$ anwenden.

Wie man bereits an diesem speziellen Fall erkennt, sind Residuenkarten zwar einfach anzuwenden, da die gesamte Theorie der Qualitätskontrolle bei unabhängigen Daten verwendet werden kann, sie haben jedoch auch gravierende Nachteile. So wird die Störung des Mittelwertes für $j \geq 2$ nicht direkt auf den transformierten Prozeß übertragen, sondern mit dem Vorfaktor $1 - \alpha$. Dies bewirkt, daß für positive α die Störung des transformierten Prozesses geringer ist, als die des abhängigen Prozesses, während bei einem negativ korrelierten Prozeß die Störung durch die Transformation noch verstärkt wird. Das bedeutet, daß bei einer festen Störung a die Residuenkarte bei negativ korrelierten Werten eine bessere Leistungsfähigkeit zeigt, als bei einem positiv korrelierten Prozeß. Ein weiterer Nachteil der Residuenkarte entsteht durch die Transformation. So müssen bei einem autoregressiven Prozeß der Ordnung p die ersten p Residuen nach einer von den übrigen Residuen abweichenden Rechenvorschrift berechnet werden. Zusätzlich genügen diese Residuen einer andere Verteilung als die restlichen Residuen, was die Berechnung der Verteilung der Teststatistik unter Umständen erschweren kann. Dies sind insbesondere für die praktische Anwendung erhebliche Nachteile. Der gravierendste Nachteil der Residuenkarten besteht jedoch darin, daß nicht alle korrelierten Prozesse durch entsprechende Transformationen auf unabhängige Residuen transformiert werden können. Dies ist zum Beispiel bei einem ARMA(p, q)-Prozeß der Fall.

Bei der Residuenkarte gilt nun für die Teststatistiken folgendes.

Die Verteilung des Mittelwertes der Residuen $\bar{\hat{\varepsilon}}_i$ ergibt sich zu

$$\bar{\hat{\varepsilon}}_i \sim \mathcal{N}\left(\frac{a\sqrt{\gamma_0}}{n}\left(\sqrt{1-\alpha^2}+(n-1)(1-\alpha)\right), \frac{(\Delta\sigma)^2}{n}\right).$$

Da $\gamma_0 = \sigma^2/(1-\alpha^2)$ ist, vereinfacht sich obiger Ausdruck zu

$$\bar{\hat{\varepsilon}}_i \sim \mathcal{N}\left(\frac{a\sigma}{n}\left(1+(n-1)\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right), \frac{(\Delta\sigma)^2}{n}\right).$$

Somit gilt für die standardisierte Teststatistik $\bar{\hat{\varepsilon}}_i/\sigma$

$$\frac{\bar{\hat{\varepsilon}}_i}{\sigma} \sim \mathcal{N}\left(\frac{a}{n}\left(1+(n-1)\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right), \frac{\Delta^2}{n}\right).$$

Für die Verteilung der empirischen Varianz

$$S^2_{\hat{\varepsilon}_i} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_{i,j}-\bar{\hat{\varepsilon}}_i}{\sigma}\right)^2$$

gilt

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)}{\Delta^2}S^2_{\hat{\varepsilon}_i} &= \frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_{i,j}-\bar{\hat{\varepsilon}}_i}{\sigma}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(\Delta\sigma)^2}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}(\mathbf{1})\right)\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i\end{aligned}$$

mit $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{\mathrm{T}} = (\hat{\varepsilon}_{i,1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{i,n})^{\mathrm{T}}$, wobei wie in Abschnitt 2.1.2 $\boldsymbol{I}$ die Einheitsmatrix und $(\mathbf{1})$ eine Matrix bestehend aus lauter Einsen bezeichnet.

Da $\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}(\mathbf{1})$ symmetrisch und idempotent ist, folgt, daß $(n-1)S^2_{\hat{\varepsilon}_i}/\Delta^2$ einer nichtzentralen Chi-quadrat-Verteilung mit Freiheitsgraden $\operatorname{sp}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}(\mathbf{1})\right)$ und Nichtzentralitätsparameter $1/(\Delta\sigma)^2 E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}(\mathbf{1})\right) E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)$ genügt (vergleiche Mathai und Provost (1992, Korollar 5.1.3a)).

Mit $E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)^{\mathrm{T}} = a\sqrt{\gamma_0}\,(\sqrt{1-\alpha^2}, 1-\alpha, \ldots, 1-\alpha)^{\mathrm{T}}$ gilt dann

$$E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) = a^2\gamma_0 \left(1-\alpha^2 + (n-1)(1-\alpha)^2\right)$$

und

$$E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)^{\mathrm{T}} \frac{1}{n}(\mathbf{1}) E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) = \frac{a^2\gamma_0}{n}\left(\sqrt{1-\alpha^2} + (n-1)(1-\alpha)\right)^2.$$

Damit erhält man für den Nichtzentralitätsparameter

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Delta\sigma)^2} E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}(\mathbf{1})\right) E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) \\
&\quad = \frac{a^2\gamma_0}{n(\Delta\sigma)^2}\Big(n(1-\alpha^2) + n(n-1)(1-\alpha)^2 - (1-\alpha^2) \\
&\qquad\qquad - 2(n-1)(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha^2} - (n-1)^2(1-\alpha)^2\Big) \\
&\quad = \frac{a^2\gamma_0}{(\Delta\sigma)^2}\frac{n-1}{n}\left((1-\alpha^2) - 2(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha^2} + (1-\alpha)^2\right) \\
&\quad = \frac{a^2\gamma_0}{(\Delta\sigma)^2}\frac{n-1}{n}\left(\sqrt{1-\alpha^2} - (1-\alpha)\right)^2 \\
&\quad = \frac{n-1}{n}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2 \frac{1}{1-\alpha^2}\left(\sqrt{1-\alpha^2} - (1-\alpha)\right)^2 \\
&\quad = \frac{n-1}{n}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)^2
\end{aligned}$$

und die Anzahl der Freiheitsgrade

$$\operatorname{sp}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}(\mathbf{1})\right) = n-1,$$

d.h.

$$\frac{(n-1)}{\Delta^2} S^2_{\hat{\varepsilon}_i} \sim \chi^2_{n-1, \frac{n-1}{n}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2\left(1-\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)^2}.$$

Wählt man nun x_c als das $1/\sqrt{n}$ fache des $(1-\tilde{\alpha}/2)$-Quantils der Standardnormalverteilung und s_c als das $1/(n-1)$ fache des $(1-\tilde{\alpha})$-Quantils der χ^2_{n-1}-Verteilung für $\tilde{\alpha} = 1 - \sqrt{1 - 1/\operatorname{ARL}_0}$, dann gilt, daß die Residuenkarte im ungestörten Zustand eine durchschnittliche Lauflänge von ARL_0 hat.

Für den Zustand außer Kontrolle erhält man

$$\begin{aligned}
P_0(a,\Delta) &= P\left(-x_c \le \frac{\bar{\hat{\varepsilon}}_i}{\sigma} \le x_c, S^2_{\hat{\varepsilon}_i} \le s_c\right) \\
&= \left\{\Phi\left(\left(x_c - \frac{a}{n}\left(1+(n-1)\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)\right)\frac{\sqrt{n}}{\Delta}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \Phi\left(\left(-x_c - \frac{a}{n}\left(1+(n-1)\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)\right)\frac{\sqrt{n}}{\Delta}\right)\right\} \\
&\qquad \chi^2_{n-1,\frac{n-1}{n}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2\left(1-\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)^2}\left(\frac{n-1}{\Delta^2}s_c\right),
\end{aligned}$$

woraus wie gewohnt

$$\mathrm{ARL}(a,\Delta) = \frac{1}{1-P_0(a,\Delta)}$$

folgt.

2.4.2 Vergleichsstudie zwischen der modifizierten und der Residuenkarte

Um die modifizierte und die Residuen-$\bar{X}$-S^2-Karte miteinander zu vergleichen, wurde die durchschnittliche Lauflänge beider Karten für verschiedene Prozeßparameter und Zustände außer Kontrolle berechnet. In den Tabellen 2.16 bis 2.22 sind einige dieser Ergebnisse dargestellt. Bei allen Tabellen wurden die Eingriffsgrenzen beider Karten so gewählt, daß im ungestörten Zustand eine durchschnittliche Lauflänge von 500 erreicht wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde $\sigma^2 = 1$ gewählt. In der jeweils ersten Zeile steht die durchschnittliche Lauflänge der modifizierten Karte, während in der zweiten Zeile die entsprechende Lauflänge der Residuenkarte zu finden ist.

Wie man in den Tabellen erkennt, gibt es keine großen Unterschiede zwischen beiden Karten. Nur für sehr geringe Störungen von Mittelwert und Streuung ($a = 0.0$ bis 0.25 und $\Delta = 1.1$ bis 1.3) hat die Residuenkarte Vorteile. Mit wachsendem n und $|\alpha|$ nehmen diese Vorteile zwar weiter zu, werden jedoch nie so groß, daß die Residuenkarte klar besser wird, als die modifizierte Karte. Im Fall unabhängiger Daten (vergleiche Tabelle 2.21) fallen modifizierte, Residuen- und klassische Karte zusammen. Man erkennt in diesem Beispiel erneut, daß Satz 2.1 eine sehr gute Approximation für die exakte Verteilung der modifizierten Karte liefert.

Die Nachteile der Residuenkarte, kompliziertere und umständlichere Berechnung der Teststatistiken, werden in der praktischen Anwendung durch die in manchen Bereichen geringfügig bessere Verhaltensweise im Vergleich zur modifizierten Karte aufgehoben. Es läßt sich daher nur schwer sagen, welche der beiden Karten besser ist.

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	499.629 500.000	354.977 355.400	164.868 165.681	69.529 70.265	30.608 31.081	14.705 14.978	7.807 7.962	2.969 3.023
1.10	168.338 164.290	134.085 131.477	77.325 76.560	39.734 39.705	20.504 20.631	11.171 11.291	6.545 6.633	2.838 2.878
1.20	72.699 69.865	62.157 60.045	41.694 40.733	24.975 24.672	14.666 14.615	8.863 8.886	5.634 5.670	2.724 2.750
1.30	37.528 35.755	33.576 32.134	25.023 24.200	16.849 16.481	10.987 10.849	7.240 7.200	4.930 4.928	2.617 2.629
1.40	22.102 20.971	20.378 19.405	16.352 15.710	12.029 11.678	8.530 8.360	6.041 5.965	4.363 4.333	2.513 2.513
1.50	14.380 13.628	13.534 12.862	11.447 10.957	9.002 8.695	6.824 6.649	5.129 5.036	3.895 3.847	2.410 2.400
1.75	6.630 6.305	6.423 6.117	5.870 5.613	5.126 4.930	4.347 4.207	3.633 3.538	3.031 2.968	2.163 2.137
2.00	4.018 3.846	3.946 3.780	3.746 3.597	3.455 3.329	3.121 3.020	2.782 2.704	2.466 2.407	1.946 1.915

Tabelle 2.16: Vergleich modifizierte Karte (oben) – Residuenkarte (unten): $n = 3$, $\alpha = 0.3$

Letztendlich ist es eine Ermessensentscheidung des Anwenders, ob er die einfacher zu berechnende, aber in bestimmten Situationen sich etwas schlechter verhaltende modifizierte Karte, der etwas schwerer zu berechnenden Residuenkarte vorzieht.

2.5 Zusammenfassung

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist eine Reihenentwicklung der gemeinsamen Dichte beziehungsweise Verteilung einer quadratischen und einer linearen Form in normalverteilten Zufallsvariablen. Es wurde gezeigt, daß die Reihe in allen für die Anwendung wichtigen Bereichen einfach zu berechnen ist und, wie im Vergleich mit Simulationen gezeigt wurde, verläßliche Resultate liefert.

Als Anwendung dieser Ergebnisse wurde eine modifizierte $\bar{X}$-S^2-Karte zur gleichzeitigen Kontrolle von Mittelwert und Streuung autoregressiver Prozesse der Ordnung eins entwickelt. Es zeigte sich, daß diese modifizierte Karte im Gegensatz zur klassischen Karte sehr gut zur Kontrolle korrelierter Prozesse geeignet ist. Auch im Vergleich zur $\bar{X}$-S^2-Residuenkarte zeigt die modifizierte Karte keine gravierenden Nachteile. Um die Arbeit mit der modifizierte $\bar{X}$-S^2-Karte zu erleichtern, wurden genaue Vorschriften zur Wahl der Eingriffsgrenzen dieser Karte gegeben.

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.417	305.351	111.441	39.400	15.641	7.208	3.866	1.690
	500.000	304.479	111.065	39.315	15.626	7.206	3.867	1.691
1.10	154.475	113.451	55.738	24.868	11.695	6.098	3.571	1.711
	143.757	107.326	54.051	24.480	11.599	6.071	3.562	1.710
1.20	61.910	50.729	30.853	16.681	9.074	5.260	3.320	1.723
	54.932	45.870	28.902	16.060	8.878	5.193	3.294	1.718
1.30	30.095	26.339	18.554	11.677	7.191	4.576	3.088	1.724
	25.999	23.123	16.865	10.969	6.913	4.464	3.039	1.713
1.40	16.925	15.432	12.010	8.482	5.789	3.996	2.864	1.714
	14.454	13.345	10.698	7.803	5.468	3.846	2.792	1.695
1.50	10.645	9.966	8.301	6.385	4.733	3.502	2.649	1.692
	9.077	8.579	7.317	5.792	4.406	3.329	2.556	1.664
1.75	4.700	4.554	4.164	3.637	3.086	2.587	2.172	1.599
	4.078	3.971	3.678	3.270	2.829	2.415	2.060	1.553
2.00	2.833	2.787	2.657	2.467	2.247	2.024	1.817	1.483
	2.525	2.490	2.390	2.243	2.069	1.888	1.717	1.431

Tabelle 2.17: Vergleich modifizierte Karte (oben) – Residuenkarte (unten): $n = 5$, $\alpha = 0.3$

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	498.842	215.984	51.691	14.446	5.320	2.582	1.605	1.070
	500.000	215.873	51.544	14.390	5.298	2.573	1.601	1.069
1.10	128.878	80.642	29.724	10.809	4.682	2.502	1.630	1.092
	112.701	73.887	28.684	10.643	4.642	2.488	1.624	1.091
1.20	44.298	33.966	17.601	8.187	4.128	2.410	1.641	1.114
	35.356	28.434	15.978	7.816	4.033	2.380	1.630	1.111
1.30	19.220	16.415	10.735	6.173	3.596	2.291	1.635	1.133
	14.713	13.020	9.190	5.649	3.427	2.232	1.612	1.128
1.40	10.029	9.084	6.884	4.663	3.090	2.144	1.607	1.147
	7.620	7.073	5.690	4.112	2.864	2.051	1.567	1.139
1.50	6.043	5.663	4.704	3.582	2.639	1.979	1.559	1.155
	4.650	4.431	3.846	3.093	2.393	1.862	1.503	1.142
1.75	2.637	2.569	2.383	2.123	1.845	1.595	1.395	1.146
	2.163	2.123	2.009	1.842	1.653	1.473	1.321	1.122
2.00	1.689	1.669	1.614	1.532	1.435	1.337	1.247	1.113
	1.479	1.467	1.432	1.379	1.315	1.248	1.185	1.086

Tabelle 2.18: Vergleich modifizierte Karte (oben) – Residuenkarte (unten): $n = 10$, $\alpha = 0.3$

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.255 500.000	124.484 124.109	18.739 18.657	4.624 4.605	1.926 1.920	1.233 1.231	1.045 1.044	1.000 1.000
1.10	95.652 78.827	48.863 44.005	12.930 12.540	4.117 4.072	1.921 1.911	1.266 1.263	1.063 1.062	1.001 1.001
1.20	25.803 19.083	18.940 15.073	8.460 7.622	3.568 3.429	1.882 1.853	1.288 1.281	1.080 1.078	1.002 1.002
1.30	9.733 7.039	8.347 6.308	5.298 4.446	2.945 2.704	1.788 1.723	1.292 1.273	1.093 1.087	1.004 1.004
1.40	4.805 3.563	4.419 3.364	3.418 2.793	2.356 2.090	1.647 1.550	1.271 1.238	1.098 1.087	1.006 1.006
1.50	2.908 2.257	2.769 2.185	2.384 1.969	1.897 1.667	1.491 1.385	1.231 1.188	1.093 1.077	1.008 1.007
1.75	1.465 1.283	1.444 1.271	1.383 1.238	1.294 1.187	1.198 1.129	1.116 1.077	1.058 1.039	1.009 1.006
2.00	1.133 1.072	1.128 1.069	1.114 1.062	1.093 1.051	1.068 1.038	1.045 1.025	1.026 1.015	1.006 1.003

Tabelle 2.19: Vergleich modifizierte Karte (oben) – Residuenkarte (unten): $n = 20$, $\alpha = 0.3$

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	497.748 500.000	42.293 40.121	4.202 3.951	1.396 1.350	1.033 1.026	1.006 1.001	1.000 1.000	1.000 1.000
1.10	146.884 112.701	26.116 23.782	3.835 3.612	1.430 1.383	1.048 1.039	1.002 1.001	1.001 1.000	1.000 1.000
1.20	56.352 35.356	17.008 14.054	3.521 3.269	1.456 1.405	1.064 1.053	1.004 1.003	1.000 1.000	1.000 1.000
1.30	26.348 14.713	11.481 8.453	3.226 2.896	1.473 1.410	1.080 1.066	1.008 1.006	1.006 1.000	1.000 1.000
1.40	14.339 7.620	8.021 5.389	2.936 2.517	1.478 1.395	1.095 1.076	1.012 1.009	1.001 1.000	1.000 1.000
1.50	8.782 4.650	5.819 3.710	2.654 2.174	1.471 1.364	1.108 1.083	1.016 1.012	1.001 1.001	1.000 1.000
1.75	3.722 2.163	3.092 1.980	2.050 1.584	1.406 1.252	1.125 1.079	1.028 1.017	1.004 1.002	1.000 1.000
2.00	2.220 1.479	2.029 1.423	1.637 1.290	1.308 1.153	1.119 1.061	1.036 1.018	1.008 1.004	1.000 1.000

Tabelle 2.20: Vergleich modifizierte Karte (oben) – Residuenkarte (unten): $n = 10$, $\alpha = -0.5$

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	501.096 500.000	138.821 138.321	22.463 22.391	5.569 5.557	2.227 2.224	1.341 1.340	1.079 1.079	1.001 1.001
1.10	112.795 112.701	56.711 56.591	15.222 15.184	4.847 4.838	2.191 2.188	1.374 1.373	1.102 1.102	1.003 1.003
1.20	35.366 35.356	24.510 24.483	10.244 10.227	4.185 4.178	2.132 2.129	1.397 1.397	1.124 1.124	1.006 1.006
1.30	14.715 14.713	11.950 11.944	6.847 6.839	3.533 3.529	2.036 2.034	1.405 1.404	1.142 1.142	1.009 1.009
1.40	7.620 7.620	6.711 6.710	4.694 4.691	2.933 2.931	1.906 1.905	1.393 1.392	1.153 1.153	1.014 1.014
1.50	4.649 4.650	4.283 4.283	3.385 3.384	2.437 2.436	1.759 1.759	1.363 1.362	1.155 1.155	1.018 1.018
1.75	2.163 2.163	2.095 2.095	1.911 1.910	1.668 1.667	1.434 1.434	1.253 1.253	1.132 1.132	1.024 1.024
2.00	1.479 1.479	1.458 1.458	1.401 1.401	1.320 1.320	1.233 1.233	1.154 1.154	1.092 1.092	1.024 1.024

Tabelle 2.21: Vergleich modifizierte Karte (oben) – Residuenkarte (unten): $n = 10$, $\alpha = 0.0$

Δ \ a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00
1.00	500.151 500.000	275.622 274.794	87.415 87.161	28.284 28.256	10.784 10.789	4.964 4.970	2.746 2.750	1.358 1.359
1.10	146.801 112.701	102.387 84.265	45.710 41.532	18.918 18.128	8.551 8.385	4.428 4.387	2.645 2.634	1.392 1.391
1.20	55.984 35.356	44.803 30.480	25.789 20.236	13.203 11.565	6.939 6.467	3.983 3.834	2.546 2.492	1.420 1.411
1.30	26.016 14.713	22.562 13.537	15.487 10.630	9.437 7.405	5.672 4.898	3.579 3.279	2.435 2.311	1.439 1.413
1.40	14.077 7.620	12.810 7.242	9.890 6.233	6.891 4.932	4.647 3.709	3.195 2.761	2.307 2.103	1.446 1.396
1.50	8.579 4.650	8.044 4.499	6.714 4.080	5.163 3.494	3.824 2.874	2.837 2.324	2.165 1.893	1.441 1.362
1.75	3.608 2.163	3.511 2.135	3.243 2.055	2.873 1.933	2.476 1.785	2.109 1.629	1.802 1.482	1.380 1.248
2.00	2.151 1.479	2.124 1.470	2.045 1.446	1.929 1.408	1.790 1.360	1.646 1.306	1.509 1.251	1.286 1.150

Tabelle 2.22: Vergleich modifizierte Karte (oben) – Residuenkarte (unten): $n = 10$, $\alpha = 0.5$

2.6 Anhang zu Kapitel 2

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	0.887 14.175	0.958 8.909	0.602 8.403	0.613 7.186	0.350 5.379	0.276 4.426	0.233 3.916	0.241 4.515
-0.70	1.087 13.387	1.008 8.425	0.727 7.536	0.673 6.429	0.419 4.506	0.331 3.672	0.281 3.209	0.248 2.906
-0.60	1.255 12.600	1.070 7.903	0.832 6.778	0.742 5.765	0.483 3.917	0.384 3.200	0.328 2.810	0.291 2.561
-0.50	1.403 11.812	1.143 7.382	0.928 6.128	0.818 5.210	0.545 3.502	0.436 2.879	0.374 2.545	0.333 2.332
-0.40	1.537 11.025	1.226 6.889	1.019 5.585	0.897 4.758	0.608 3.198	0.489 2.649	0.420 2.357	0.374 2.172
-0.30	1.660 10.237	1.316 6.438	1.110 5.142	0.980 4.394	0.672 2.973	0.543 2.483	0.468 2.223	0.417 2.058
-0.20	1.775 9.450	1.412 6.029	1.204 4.790	1.066 4.106	0.739 2.808	0.600 2.363	0.518 2.127	0.462 1.977
-0.10	1.882 8.662	1.514 5.653	1.301 4.509	1.158 3.883	0.811 2.692	0.660 2.282	0.570 2.064	0.510 1.925
0.00	1.984 7.875	1.620 5.296	1.403 4.278	1.255 3.714	0.887 2.620	0.725 2.237	0.627 2.030	0.561 1.898
0.10	2.081 7.087	1.730 4.942	1.512 4.074	1.359 3.580	0.971 2.586	0.796 2.222	0.690 2.023	0.618 1.894
0.20	2.174 6.300	1.842 4.577	1.627 3.874	1.472 3.464	1.064 2.582	0.875 2.235	0.760 2.040	0.682 1.912
0.30	2.262 5.512	1.958 4.187	1.749 3.658	1.594 3.343	1.169 2.600	0.965 2.273	0.841 2.081	0.755 1.952
0.40	2.348 4.725	2.075 3.760	1.878 3.404	1.727 3.192	1.289 2.627	1.071 2.330	0.935 2.143	0.841 2.013
0.50	2.430 3.937	2.194 3.287	2.015 3.092	1.872 2.986	1.431 2.643	1.198 2.399	1.050 2.224	0.946 2.096
0.60	2.510 3.150	2.314 2.760	2.159 2.702	2.030 2.695	1.601 2.614	1.355 2.461	1.195 2.318	1.080 2.200
0.70	2.587 2.362	2.436 2.171	2.310 2.215	2.202 2.287	1.809 2.484	1.560 2.474	1.387 2.400	1.260 2.314
0.80	2.662 1.575	2.558 1.517	2.469 1.613	2.388 1.728	2.068 2.151	1.837 2.330	1.663 2.384	1.534 2.394

Tabelle 2.23: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 100$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	0.956 16.449	1.035 10.379	0.648 9.710	0.661 8.321	0.377 6.150	0.297 5.015	0.252 4.429	0.304 6.581
-0.70	1.171 15.535	1.088 9.770	0.783 8.683	0.726 7.395	0.452 5.097	0.357 4.100	0.303 3.547	0.268 3.189
-0.60	1.352 14.621	1.155 9.126	0.897 7.782	0.800 6.587	0.521 4.383	0.414 3.531	0.353 3.071	0.313 2.777
-0.50	1.511 13.707	1.233 8.489	1.000 7.002	0.881 5.910	0.587 3.880	0.470 3.146	0.403 2.755	0.358 2.508
-0.40	1.656 12.794	1.321 7.886	1.098 6.342	0.966 5.357	0.655 3.514	0.527 2.872	0.453 2.534	0.403 2.320
-0.30	1.788 11.880	1.418 7.335	1.196 5.801	1.055 4.913	0.724 3.244	0.585 2.674	0.504 2.375	0.449 2.186
-0.20	1.912 10.966	1.521 6.842	1.297 5.372	1.149 4.564	0.797 3.046	0.646 2.533	0.558 2.263	0.498 2.092
-0.10	2.028 10.052	1.631 6.400	1.401 5.037	1.247 4.299	0.873 2.910	0.711 2.439	0.615 2.190	0.549 2.032
0.00	2.138 9.138	1.745 5.990	1.511 4.773	1.352 4.105	0.956 2.829	0.781 2.387	0.676 2.152	0.605 2.001
0.10	2.242 8.224	1.863 5.594	1.628 4.550	1.464 3.963	1.046 2.795	0.857 2.374	0.744 2.146	0.666 1.999
0.20	2.342 7.311	1.985 5.190	1.752 4.341	1.585 3.849	1.146 2.801	0.943 2.396	0.819 2.171	0.734 2.024
0.30	2.437 6.397	2.109 4.760	1.884 4.115	1.717 3.732	1.259 2.837	1.040 2.449	0.906 2.224	0.813 2.074
0.40	2.529 5.483	2.235 4.287	2.023 3.847	1.860 3.584	1.389 2.886	1.154 2.528	1.008 2.304	0.906 2.151
0.50	2.618 4.569	2.363 3.757	2.171 3.509	2.016 3.370	1.541 2.926	1.290 2.623	1.131 2.410	1.019 2.255
0.60	2.704 3.655	2.493 3.161	2.326 3.077	2.187 3.056	1.724 2.918	1.460 2.715	1.287 2.534	1.163 2.388
0.70	2.787 2.741	2.624 2.491	2.489 2.531	2.372 2.605	1.948 2.796	1.680 2.757	1.495 2.652	1.358 2.540
0.80	2.868 1.828	2.756 1.743	2.659 1.848	2.573 1.975	2.227 2.440	1.979 2.625	1.791 2.668	1.657 2.675

Tabelle 2.24: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 200$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	0.994 17.789	1.078 11.244	0.674 10.480	0.688 8.988	0.392 6.604	0.309 5.362	0.258 4.603	0.305 6.622
-0.70	1.218 16.801	1.133 10.561	0.814 9.359	0.755 7.964	0.470 5.446	0.371 4.352	0.315 3.746	0.278 3.354
-0.60	1.406 15.813	1.201 9.846	0.933 8.373	0.832 7.071	0.541 4.657	0.430 3.724	0.368 3.222	0.326 2.904
-0.50	1.572 14.825	1.282 9.141	1.040 7.517	0.916 6.322	0.611 4.102	0.489 3.301	0.419 2.877	0.373 2.609
-0.40	1.722 13.836	1.374 8.474	1.142 6.789	1.005 5.709	0.681 3.699	0.548 3.002	0.471 2.635	0.419 2.405
-0.30	1.860 12.848	1.474 7.864	1.244 6.189	1.098 5.217	0.753 3.401	0.609 2.785	0.524 2.462	0.467 2.259
-0.20	1.988 11.860	1.582 7.320	1.348 5.713	1.195 4.831	0.828 3.184	0.672 2.631	0.580 2.340	0.518 2.157
-0.10	2.109 10.871	1.696 6.836	1.457 5.345	1.297 4.541	0.908 3.036	0.739 2.529	0.639 2.261	0.571 2.092
0.00	2.223 9.883	1.815 6.396	1.572 5.060	1.406 4.332	0.994 2.949	0.812 2.473	0.703 2.221	0.629 2.060
0.10	2.331 8.895	1.938 5.975	1.693 4.828	1.523 4.186	1.088 2.916	0.891 2.462	0.773 2.216	0.692 2.059
0.20	2.435 7.906	2.064 5.550	1.822 4.613	1.649 4.073	1.192 2.929	0.980 2.489	0.852 2.245	0.764 2.087
0.30	2.535 6.918	2.193 5.097	1.959 4.384	1.785 3.961	1.309 2.975	1.082 2.551	0.942 2.306	0.845 2.144
0.40	2.630 5.930	2.324 4.597	2.104 4.107	1.935 3.814	1.444 3.038	1.200 2.642	1.048 2.398	0.942 2.230
0.50	2.723 4.942	2.458 4.034	2.257 3.755	2.097 3.596	1.603 3.093	1.342 2.753	1.176 2.518	1.060 2.348
0.60	2.812 3.953	2.592 3.398	2.419 3.299	2.274 3.270	1.793 3.097	1.519 2.864	1.338 2.661	1.209 2.498
0.70	2.898 2.965	2.729 2.680	2.588 2.717	2.467 2.793	2.026 2.980	1.747 2.924	1.554 2.801	1.412 2.672
0.80	2.982 1.977	2.866 1.877	2.766 1.986	2.675 2.121	2.316 2.611	2.058 2.799	1.863 2.836	1.704 2.789

Tabelle 2.25: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 300$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	1.020 18.745	1.108 11.860	0.692 11.029	0.707 9.463	0.402 6.930	0.317 5.610	0.270 4.963	0.306 6.639
-0.70	1.250 17.703	1.164 11.124	0.836 9.841	0.775 8.369	0.482 5.695	0.381 4.531	0.323 3.887	0.286 3.471
-0.60	1.443 16.662	1.234 10.359	0.957 8.795	0.855 7.417	0.556 4.852	0.442 3.862	0.377 3.330	0.335 2.993
-0.50	1.614 15.621	1.316 9.606	1.067 7.885	0.941 6.617	0.627 4.260	0.502 3.412	0.430 2.963	0.382 2.681
-0.40	1.768 14.579	1.410 8.893	1.172 7.107	1.032 5.961	0.699 3.829	0.563 3.093	0.484 2.707	0.430 2.464
-0.30	1.909 13.538	1.513 8.241	1.277 6.465	1.127 5.433	0.773 3.512	0.625 2.863	0.538 2.524	0.480 2.310
-0.20	2.041 12.497	1.624 7.659	1.384 5.955	1.226 5.020	0.850 3.281	0.690 2.699	0.595 2.395	0.531 2.203
-0.10	2.165 11.455	1.741 7.147	1.496 5.563	1.332 4.711	0.932 3.124	0.759 2.591	0.656 2.311	0.586 2.135
0.00	2.282 10.414	1.863 6.684	1.614 5.264	1.443 4.493	1.020 3.033	0.833 2.534	0.722 2.269	0.645 2.101
0.10	2.393 9.372	1.989 6.246	1.738 5.024	1.563 4.343	1.117 3.000	0.915 2.523	0.794 2.265	0.711 2.100
0.20	2.500 8.331	2.119 5.806	1.871 4.807	1.692 4.232	1.224 3.018	1.006 2.554	0.875 2.298	0.784 2.131
0.30	2.602 7.290	2.251 5.337	2.011 4.575	1.833 4.123	1.344 3.073	1.110 2.623	0.967 2.364	0.868 2.193
0.40	2.700 6.248	2.386 4.818	2.160 4.293	1.986 3.978	1.483 3.146	1.232 2.723	1.076 2.463	0.967 2.286
0.50	2.795 5.207	2.523 4.232	2.317 3.930	2.153 3.758	1.646 3.211	1.378 2.846	1.207 2.594	1.088 2.413
0.60	2.886 4.166	2.661 3.567	2.483 3.457	2.334 3.422	1.841 3.225	1.559 2.970	1.374 2.751	1.241 2.576
0.70	2.975 3.124	2.801 2.815	2.657 2.850	2.532 2.927	2.080 3.112	1.794 3.042	1.596 2.906	1.450 2.766
0.80	3.061 2.083	2.942 1.972	2.839 2.085	2.746 2.225	2.378 2.732	2.112 2.923	1.912 2.956	1.743 2.885

Tabelle 2.26: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 400$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	1.041 19.488	1.130 12.339	0.706 11.456	0.721 9.833	0.410 7.181	0.324 5.805	0.274 5.074	0.306 6.648
-0.70	1.274 18.405	1.187 11.562	0.852 10.215	0.791 8.683	0.492 5.889	0.388 4.671	0.330 3.996	0.291 3.561
-0.60	1.472 17.323	1.258 10.758	0.976 9.123	0.871 7.685	0.567 5.004	0.451 3.969	0.385 3.413	0.341 3.062
-0.50	1.645 16.240	1.342 9.968	1.088 8.171	0.959 6.846	0.639 4.382	0.512 3.497	0.439 3.030	0.390 2.736
-0.40	1.802 15.157	1.438 9.220	1.195 7.355	1.052 6.156	0.713 3.931	0.574 3.164	0.493 2.762	0.439 2.511
-0.30	1.947 14.075	1.543 8.534	1.302 6.680	1.149 5.602	0.788 3.598	0.637 2.923	0.549 2.571	0.489 2.350
-0.20	2.081 12.992	1.656 7.923	1.411 6.143	1.251 5.167	0.867 3.357	0.703 2.752	0.607 2.437	0.542 2.238
-0.10	2.207 11.909	1.775 7.387	1.525 5.732	1.358 4.843	0.951 3.192	0.774 2.640	0.669 2.350	0.598 2.167
0.00	2.327 10.827	1.900 6.907	1.645 5.422	1.472 4.616	1.041 3.097	0.850 2.580	0.736 2.306	0.658 2.132
0.10	2.440 9.744	2.028 6.456	1.772 5.177	1.594 4.465	1.139 3.066	0.933 2.570	0.809 2.303	0.725 2.132
0.20	2.549 8.661	2.160 6.004	1.907 4.957	1.726 4.355	1.248 3.087	1.026 2.604	0.892 2.338	0.799 2.165
0.30	2.653 7.579	2.295 5.524	2.051 4.723	1.869 4.249	1.370 3.148	1.132 2.679	0.986 2.409	0.885 2.231
0.40	2.753 6.496	2.433 4.990	2.202 4.437	2.025 4.106	1.512 3.230	1.256 2.786	1.097 2.514	0.986 2.329
0.50	2.850 5.413	2.572 4.386	2.363 4.066	2.195 3.884	1.678 3.303	1.405 2.918	1.231 2.653	1.109 2.463
0.60	2.943 4.331	2.713 3.698	2.532 3.580	2.380 3.541	1.877 3.324	1.589 3.052	1.401 2.820	1.266 2.636
0.70	3.034 3.248	2.856 2.920	2.709 2.953	2.582 3.031	2.121 3.214	1.829 3.135	1.627 2.988	1.478 2.839
0.80	3.122 2.165	3.000 2.046	2.895 2.162	2.800 2.306	2.424 2.827	2.154 3.019	1.950 3.049	1.807 3.047

Tabelle 2.27: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 500$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	1.057 20.096	1.149 12.731	0.717 11.806	0.733 10.135	0.416 7.386	0.329 5.961	0.275 5.122	0.000 0.000
-0.70	1.294 18.980	1.206 11.920	0.866 10.522	0.803 8.941	0.500 6.047	0.394 4.785	0.335 4.086	0.296 3.636
-0.60	1.494 17.863	1.278 11.084	0.991 9.392	0.885 7.905	0.575 5.129	0.458 4.056	0.391 3.482	0.346 3.118
-0.50	1.671 16.747	1.363 10.264	1.105 8.405	0.974 7.033	0.649 4.482	0.520 3.567	0.446 3.085	0.396 2.781
-0.40	1.830 15.631	1.460 9.487	1.214 7.559	1.068 6.316	0.724 4.014	0.582 3.222	0.501 2.808	0.446 2.548
-0.30	1.977 14.514	1.567 8.774	1.322 6.856	1.167 5.739	0.801 3.668	0.647 2.972	0.557 2.610	0.497 2.382
-0.20	2.113 13.398	1.682 8.139	1.433 6.296	1.270 5.287	0.881 3.418	0.714 2.795	0.616 2.471	0.550 2.267
-0.10	2.241 12.281	1.803 7.584	1.549 5.870	1.379 4.951	0.965 3.247	0.786 2.679	0.679 2.381	0.607 2.193
0.00	2.363 11.165	1.929 7.090	1.671 5.550	1.494 4.717	1.057 3.150	0.863 2.618	0.747 2.336	0.668 2.158
0.10	2.478 10.048	2.060 6.628	1.800 5.301	1.618 4.564	1.156 3.119	0.947 2.608	0.822 2.334	0.736 2.158
0.20	2.588 8.932	2.194 6.167	1.937 5.080	1.752 4.456	1.267 3.144	1.042 2.645	0.905 2.371	0.812 2.193
0.30	2.694 7.815	2.331 5.676	2.082 4.845	1.898 4.352	1.392 3.210	1.150 2.724	1.001 2.445	0.899 2.262
0.40	2.796 6.699	2.470 5.131	2.236 4.556	2.056 4.210	1.535 3.298	1.275 2.838	1.114 2.556	1.001 2.364
0.50	2.894 5.582	2.612 4.512	2.399 4.178	2.229 3.987	1.704 3.378	1.426 2.977	1.250 2.701	1.126 2.504
0.60	2.989 4.466	2.755 3.806	2.571 3.681	2.417 3.638	1.906 3.406	1.614 3.120	1.423 2.877	1.285 2.685
0.70	3.081 3.349	2.900 3.006	2.751 3.038	2.622 3.116	2.154 3.297	1.857 3.210	1.652 3.055	1.501 2.899
0.80	3.170 2.233	3.046 2.107	2.940 2.224	2.844 2.372	2.462 2.904	2.187 3.098	1.980 3.125	1.820 3.081

Tabelle 2.28: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 600$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	1.070	1.164	0.726	0.742	0.422	0.333	0.277	0.000
	20.612	13.062	12.102	10.391	7.561	6.092	5.156	0.000
-0.70	1.311	1.221	0.877	0.813	0.506	0.399	0.339	0.300
	19.467	12.223	10.782	9.159	6.182	4.882	4.162	3.699
-0.60	1.513	1.294	1.004	0.896	0.583	0.463	0.396	0.351
	18.322	11.360	9.619	8.091	5.234	4.130	3.539	3.166
-0.50	1.692	1.381	1.119	0.986	0.658	0.526	0.451	0.401
	17.177	10.515	8.603	7.192	4.567	3.626	3.131	2.820
-0.40	1.853	1.479	1.229	1.082	0.733	0.590	0.507	0.451
	16.031	9.713	7.731	6.452	4.084	3.270	2.846	2.580
-0.30	2.002	1.587	1.339	1.182	0.811	0.655	0.564	0.503
	14.886	8.977	7.005	5.855	3.728	3.014	2.642	2.410
-0.20	2.140	1.703	1.452	1.286	0.892	0.723	0.624	0.557
	13.741	8.322	6.426	5.389	3.469	2.832	2.499	2.291
-0.10	2.270	1.826	1.569	1.396	0.978	0.796	0.688	0.615
	12.596	7.750	5.986	5.042	3.294	2.712	2.407	2.216
0.00	2.393	1.954	1.692	1.513	1.070	0.874	0.757	0.677
	11.451	7.244	5.659	4.803	3.194	2.649	2.362	2.179
0.10	2.510	2.086	1.823	1.639	1.171	0.959	0.832	0.745
	10.306	6.773	5.406	4.648	3.163	2.640	2.359	2.180
0.20	2.621	2.222	1.962	1.775	1.283	1.055	0.917	0.822
	9.161	6.305	5.184	4.541	3.191	2.679	2.398	2.216
0.30	2.728	2.361	2.109	1.922	1.409	1.164	1.014	0.910
	8.016	5.806	4.948	4.439	3.262	2.762	2.476	2.288
0.40	2.831	2.502	2.265	2.082	1.555	1.292	1.128	1.014
	6.871	5.250	4.656	4.299	3.356	2.881	2.591	2.394
0.50	2.931	2.645	2.430	2.257	1.726	1.445	1.266	1.141
	5.726	4.618	4.273	4.074	3.442	3.026	2.742	2.539
0.60	3.027	2.790	2.604	2.448	1.930	1.635	1.441	1.302
	4.580	3.897	3.767	3.720	3.474	3.177	2.925	2.726
0.70	3.120	2.937	2.786	2.655	2.181	1.881	1.673	1.520
	3.435	3.079	3.110	3.188	3.368	3.274	3.112	2.950
0.80	3.210	3.085	2.977	2.880	2.493	2.215	2.005	1.829
	2.290	2.158	2.278	2.428	2.970	3.165	3.189	3.106

Tabelle 2.29: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 700$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	1.082	1.177	0.734	0.750	0.426	0.336	0.277	0.306
	21.059	13.350	12.359	10.613	7.713	6.209	5.185	6.662
-0.70	1.325	1.235	0.886	0.822	0.511	0.404	0.343	0.303
	19.889	12.486	11.008	9.349	6.298	4.966	4.228	3.753
-0.60	1.530	1.308	1.015	0.906	0.589	0.468	0.400	0.355
	18.719	11.600	9.817	8.253	5.326	4.194	3.589	3.207
-0.50	1.710	1.396	1.131	0.997	0.665	0.532	0.456	0.405
	17.549	10.733	8.776	7.330	4.641	3.677	3.170	2.852
-0.40	1.873	1.495	1.243	1.093	0.741	0.596	0.512	0.456
	16.379	9.910	7.880	6.569	4.144	3.313	2.879	2.607
-0.30	2.024	1.604	1.354	1.194	0.819	0.662	0.570	0.509
	15.209	9.153	7.134	5.956	3.779	3.050	2.670	2.433
-0.20	2.163	1.722	1.467	1.300	0.901	0.731	0.631	0.563
	14.039	8.481	6.539	5.477	3.514	2.863	2.524	2.312
-0.10	2.294	1.845	1.586	1.411	0.988	0.804	0.695	0.621
	12.869	7.894	6.087	5.121	3.334	2.741	2.430	2.235
0.00	2.419	1.975	1.710	1.530	1.082	0.883	0.765	0.684
	11.699	7.377	5.753	4.876	3.232	2.677	2.383	2.198
0.10	2.537	2.108	1.842	1.657	1.184	0.970	0.841	0.753
	10.530	6.899	5.497	4.720	3.202	2.668	2.382	2.199
0.20	2.649	2.246	1.983	1.794	1.297	1.067	0.927	0.831
	9.360	6.424	5.274	4.615	3.232	2.709	2.422	2.237
0.30	2.758	2.386	2.132	1.943	1.425	1.177	1.025	0.920
	8.190	5.918	5.037	4.515	3.307	2.795	2.502	2.310
0.40	2.862	2.529	2.289	2.105	1.572	1.306	1.140	1.025
	7.020	5.354	4.743	4.375	3.406	2.918	2.621	2.420
0.50	2.962	2.674	2.456	2.282	1.744	1.460	1.280	1.153
	5.850	4.711	4.355	4.150	3.497	3.070	2.777	2.569
0.60	3.059	2.821	2.632	2.474	1.951	1.652	1.456	1.316
	4.680	3.977	3.841	3.791	3.534	3.226	2.967	2.762
0.70	3.153	2.969	2.816	2.684	2.205	1.901	1.691	1.536
	3.510	3.142	3.172	3.251	3.430	3.330	3.161	2.993
0.80	3.245	3.118	3.009	2.911	2.520	2.239	2.027	1.838
	2.340	2.203	2.324	2.477	3.027	3.224	3.245	3.128

Tabelle 2.30: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 800$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	1.092	1.188	0.740	0.758	0.430	0.340	0.291	0.307
	21.453	13.604	12.586	10.809	7.848	6.313	5.603	6.664
-0.70	1.337	1.246	0.894	0.830	0.516	0.407	0.346	0.306
	20.262	12.718	11.207	9.516	6.402	5.040	4.286	3.801
-0.60	1.544	1.321	1.024	0.914	0.595	0.473	0.404	0.358
	19.070	11.812	9.991	8.396	5.407	4.251	3.633	3.243
-0.50	1.726	1.409	1.142	1.006	0.671	0.537	0.460	0.409
	17.878	10.925	8.928	7.452	4.706	3.722	3.205	2.881
-0.40	1.891	1.509	1.254	1.104	0.748	0.602	0.517	0.461
	16.686	10.083	8.012	6.673	4.198	3.350	2.908	2.631
-0.30	2.042	1.619	1.366	1.205	0.827	0.668	0.576	0.513
	15.494	9.309	7.248	6.045	3.824	3.081	2.695	2.454
-0.20	2.183	1.738	1.481	1.312	0.910	0.738	0.637	0.568
	14.303	8.620	6.639	5.554	3.553	2.891	2.546	2.330
-0.10	2.316	1.863	1.600	1.424	0.997	0.812	0.702	0.627
	13.111	8.022	6.176	5.190	3.370	2.766	2.450	2.251
0.00	2.441	1.993	1.726	1.544	1.092	0.891	0.772	0.690
	11.919	7.495	5.836	4.941	3.266	2.701	2.403	2.214
0.10	2.560	2.128	1.860	1.672	1.195	0.979	0.849	0.760
	10.727	7.010	5.577	4.784	3.236	2.692	2.401	2.215
0.20	2.674	2.267	2.001	1.810	1.309	1.076	0.936	0.839
	9.535	6.529	5.353	4.680	3.269	2.735	2.443	2.254
0.30	2.783	2.408	2.151	1.961	1.438	1.188	1.035	0.928
	8.343	6.017	5.116	4.582	3.347	2.824	2.525	2.329
0.40	2.888	2.553	2.311	2.124	1.586	1.318	1.151	1.034
	7.151	5.445	4.820	4.443	3.450	2.951	2.648	2.442
0.50	2.990	2.699	2.479	2.303	1.760	1.474	1.292	1.164
	5.959	4.793	4.428	4.217	3.546	3.108	2.808	2.595
0.60	3.088	2.847	2.656	2.497	1.969	1.668	1.470	1.328
	4.768	4.047	3.906	3.854	3.587	3.270	3.004	2.794
0.70	3.183	2.996	2.842	2.709	2.225	1.919	1.707	1.551
	3.576	3.198	3.227	3.307	3.484	3.379	3.205	3.032
0.80	3.275	3.147	3.037	2.938	2.544	2.260	2.046	1.847
	2.384	2.242	2.365	2.520	3.077	3.275	3.295	3.151

Tabelle 2.31: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\text{ARL}_0 = 900$ (oben x_c, unten s_c)

α \ n	2	3	4	5	10	15	20	25
-0.80	1.101 21.806	1.198 13.831	0.747 12.789	0.764 10.984	0.434 7.969	0.342 6.407	0.292 5.635	0.307 6.666
-0.70	1.348 20.596	1.257 12.926	0.902 11.385	0.837 9.665	0.520 6.494	0.411 5.106	0.349 4.338	0.308 3.844
-0.60	1.557 19.384	1.331 12.001	1.033 10.147	0.922 8.524	0.599 5.479	0.477 4.301	0.407 3.672	0.361 3.276
-0.50	1.740 18.173	1.420 11.097	1.151 9.064	1.015 7.561	0.676 4.764	0.541 3.763	0.464 3.237	0.412 2.907
-0.40	1.906 16.961	1.521 10.239	1.265 8.130	1.113 6.766	0.754 4.246	0.607 3.383	0.522 2.933	0.464 2.653
-0.30	2.059 15.750	1.632 9.448	1.377 7.350	1.215 6.125	0.834 3.865	0.674 3.109	0.580 2.717	0.518 2.472
-0.20	2.201 14.538	1.752 8.746	1.493 6.728	1.323 5.624	0.917 3.588	0.744 2.915	0.642 2.565	0.573 2.346
-0.10	2.335 13.327	1.878 8.135	1.613 6.256	1.436 5.252	1.006 3.401	0.818 2.788	0.708 2.468	0.632 2.266
0.00	2.461 12.115	2.010 7.601	1.740 5.910	1.557 4.999	1.101 3.296	0.899 2.722	0.778 2.420	0.696 2.228
0.10	2.581 10.904	2.146 7.109	1.875 5.649	1.686 4.841	1.205 3.266	0.987 2.714	0.856 2.418	0.766 2.230
0.20	2.696 9.692	2.285 6.623	2.018 5.425	1.825 4.738	1.320 3.301	1.085 2.759	0.943 2.461	0.845 2.270
0.30	2.806 8.481	2.428 6.106	2.169 5.186	1.977 4.642	1.450 3.383	1.198 2.850	1.043 2.546	0.936 2.347
0.40	2.912 7.269	2.573 5.527	2.330 4.889	2.142 4.504	1.599 3.489	1.328 2.981	1.160 2.671	1.043 2.462
0.50	3.014 6.058	2.721 4.866	2.499 4.493	2.322 4.277	1.775 3.590	1.486 3.142	1.302 2.836	1.173 2.619
0.60	3.113 4.846	2.870 4.109	2.678 3.965	2.518 3.911	1.986 3.634	1.681 3.309	1.482 3.037	1.339 2.823
0.70	3.209 3.635	3.021 3.248	2.866 3.276	2.731 3.356	2.244 3.533	1.935 3.423	1.721 3.244	1.564 3.067
0.80	3.302 2.423	3.173 2.278	3.062 2.401	2.962 2.559	2.565 3.122	2.278 3.321	2.063 3.340	1.926 3.367

Tabelle 2.32: Eingriffsgrenzen der modifizierten $\bar{X}$-S^2-Karte: $\mathrm{ARL}_0 = 1000$ (oben x_c, unten s_c)

Kapitel 3

Eine VSI-Shewhart-Karte für korrelierte Daten

3.1 Grundlagen

In der herkömmlichen Prozeßkontrolle besteht das grundsätzliche Vorgehen darin, anhand der aktuellen und eventuell der vorhergehenden Stichproben unter Zuhilfenahme einer Teststatistik zu entscheiden, ob sich die Qualität des zu kontrollierenden Merkmales noch in einem tolerierbaren Rahmen befindet, oder ob mit korrigierenden Maßnahmen in den Prozeß eingegriffen werden muß.

Bereits 1955 wurde von Page eine Erweiterung dieses Verfahrens um sogenannte Warngrenzen und erweiterte Entscheidungsregeln vorgeschlagen. Bei seinem Verfahren wird der Bereich, in dem der Prozeß noch als kontrolliert betrachtet wird, in zwei oder mehr Gebiete aufgeteilt. Je nachdem, in welches Gebiet die Teststatistik fällt und wie oft sie bereits in diesem Gebiet war, wird nun früher als gewöhnlich das Signal zum Eingriff gegeben. Die Motivation für dieses Verfahren besteht darin, daß nicht nur ein Verlassen des zulässigen Bereiches ein Anlaß zum Abbruch sein sollte, sondern auch häufige Realisationen der Teststatistik am Rand des zulässigen Bereiches. Eine typische erweiterte Entscheidungsregel ist die „k aus n Regel". Bei ihr wird auch dann ein Signal gegeben, wenn zwar keine Realisation außerhalb des zulässigen Bereiches lag, jedoch k der letzten n Realisationen der Teststatistik im sogenannten Warngebiet lagen. Dabei bezeichnet das Warngebiet einen Teil des zulässigen Bereiches in direkter Umgebung der Eingriffsgrenzen.

Die Anwendung dieses Verfahrens führt bei geringen bis großen Abweichungen vom Sollwert zu einer merklichen Verbesserung in der Reaktionsschnelligkeit der Kontrollkarte. Erst bei sehr großen Abweichungen, deren plötzliches Auftreten in der Praxis unter normalen Rahmenbedingungen nicht zu erwarten ist, verschlechtert dieses Verfahren die Leistungsfähigkeit der Karte. Da die Lauflänge der meisten Karten bei sehr großen Abweichungen im allgemeinen bereits sehr dicht bei 1 liegt, fällt dieser Nachteil nicht ins Gewicht.

Eine weitere Verbesserung herkömmlicher Karten basiert im Grunde auf diesem, von Page (1955) entwickelten Verfahren. Hierzu wird ebenfalls der zulässige Bereich in mehrere Teilgebiete aufgeteilt. Wie bei Page besteht die prinzipielle Idee darin, daß eine Realisation der Teststatistik am Rande des zulässigen Bereiches Anlaß zum Verdacht geben soll, daß der Prozeß unter Umständen nicht mehr unter Kontrolle verläuft. Im Gegensatz zu Page wird nun aber nicht bis zur nächsten regulären Stichprobe gewartet, um gegebenenfalls erst dann eine Entscheidung zu treffen, sondern es wird die nächste Stichprobe einfach zu einem früheren Zeitpunkt gezogen. Analog dazu wird, falls die Teststatistik nahe am Sollwert liegt, davon ausgegangen, daß der Prozeß noch unter Kontrolle ist und man wartet mit der nächsten Stichprobenentnahme länger als normal.

Der grundsätzliche Gedanke anstatt fester Stichprobenabstände variable Abstände zu verwenden, wurde schon sehr früh entwickelt. So wurden 1943 von Dodge und 1955 von Lieberman und Solomon Verfahren zur Verbesserung der Qualität der Endprodukte vorgeschlagen, bei denen die Stichprobenentnahme in unterschiedlichen Abständen erfolgt. Diese Vorschläge wurden 1970 von Arnold erneut aufgegriffen und bis Anfang der achtziger Jahre in verschiedenen Arbeiten weiterentwickelt (vergleiche unter anderem Crigler (1973), Smeach und Jernigan (1977), Crigler und Arnold (1979), Hui und Jensen (1980), Arnold und Crigler (1986)). Erst gegen Ende der achtziger Jahre wurde diese Idee von Reynolds, Amin, Arnold und Nachlas in verschiedenen Arbeiten (siehe auch Amin (1987), Reynolds et al. (1988)) auf das Prinzip der Kontrollkarte erweitert. Mittlerweile wurde diese Idee auf die verschiedensten Kontrolldesigns angewendet (vergleiche zum Beispiel Cui und Reynolds (1988), Reynolds (1989a), Reynolds (1989b), Rendtel (1990), Reynolds et al. (1990), Shamma et al. (1991), Amin und Miller (1993), Harvey et al. (1995), Reynolds (1996)). Es wurden dabei die grundlegenden Eigenschaften dieser Karten bewiesen, oder falls dies nicht möglich war, anhand empirischer Daten belegt.

3.1.1 Notation

Die allgemeine Notation für Karten mit variablen Stichprobenabständen soll hier nur kurz eingeführt werden. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf Reynolds (1989a,b) verwiesen. Die Qualität des zu kontrollierenden Merkmales θ wird durch eine Zufallsvariable X dargestellt, deren Verteilung durch die Dichte $f(x|\theta)$ festgelegt ist. Der Sollwert ist dabei durch θ_0 gegeben.

Zur Kontrolle des Prozesses werden Stichproben der Größe n entnommen. Die i-te Stichprobe wird hierbei mit $\boldsymbol{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$ bezeichnet.

Anhand jeder Stichprobe wird entschieden, ob der Prozeß gestoppt werden soll und wenn nicht, wann die nächste Stichprobe gezogen wird. Im folgenden sollen nur Entscheidungsregeln betrachtet werden, die keine vorhergehenden Stichproben mit einbeziehen, die also ihre Entscheidung nur anhand der aktuellen Stichprobe treffen. Es ist jedoch problemlos möglich, die hier dargestellte Theorie und Notation zusätzlich auch auf vorhergehende Stichproben zu erweitern. Die beiden Entscheidungsregeln, ob in den Prozeß eingegriffen und zu welchem Zeitpunkt die nächste Stichprobe entnommen werden soll, werden durch die Funktionen $s(\cdot)$ und $d(\cdot)$ definiert.

Dabei bezeichnet $s(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ die sogenannte *Signalfunktion*, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei Vorliegen einer Stichprobe $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ der Prozeß gestoppt werden soll. Bei der klassischen Mittelwertkarte für unabhängige Daten hat die Signalfunktion folgendes Aussehen

$$s(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |\bar{x} - \theta_0| > z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ 0, & \text{falls } |\bar{x} - \theta_0| \leq z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Mit $d(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to [d_{\min}, d_{\max}]$ wird die *Intervallfunktion* bezeichnet, die angibt, wie groß der zeitliche Abstand zur nächsten Stichprobenentnahme sein soll, falls die Stichprobe $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ vorliegt. Die Werte $d_{\min}$ und $d_{\max}$ werden dabei durch den Anwendungsbezug vorgegeben. So kann zum Beispiel $d_{\min}$ durch die Zeitspanne zwischen der Fertigstellung zweier aufeinanderfolgender Produkte gegeben sein. Für $d_{\max}$ wird im allgemeinen die Zeit gewählt, die man bereit ist, den Prozeß ohne Kontrolle laufen zu lassen. Eine typische Intervallfunktion für die klassische Mittelwertkarte für unabhängige Daten könnte folgendes Aussehen haben

$$d(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} d_{\max}, & \text{falls } |\bar{x} - \theta_0| \leq 0.75 z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ d_{\min}, & \text{falls } 0.75 z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < |\bar{x} - \theta_0| \leq z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ 0, & \text{falls } |\bar{x} - \theta_0| > z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Für die Entscheidungsregeln, sowie für die Berechnung der im Anschluß vorgestellten Gütekriterien, ist die Definition der Intervallfunktion $d(\boldsymbol{x})$ auf der Menge $S := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | s(\boldsymbol{x}) = 1\}$ irrelevant. Zwei Intervallfunktionen $d_1(\boldsymbol{x})$ und $d_2(\boldsymbol{x})$ werden daher als identisch bezeichnet, falls $d_1(\boldsymbol{x}) = d_2(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash S$.

Als Kontrollkarte mit variablen Stichprobenintervallen, oder kurz *VSI-Karte*, wird ein Paar (s, d) bezeichnet. Die herkömmlichen Kontrollkarten mit festen Stichprobenintervallen werden zur Unterscheidung als *FSI-Karten* bezeichnet.

3.1.2 Gütekriterien

Zur Beurteilung des Verhaltens einer Kontrollkarte in verschiedenen Zuständen benötigt man Gütekriterien. Bei der klassischen FSI-Karte wird im allgemeinen die durchschnittliche Lauflänge ARL verwendet, die angibt, wieviel Stichproben im Durchschnitt vom Auftreten einer Änderung bis zu deren Entdeckung entnommen werden müssen. Da bei VSI-Karten nicht nur die Anzahl der Stichproben, sondern auch die Zeit bis zum Eingriff eine Rolle spielt, müssen für diese Art von Kontrollschema weitere Gütekriterien betrachtet werden.

Für VSI-Karten wurden in der Literatur (siehe auch Reynolds et al. (1988) und Reynolds (1989a,b)) unter anderem folgende Gütekriterien vorgeschlagen:

- Zeitdauer vom Auftreten einer Änderung des beobachteten Merkmales bis zu deren Entdeckung
- Anzahl der Stichproben, die entnommen werden müssen, bis eine aufgetretene Änderung entdeckt wird
- Häufigkeit von Fehlalarmen
- Häufigkeit von Stichprobenentnahmen
- Wechselfrequenz zwischen den Intervallabständen

Natürlich könnten auch noch verschiedene Kostenfaktoren, wie zum Beispiel die Prüfkosten oder die durch mangelnde Qualität entstehenden Kosten, mit in die Beurteilung einbezogen werden. Diese Art von Gütekriterien sollen hier jedoch nicht betrachtet werden.

Im Gegensatz zu FSI-Karten reicht es bei VSI-Karten jedoch nicht aus, nur ein Gütekriterium zu betrachten. So wird offensichtlich die Zeit bis zur Aufdeckung einer Änderung minimiert, falls immer der minimale Stichprobenabstand verwendet wird. Dies widerspricht jedoch der Idee der VSI-Karte, durch eine adaptive Wahl des Stichprobenabstandes rationell vorzugehen.

Man verwendet deshalb immer eine Kombination mehrerer Kriterien. In der Literatur zu VSI-Karten sind dies immer die beiden ersten der oben aufgeführten Kriterien, d.h. die Anzahl der Stichproben und die vergangene Zeit, bis eine Änderung entdeckt wird. Darum werden bei Untersuchungen zur Beurteilung der Güte einer VSI-Karte in diesem Kapitel diese beiden Kriterien zugrundegelegt.

Zur Vereinfachung soll von nun an die folgende Notation verwendet werden. Mit $\mathrm{ANSS}_{(s,d)}(\theta)$ wird die durchschnittliche Stichprobenanzahl vom Auftreten einer Änderung von θ_0 zu θ bis zum Stoppen des Prozesses bezeichnet (**A**verage **N**umber of **S**amples to **S**ignal). Dementsprechend soll $\mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta)$ die durchschnittliche Zeit vom Auftreten der Änderung bis zum Anhalten des Prozesses bezeichnen (**A**verage **T**ime to **S**ignal). Falls es offensichtlich, beziehungsweise unwichtig ist, welche Karte (s, d) oder welches θ gemeint ist, wird auch nur $\mathrm{ANSS}(\theta)$ oder ANSS geschrieben.

Die Gütekriterien ANSS und ATS können natürlich auch bei FSI-Karten betrachtet werden. Hier gilt dann $\mathrm{ANSS} = \mathrm{ARL}$ und $\mathrm{ATS} = d \cdot \mathrm{ARL}$, wobei d den Abstand zwischen zwei Stichproben bei der FSI-Karte bezeichnet.

Die Berechnung der Gütekriterien für VSI-Karten gestaltet sich analog dem Fall von FSI-Karten in den meisten Fällen einfach. Bezeichnet man mit R_1 die Länge des Intervalls vor der ersten Stichprobe, dann erhält man unter den Annahmen, daß R_1 dieselbe Verteilung besitzt wie die folgenden Stichprobenintervalle, d.h.

$$P(R_1 = d) = P\big(d(\boldsymbol{X}) = d \,|\, s(\boldsymbol{X}) < 1\big),$$

und daß

$$0 < E(s(\boldsymbol{X})) < 1$$

ist, folgende Ergebnisse für ANSS und ATS (vgl. Reynolds (1989a))

$$\begin{aligned} \mathrm{ANSS}_{(s,d)}(\theta) &= \frac{1}{E\big(s(\boldsymbol{X})\big)}, \\ \mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta) &= \frac{E\big((1 - s(\boldsymbol{X}))d(\boldsymbol{X})\big)}{E\big(s(\boldsymbol{X})\big)E\big(1 - s(\boldsymbol{X})\big)}. \end{aligned}$$

Läßt man die Verteilungsannahme für R_1 fallen, ergibt sich der folgende Ausdruck für die durchschnittliche Laufzeit

$$\mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta) = E(R_1) + \frac{E\big((1 - s(\boldsymbol{X}))d(\boldsymbol{X})\big)}{E\big(s(\boldsymbol{X})\big)}.$$

3.1.3 Optimale VSI-Karten

Bei FSI-Karten ist es recht einfach zu sagen, was es bedeutet, daß eine Karte für eine bestimmte Situation optimal ist. Man verlangt im allgemeinen, daß die durchschnittliche Lauflänge im Zustand unter Kontrolle größer als ein gewünschter Wert ist und für einen vorgegebenen Zustand außer Kontrolle möglichst klein wird. Man steht also vor dem Problem, $\mathrm{ARL}(\theta_1)$ unter der Nebenbedingung, daß $\mathrm{ARL}(\theta_0) > L_0$ für gegebenes L_0 ist, zu minimieren.

Bei VSI-Karten müssen hingegen ATS und ANSS berücksichtigt werden. In der Literatur (siehe unter anderem Reynolds (1989a)) haben sich die folgenden Anforderungen durchgesetzt. Um Fehlalarme und eine unnötig hohe Anzahl von Stichprobenentnahmen zu vermeiden, sollte im Zustand unter Kontrolle $\mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta_0)$ nicht zu klein und $\mathrm{ANSS}_{(s,d)}(\theta_0)$ nicht zu groß sein. Dagegen sollte bei einer Änderung von θ_0 zu θ_1 $\mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta_1)$ möglichst gering sein, um die Änderung schnell zu entdecken.

Man steht also vor dem Optimierungsproblem

$$\min_{(s,d)} \mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta_1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta_0) &\geq T_0, \\ \mathrm{ANSS}_{(s,d)}(\theta_0) &\leq N_0, \end{aligned}$$

wobei T_0 und N_0 vom Anwender gegebene Schranken sind.

Um zu garantieren, daß mindestens ein Paar (s, d) existiert, welches obige Nebenbedingungen erfüllt, sollten T_0 und N_0 folgende Bedingung erfüllen

$$N_0 d_{\min} \leq T_0 \leq N_0 d_{\max}.$$

Ist dies erfüllt, kann $s(\boldsymbol{x})$ so gewählt werden, daß $E(s(\boldsymbol{X}) \mid \theta_0) = N_0^{-1}$ ist. In diesem Fall gilt, daß $\mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta_0)$ gleich $N_0 d_{\min}$ ist, falls die Karte immer den minimalen Intervallabstand verwendet, beziehungsweise gleich $N_0 d_{\max}$, falls sie immer den maximalen Intervallabstand benutzt. Damit garantiert die obige Bedingung also, daß $\mathrm{ATS}_{(s,d)}(\theta_0)$ größer oder gleich T_0 werden kann, falls $\mathrm{ANSS}_{(s,d)}(\theta_0) = N_0$ ist.

In Reynolds (1989a) wird das mathematische Grundgerüst für die Arbeit mit VSI-Shewhart-Karten entwickelt, d.h. für VSI-Karten, die nur die aktuelle Stichprobe zur Kontrolle des Mittelwertes verwenden. Die dort bewiesenen Sätze liefern für verschiedenste Fälle und Voraussetzungen optimale einseitige VSI-Karten, d.h. VSI-Karten, die nur Abweichungen vom Sollwert in eine Richtung kontrollieren. Das bemerkenswerteste Ergebnis dieser Sätze ist die Aussage, daß optimale Karten stets von der Form

$$s(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } L(\boldsymbol{x}) < u, \\ \nu, & \text{falls } L(\boldsymbol{x}) = u, \\ 1, & \text{falls } L(\boldsymbol{x}) > u \end{cases}$$

und

$$d(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} d_{\max}, & \text{falls } L(\boldsymbol{x}) < k, \\ \omega, & \text{falls } L(\boldsymbol{x}) = k, \\ d_{\min}, & \text{falls } L(\boldsymbol{x}) > k \end{cases}$$

mit $u, k \geq 0$, $\nu \in [0, 1]$, $\omega \in [d_{\min}, d_{\max}]$ und dem Likelihoodquotienten $L(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} \mid \theta_1)/f(\boldsymbol{x} \mid \theta_0)$ sind. Die optimale einseitige Karte unterteilt somit den zulässigen Bereich in zwei Teile, deren zugehörige Intervallabstände die Maximal- beziehungsweise Minimalwerte der für die Intervallabstände zulässigen Werte sind.

Eine weitere wichtige Aussage von Reynolds (1989a) ist die Tatsache, daß unter gewissen, leicht einzuhaltenden Voraussetzungen das Reaktionsverhalten jeder einseitigen FSI-Karte durch Hinzufügen von variablen Stichprobenabständen verbessert werden kann.

Sollen nicht nur Abweichungen vom Sollwert in eine Richtung, sondern in beide Richtungen erfaßt werden, liefert Reynolds (1989b) unter etwas einschränkenderen Voraussetzungen ähnliche Ergebnisse. Auch in diesem Fall erhält man das erstaunliche Ergebnis, daß eine optimale VSI-Karte die Form

$$s(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \notin [u_1, u_2], \\ \nu(y), & \text{falls } y = u_1 \text{ oder } y = u_2, \\ 0, & \text{falls } y \in (u_1, u_2) \end{cases}$$

und

$$d(y) = \begin{cases} d_{\min}, & \text{falls } y \notin [k_1, k_2], \\ \omega(y), & \text{falls } y = k_1 \text{ oder } y = k_2, \\ d_{\max}, & \text{falls } y \in (k_1, k_2) \end{cases}$$

hat, wobei y eine Realisation einer suffizienten Statistik Y von $\boldsymbol{X}$ ist. Auch hier wird der zulässige Bereich in zwei Gebiete unterteilt mit den dazugehörigen Intervallabständen $d_{\min}$ beziehungsweise $d_{\max}$.

Beide optimalen Karten haben also die einfachste mögliche Form einer echten VSI-Karte. Dies ist besonders bemerkenswert, da man eigentlich vermuten würde, daß eine weitere Verfeinerung des zulässigen Bereiches weitere Vorteile bringen sollte. Das ist aber nicht der Fall. Analog zum Satz von Neyman-Pearson in der Testtheorie gilt auch hier, daß die optimale Lösung gleichzeitig auch die einfachste Lösung ist.

Die Ergebnisse in Reynolds (1989a,b) wurden für Shewhart-Karten zur Kontrolle des Mittelwertes hergeleitet. Für andere Karten konnten bisher noch keine Aussagen über optimale Karten bewiesen werden. In verschiedenen Arbeiten wurde jedoch anhand von Simulationen gezeigt, daß ähnliche Ergebnisse auch für die meisten anderen Karten gelten (vergleiche Reynolds et al. (1990), Rendtel (1990) oder Shamma et al. (1991)). Auch bei den anderen Kontrollschemata gilt, daß die Leistungsfähigkeit herkömmlicher FSI-Karten durch Hinzufügen von variablen Stichprobenabständen deutlich verbessert werden kann. So läßt sich im allgemeinen die Anzahl der Stichproben, die benötigt werden, um eine Änderung aufzudecken, um 25% bis 50% verringern, ohne daß dies negative Auswirkungen auf die benötigte Zeit bis zur Entdeckung der Störung hat (siehe Rendtel (1990)).

Alle bisherigen Arbeiten zu VSI-Karten beschäftigen sich ausschließlich mit unabhängigen Daten. Eine Ausnahme stellt Harvey et al. (1995) dar. Sie untersuchen das Verhalten der VSI-Shewhart-Karte, falls die dem Prozeß zugrundeliegenden Daten einem autoregressiven Prozeß der Ordnung eins gehorchen, jedoch irrtümlicherweise als unabhängig vorausgesetzt werden. Die Autoren beschränken sich jedoch auf die Analyse von Simulationen und geben keine analytische Ergebnisse an.

Eine ausführliche analytische Untersuchung von VSI-Karten bei korrelierten Daten gibt es bisher noch nicht. Dies liegt, wie auch Harvey et al. (1995) bemerken hauptsächlich daran, daß sich die mathematische Behandlung von VSI-Karten bei korrelierten Daten extrem schwer gestaltet.

In diesem Kapitel soll das Prinzip der VSI-Karte auf abhängige Datenstrukturen erweitert werden. Soweit möglich werden exakte Aussagen über das Verhalten der durchschnittlichen Lauflänge bewiesen. Ansonsten muß auch hier auf Simulationen zurückgegriffen werden.

3.2 Die VSI-Karte für korrelierte Daten

Den Untersuchungen zugrundegelegt wird ein Prozeß $\{Y_t\}$, für den gilt $E(Y_t) = \mu_0$ und $\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma_0^2$, mit $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_0 \in \mathbb{R}^+$. Der gestörte Prozeß $\{X_t\}$ wird als

$$X_t = Y_t + a\sigma_0 I_{[q,\infty)}(t)$$

mit $q \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ modelliert.

Aus diesem gestörten Prozeß werden nun Stichproben der Größe eins entnommen. Dieser „Stichprobenprozeß“ soll mit $\{Z_t\}$ bezeichnet werden, d.h. Z_i ist die i-te Stichprobe aus dem Prozeß $\{X_t\}$. Die Entscheidung, wann die nächste Stichprobe gezogen werden soll, wird durch die folgende Regel festgelegt. Dabei sollen wie in der Literatur zu diesem Themengebiet üblich (vergleiche Abschnitt 3.1.3) nur zwei verschiedene Stichprobenabstände verwendet werden.

Das Stichprobenintervall vor der i-ten Stichprobe, d.h. die Zeit zwischen der Entnahme der $(i-1)$-ten und der i-ten Stichprobe wird mit $R_i \in \{d_1, d_2\}$ bezeichnet, mit $d_1 \leq d_2$ und $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $R_1 \in \mathbb{N}_0$ und die Wahl von R_i für $i \geq 2$ wird anhand der vorherigen Stichprobe getroffen. Dabei gelte

$$R_i := d_j \quad \Longleftrightarrow \quad Z_{i-1} \in I_j,$$

für $j = 1, 2$, $i \geq 2$,

$$I_2 = [\mu_0 - c_2\sigma_0, \mu_0 + c_2\sigma_0]$$

und

$$I_1 = [\mu_0 - c_1\sigma_0, \mu_0 + c_1\sigma_0] \backslash I_2$$

mit $c_2 < c_1$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$. In Abbildung 3.1 wird diese Intervalleinteilung noch einmal verdeutlicht.

Insgesamt gilt also für die i-te Stichprobe

$$Z_i = X_{\sum\limits_{j=1}^{i} R_j}.$$

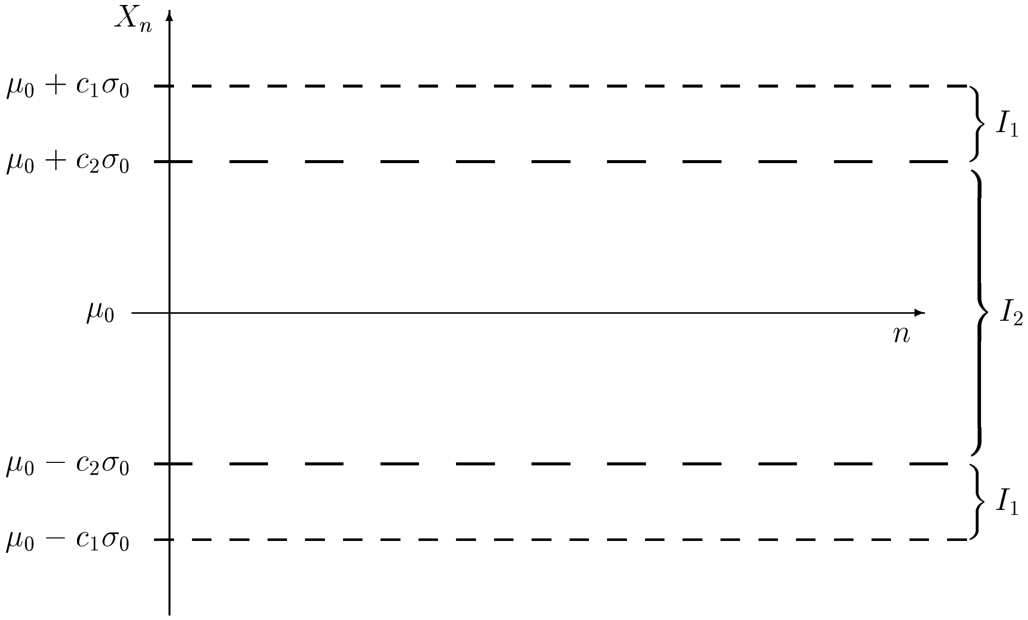

Abbildung 3.1: Intervalleinteilung bei der VSI-Shewhart-Karte

Da der Erwartungswert des gestörten Prozesses kontrolliert werden soll, wird in den Prozeß eingegriffen, falls $X_i \notin I_1 \cup I_2$ ist, d.h. falls $|X_i - \mu_0| > c_1\sigma_0$. Mit der Notation aus Abschnitt 3.1.1 gilt somit

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \notin I_1 \cup I_2, \\ 0, & \text{falls } x \in I_1 \cup I_2 \end{cases}$$

und

$$d(x) = \begin{cases} d_1, & \text{falls } x \in I_1, \\ d_2, & \text{falls } x \in I_2, \\ 0, & \text{falls } x \notin I_1 \cup I_2. \end{cases}$$

Die Stoppzeit

$$N := \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n \notin I_1 \cup I_2\}$$

zählt die Anzahl der Stichproben bis die Kontrollkarte ein Signal zum Eingreifen in den Prozeß gibt. Dementsprechend gibt

$$T := \sum_{j=1}^{N} R_j$$

die Zeit bis zu diesem Signal an. Damit erhält man für die durchschnittliche Anzahl von Stichproben ANSS $= E(N)$ und für die durchschnittliche Laufzeit ATS $= E(T)$.

Um die Abhängigkeit der Gütekriterien von der Größe der Störung a, sowie dem Zeitpunkt q, ab dem die Störung auftritt, zu verdeutlichen, wird, falls notwendig, die Notation ANSS(a, q) beziehungsweise ATS(a, q) verwendet.

Die Berechnung von ANSS und ATS gestaltet sich bei abhängigen Daten deutlich komplizierter als bei unabhängigen Daten. Im Falle unabhängiger Daten kann auf die Waldsche Gleichung zurückgegriffen, mit der die Berechnung von $E(T)$ auf die getrennte Berechnung von $E(N)$ und $E(R_i)$ reduziert werden kann. Bei abhängigen Daten ist dies nicht mehr möglich, so daß versucht werden muß, $E(T)$ auf andere Art zu berechnen.

Der in dieser Arbeit angewandte Weg zur Berechnung von ANSS und ATS besteht darin, den gesamten Ereignisraum in Einzelereignisse zu zerlegen, deren Wahrscheinlichkeiten unter Umständen einfacher berechnet werden können. Bei der Berechnung dieser Einzelwahrscheinlichkeiten stößt man immer wieder auf das Problem, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$X_{i_1} \in I_1,\ \ldots,\ X_{i_\nu} \in I_1,\ X_{i_{\nu+1}} \in I_2,\ \ldots,\ X_{i_n} \in I_2$$

zu berechnen, wobei $(i_1, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ und $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ ist.

Für allgemeine Abhängigkeitsstrukturen des Ausgangsprozesses kann die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses weder angegeben noch berechnet werden. Um verwertbare Ergebnisse zu erhalten, muß man sich daher auf spezielle Abhängigkeitsstrukturen beschränken. Dies soll im folgenden Abschnitt geschehen.

3.3 ANSS und ATS bei austauschbaren, normalverteilten Zufallsvariablen

Zusätzlich zu den in Abschnitt 3.2 geforderten Eigenschaften, soll der betrachtete Prozeß in diesem Abschnitt ein Gaußscher Prozeß sein und $\mathrm{Corr}(Y_s, Y_t) = \rho \in [0, 1)$ für $s \neq t$ erfüllen. Zufallsvariablen, die diesen Anforderungen entsprechen, nennt man auch austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen.

Eine Einführung und Grundlagen über austauschbare Zufallsvariablen findet man unter anderem in TONG (1980, 1990). Hier sollen nur zwei Eigenschaften erwähnt werden, die für die weiteren Berechnungen benötigt werden.

Austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ sind unter anderem dadurch charakterisiert, daß für jede Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ von $(1, \ldots, n)$ die Vektoren $(Y_1, \ldots, Y_n)$ und $(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n})$ identisch $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$-verteilt sind mit $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \ldots, \mu)^{\mathrm{T}}$

und

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho & \cdots & \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere, besonders in diesem Zusammenhang wichtige Eigenschaft ist, daß die Zufallsvektoren $(Y_1, \ldots, Y_n)$ und $(\sigma(\sqrt{1-\rho}\,W_1 + \sqrt{\rho}\,W_0) + \mu, \ldots, \sigma(\sqrt{1-\rho}\,W_n + \sqrt{\rho}\,W_0) + \mu)$ identisch verteilt sind, wobei $W_0, W_1, \ldots, W_n$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind.

Nach dieser kurzen Einführung kann nun das Hauptergebnis dieses Abschnitts formuliert werden. Der folgende Satz liefert Formeln zur Berechnung von $\mathrm{ANSS}(a,q)$ und $\mathrm{ATS}(a,q)$ einer zweiseitigen VSI-Shewhart-Karte sowohl im ungestörten Zustand, d.h. für $a = 0$, als auch für eine Störung ab $q = 1$.

Satz 3.1: *Sind $\{Y_t\}$ für $t \geq 1$ austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen mit $E(Y_t) = \mu$, $\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma_0^2$ und $\mathrm{Corr}(Y_s, Y_t) = \rho$ für $s \neq t$, dann gilt für die in Abschnitt 3.2 definierte VSI-Shewhart-Karte, daß*

$$\mathrm{ATS}(a,1) = R_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d_1\left(p_a(c_1,w) - p_a(c_2,w)\right) + d_2 p_a(c_2,w)}{1 - p_a(c_1,w)}\, d\Phi(w)$$

mit

$$p_a(c,w) = \Phi\left(\frac{c - a - \sqrt{\rho}\,w}{\sqrt{1-\rho}}\right) - \Phi\left(\frac{-c - a - \sqrt{\rho}\,w}{\sqrt{1-\rho}}\right).$$

Die durchschnittliche Anzahl von Stichproben ergibt sich zu

$$\mathrm{ANSS}(a,1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - p_a(c_1,w)}\, d\Phi(w).$$

Beweis: Für die durchschnittliche Laufzeit gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ATS} &= E\left(\sum_{i=1}^{N} R_i\right) \\ &= R_1 + E\left(\sum_{i=2}^{\infty} R_i \cdot I_{\{2,\ldots,N\}}(i)\right) \\ &= R_1 + \sum_{i=2}^{\infty} E\left(R_i \cdot I_{\{2,\ldots,N\}}(i)\right). \end{aligned}$$

Es gilt nun, daß

$$R_i \cdot I_{\{2,\dots,N\}}(i) = \begin{cases} d_1, & \text{falls } Z_{i-1} \in I_1 \text{ und } N \geq i, \\ d_2, & \text{falls } Z_{i-1} \in I_2 \text{ und } N \geq i, \\ 0, & \text{falls } N < i. \end{cases}$$

Da $N \geq i$ äquivalent zu $Z_1, \dots, Z_{i-1} \in I_1 \cup I_2$ ist, gilt

$$R_i \cdot I_{\{2,\dots,N\}}(i) = \begin{cases} d_1, & \text{falls } Z_1, \dots, Z_{i-2} \in I_1 \cup I_2,\ Z_{i-1} \in I_1, \\ d_2, & \text{falls } Z_1, \dots, Z_{i-2} \in I_1 \cup I_2,\ Z_{i-1} \in I_2, \\ 0, & \text{falls } N < i. \end{cases}$$

Zunächst soll die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $Z_1, \dots, Z_{i-2} \in I_1 \cup I_2,\ Z_{i-1} \in I_2$ berechnet werden.

Von den $i-1$ Stichproben $Z_1, \dots, Z_{i-1}$ liegt eine bestimmte Anzahl im Intervall I_1, der Rest in I_2. Dabei bezeichne ν die Anzahl der in I_1 liegenden Stichproben mit den dazugehörigen Indizes $j_1 < \cdots < j_\nu$. Dementsprechend liegen $i-1-\nu$ Stichproben im Intervall I_2 mit den dazugehörigen Indizes $j_{\nu+1} < \cdots < j_{i-1}$. Insbesondere gilt also, daß $j_{i-1} = i-1$ ist.

Durch Abzählen erhält man

$$\sum_{k=1}^{j_m} R_k = \begin{cases} R_1 + (m-1)d_1 + (j_m - m)d_2, & \text{für } 1 \leq m \leq \nu, \\ R_1 + (m-\nu-1)d_2 + (j_m - m + \nu)d_1, & \text{für } \nu < m \leq i-1. \end{cases}$$

Damit ist $\sum\limits_{k=1}^{j_m} R_k$ deterministisch gegeben und somit sind mit den $\{X_i\}$ auch die $X_{\sum_{k=1}^{j_m} R_k}$ für $m = 1, \dots, i-1$ austauschbar. Infolgedessen gilt mit $W_0, \dots, W_{i-1}$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen, daß

$$\begin{aligned} &P(Z_1, \dots, Z_{i-2} \in I_1 \cup I_2,\ Z_{i-1} \in I_2) = \\ &\quad = P\Bigg(\left|\Big(X_{\sum_{k=1}^{j_m} R_k} - \mu_0\Big)/\sigma_0\right| \leq c_1 \quad m = 1, \dots, i-2,\ \wedge \\ &\qquad\qquad \left|\Big(X_{\sum_{k=1}^{i-1} R_k} - \mu_0\Big)/\sigma_0\right| \leq c_2\Bigg) \\ &\quad = P\Big(|\sqrt{\rho}\, W_0 + \sqrt{1-\rho}\, W_m + a| \leq c_1 \quad m = 1, \dots, i-2,\ \wedge \\ &\qquad\qquad |\sqrt{\rho}\, W_0 + \sqrt{1-\rho}\, W_{i-1} + a| \leq c_2\Big) \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty} P\Big(|\sqrt{\rho}\, w + \sqrt{1-\rho}\, W_m| \leq c_1 \quad m = 1, \dots, i-2,\ \wedge \\ &\qquad\qquad |\sqrt{\rho}\, w + \sqrt{1-\rho}\, W_{i-1}| \leq c_2\Big)\, d\Phi(w) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{-c_1 - a - \sqrt{\rho}\,w}{\sqrt{1-\rho}} \le W_m \le \frac{c_1 - a - \sqrt{\rho}\,w}{\sqrt{1-\rho}} \quad m = 1, \ldots, i-2\right.\\
&\qquad\qquad \left.\wedge\ \frac{-c_2 - a - \sqrt{\rho}\,w}{\sqrt{1-\rho}} \le W_{i-1} \le \frac{c_2 - a - \sqrt{\rho}\,w}{\sqrt{1-\rho}}\right)\, d\Phi(w)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_a^{i-2}(c_1, w)\, p_a(c_2, w)\, d\Phi(w).
\end{aligned}
$$

Analog erhält man, daß

$$
\begin{aligned}
&P(Z_1, \ldots, Z_{i-2} \in I_1 \cup I_2,\ Z_{i-1} \in I_1) =\\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} p_a^{i-2}(c_1, w)\, \big(p_a(c_1, w) - p_a(c_2, w)\big)\, d\Phi(w).
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich damit für die durchschnittliche Laufzeit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ATS} &= R_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(d_1\, p_a^{i-2}(c_1, w)\, (p_a(c_1, w) - p_a(c_2, w))\\
&\qquad + d_2\, p_a^{i-2}(c_1, w)\, p_a(c_2, w)\Big)\, d\Phi(w)\\
&= R_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_1(p_a(c_1, w) - p_a(c_2, w)) + d_2 p_a(c_2, w)}{1 - p_a(c_1, w)}\, d\Phi(w).
\end{aligned}
$$

Die durchschnittliche Anzahl von Stichproben erhält man in diesem speziellen Fall indem man $R_1 = d_1 = d_2 = 1$ setzt, also

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ANSS} &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_a(c_1, w)}{1 - p_a(c_1, w)}\, d\Phi(w)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{p_a(c_1, w)}{1 - p_a(c_1, w)}\right) d\Phi(w)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - p_a(c_1, w)}\, d\Phi(w).
\end{aligned}
$$

□

3.4 Vergleichsstudie bei austauschbaren, normalverteilten Zufallsvariablen

3.4.1 Vergleich zwischen VSI- und FSI-Karten

Anhand der Ergebnisse im vorigen Abschnitt ist man nun in der Lage, einen exakten Vergleich zwischen der herkömmlichen FSI-Karte und der VSI-Karte durchzuführen.

Im folgenden soll jedoch nicht die herkömmliche FSI-Karte betrachtet werden, sondern eine modifizierte Form. Zum einen soll die Eingriffsgrenze so gewählt werden, daß die zugrundegelegte Korrelation der Daten berücksichtigt wird. Die größte Änderung besteht jedoch in einer anderen Wahl des ersten Stichprobenzeitpunktes. Normalerweise zieht man bei der herkömmlichen FSI-Karte alle d Zeiteinheiten eine Stichprobe. Um nun aber die ARL der FSI-Karte und die ATS der VSI-Karte miteinander vergleichen zu können, betrachtet man $d \cdot \text{ARL}$. Da man bei der VSI-Karte die erste Stichprobe zum Zeitpunkt R_1 entnimmt, während bei der FSI-Karte die erste Stichprobe zur Zeit d entnommen wird, kann die durchschnittliche Laufzeit der FSI-Karte nie unter d und bei der VSI-Karte nie unter R_1 fallen. Im allgemeinen ist $R_1 < d$, wodurch die FSI-Karte einen Nachteil im Vergleich zur VSI-Karte hat. Um diese Benachteiligung aufzuheben, soll für die Stichprobenzeitpunkte der FSI-Karte eine Änderung vorgenommen werden. Die erste Stichprobe wird zum Zeitpunkt R_1 entnommen, alle folgenden dann wie gewohnt im Abstand von d Zeiteinheiten, d.h. die i-te Stichprobe wird zur Zeit $R_1 + id$ entnommen. Dadurch wird sichergestellt, daß beide Karten sinnvoll miteinander verglichen werden können.

Abweichend von den üblichen Bezeichnungen bei FSI-Karten, soll im folgenden die durchschnittliche Lauflänge ARL nicht die Anzahl der Stichproben bis zum Eingriff, sondern die tatsächlich vergangene Zeit angeben. ARL und ATS bezeichnen damit dasselbe Gütekriterium. Man kann daher die durchschnittliche Lauflänge der FSI-Karte ausrechnen, indem man in Satz 3.1 $d_1 = d_2 = d$ wählt.

Um beide Karten miteinander zu vergleichen, muß eine Vielzahl von Parametern festgelegt werden. Für die Wahl der Stichprobenabstände wird im weiteren, wie in der Literatur zu VSI-Karten üblich, folgende Wahl getroffen: Der Stichprobenabstand d der FSI-Karte soll dem Mittelwert zwischen den beiden Stichprobenabständen d_1 und d_2 der VSI-Karte entsprechen. Für den Zeitpunkt R_1 der ersten Stichprobenentnahme wird d_1 gewählt. Außerdem sei $d_1 = 1$.

Bei der Wahl der Eingriffsgrenzen c, c_1 und c_2 hat man eine gewisse Freiheit. Fordert man nur, daß im Zustand unter Kontrolle ARL = ATS ist, so gibt es im allgemeinen beliebig viele Paare (c_1, c_2), die dies für gegebenes c erfüllen. Stellt man jedoch noch weitere Anforderungen, wie zum Beispiel die Einhaltung einer oberen Grenze für die Anzahl der Stichproben ANSS im Zustand unter Kontrolle, oder die Minimierung der Laufzeit ATS bei einem gegebenen Zustand außer Kontrolle, so reduziert sich die

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	500.000	500.000	100.800
0.25	395.432	403.223	81.445
0.50	229.330	247.664	50.333
0.75	120.237	142.338	29.268
1.00	62.266	83.125	17.425
1.25	32.780	50.314	10.863
1.50	17.789	31.610	7.122
1.75	10.075	20.549	4.910
2.00	6.037	13.766	3.553
2.25	3.877	9.469	2.694
2.50	2.690	6.668	2.134
2.75	2.018	4.802	1.760
3.00	1.625	3.538	1.508

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	500.000	500.000	100.800
0.25	466.267	468.384	94.477
0.50	378.820	386.054	78.011
0.75	269.695	282.287	57.257
1.00	170.006	185.835	37.967
1.25	96.427	112.614	23.323
1.50	50.377	64.702	13.740
1.75	25.036	36.468	8.094
2.00	12.345	20.819	4.964
2.25	6.351	12.314	3.263
2.50	3.584	7.627	2.325
2.75	2.296	4.960	1.792
3.00	1.677	3.389	1.478

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	500.000	500.000	100.800
0.25	478.014	478.897	96.579
0.50	417.765	420.927	84.985
0.75	333.962	339.880	68.776
1.00	244.455	252.602	51.320
1.25	164.133	173.332	35.466
1.50	101.368	110.329	22.866
1.75	57.855	65.608	13.922
2.00	30.768	36.844	8.169
2.25	15.485	19.863	4.773
2.50	7.602	10.537	2.907
2.75	3.849	5.700	1.940
3.00	2.182	3.288	1.458

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	500.000	500.000	100.800
0.25	483.390	483.564	97.513
0.50	436.806	437.438	88.288
0.75	368.951	370.164	74.833
1.00	291.336	293.062	59.412
1.25	215.112	217.138	44.228
1.50	148.580	150.637	30.927
1.75	96.079	97.934	20.387
2.00	58.260	59.767	12.753
2.25	33.237	34.352	7.670
2.50	17.969	18.726	4.545
2.75	9.353	9.825	2.765
3.00	4.845	5.119	1.824

Tabelle 3.1: Vergleich VSI- – FSI-Karte (austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen): $\text{ATS}_0 = 500$, $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d = 5$, $\rho = 0.0$, 0.3, 0.6 und 0.9 (von links oben nach rechts unten)

Wahl möglicher Werte für c_1 und c_2 auf ein Paar. Hier soll im folgenden eine weitere Anforderung an die VSI-Karte gestellt werden, welche die Wahl von c_1 und c_2 eindeutig macht. Anlehnend an die Praxis soll $c_1 = c$ gewählt werden, d.h. der insgesamt zulässige Bereich ist bei beiden Karten identisch. Dies entspricht der praxisnahen Aufgabe, eine bereits eingesetzte FSI-Karte mit möglichst wenig Aufwand in eine VSI-Karte umzuwandeln. Wenn die äußerste Kontrollgrenze beibehalten wird, müssen Meßinstrumente nicht für zwei, sondern nur für einen neuen Kontrollwert eingestellt

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	1500.000	1500.000	500.667
0.25	1102.656	1121.938	374.646
0.50	563.657	603.450	201.817
0.75	265.055	307.692	103.231
1.00	125.587	161.915	54.638
1.25	61.464	89.338	30.446
1.50	31.456	51.716	17.905
1.75	17.019	31.325	11.108
2.00	9.831	19.784	7.261
2.25	6.105	12.979	4.993
2.50	4.082	8.815	3.605
2.75	2.930	6.181	2.727
3.00	2.241	4.467	2.156

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	1500.000	1500.000	500.667
0.25	1391.834	1395.974	465.991
0.50	1113.756	1127.678	376.559
0.75	772.581	796.187	266.062
1.00	468.976	497.585	166.528
1.25	252.902	280.825	94.275
1.50	123.931	147.322	49.774
1.75	57.014	74.581	25.527
2.00	25.735	37.973	13.324
2.25	12.028	20.150	7.383
2.50	6.144	11.383	4.461
2.75	3.562	6.888	2.963
3.00	2.363	4.456	2.152

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	1500.000	1500.000	500.667
0.25	1432.186	1433.711	478.570
0.50	1246.762	1252.186	418.062
0.75	989.985	1000.030	334.010
1.00	717.581	731.205	244.402
1.25	475.386	490.476	164.159
1.50	288.398	302.751	101.584
1.75	160.708	172.783	58.261
2.00	82.684	91.850	31.283
2.25	39.647	46.026	16.009
2.50	18.044	22.171	8.057
2.75	8.088	10.602	4.201
3.00	3.828	5.285	2.428

a	ATS	ARL	ANSS
0.00	1500.000	1500.000	500.667
0.25	1449.871	1450.139	484.046
0.50	1309.323	1310.298	437.433
0.75	1104.728	1106.595	369.532
1.00	870.919	873.567	291.856
1.25	641.585	644.680	215.560
1.50	441.728	444.855	148.952
1.75	284.321	287.123	96.374
2.00	171.188	173.448	58.483
2.25	96.532	98.191	33.397
2.50	51.116	52.231	18.077
2.75	25.573	26.264	9.421
3.00	12.263	12.659	4.886

Tabelle 3.2: Vergleich VSI- – FSI-Karte (austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen): $\text{ATS}_0 = 1500$, $d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d = 3$, $\rho = 0.0$, 0.3, 0.6 und 0.9 (von links oben nach rechts unten)

werden. Die Einstellung der Meßinstrumente für die äußere Grenze kann beibehalten werden.

In den Tabellen 3.1 und 3.2 wird das Verhalten der beiden Karten für verschiedene Parameterkombinationen miteinander verglichen. Zusätzlich zu ATS und ARL ist auch die durchschnittliche Anzahl von Stichproben ANSS aufgetragen, die aufgrund der speziellen Abhängigkeitsstruktur der Daten bei beiden Karten identisch ist.

Man erkennt, daß sich durch die Einführung von variablen Stichprobenabständen das

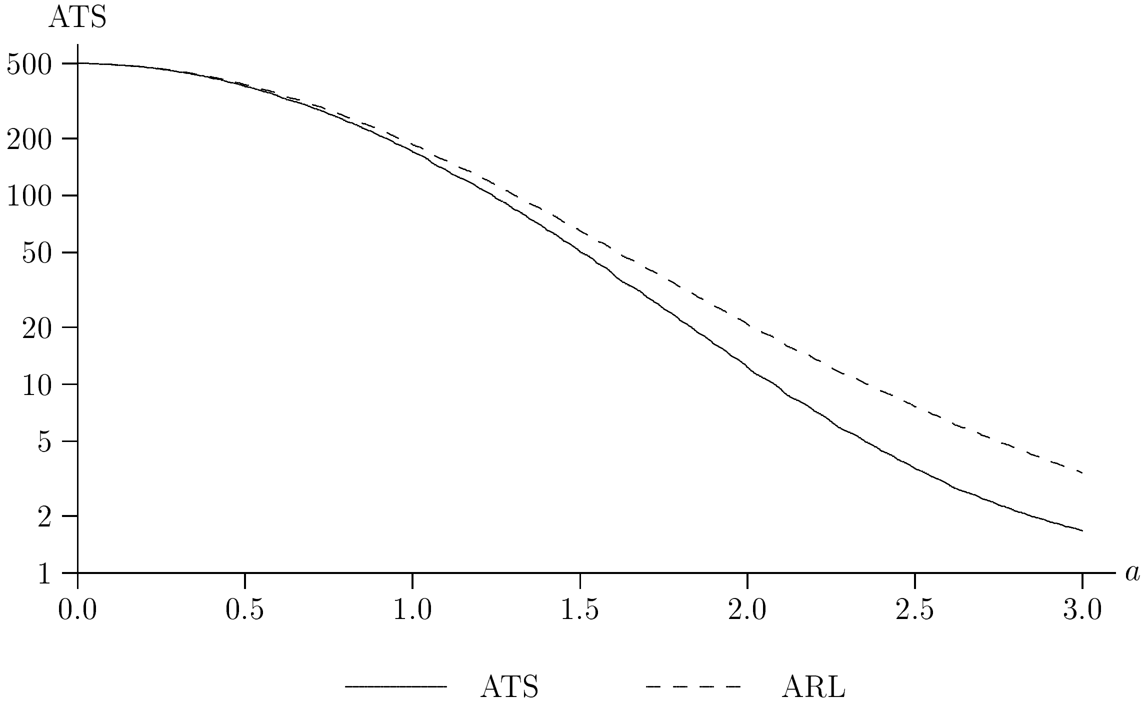

Abbildung 3.2: Vergleich VSI- – FSI-Karte (austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen): $\mathrm{ATS}_0 = 500$, $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d = 5$, $\rho = 0.3$

Verhalten der Karte in allen Zuständen außer Kontrolle verbessert. Je nach Situation liegt die Laufzeit der VSI-Karte bei Werten zwischen 98% und 45% der entsprechenden Lauflänge der FSI-Karte. Bei zunehmend größer werdender Störung nimmt der relative Vorsprung der VSI-Karte weiter zu. Am größten ist die Wirkung der variablen Stichprobenabstände bei unabhängigen Daten. Mit wachsendem ρ nimmt die Wirkung dann jedoch kontinuierlich ab. Da, wie bereits erwähnt, die Anzahl der Stichproben bei beiden Karten identisch ist, spricht dieses Ergebnis klar dafür, die VSI-Shewhart-Karte zu verwenden.

Zusätzlich sind in Abbildung 3.2 die Graphen von ATS und ARL in Abhängigkeit von ρ zu sehen. Durch die logarithmische Unterteilung der y-Achse werden die absoluten Unterschiede zwischen beiden Werten bei kleinen Störungen a nicht so deutlich. Diese Art der Darstellung vermittelt daher eher die relativen Vorteile der VSI-Karte gegenüber der FSI-Karte.

Zur Vervollständigung sind in Tabelle 3.3 die Eingriffsgrenzen der VSI-Shewhart-Karte für eine große Anzahl von Prozeßparametern tabelliert. Dabei wurde wieder nach dem obigen Schema vorgegangen, d.h. die äußere Eingriffsgrenze c_1 wurde so gewählt, daß sie der Eingriffsgrenze c der FSI-Karte mit $d = (d_1 + d_2)/2$ entspricht. Daran anschließend wurde c_2 aus der Bedingung $\mathrm{ATS}_0 = \mathrm{ARL}_0$ berechnet. R_1 wurde, wie allgemein üblich, als 1 gewählt.

ρ \ ATS	$100 \cdot d$	$200 \cdot d$	$300 \cdot d$	$400 \cdot d$	$500 \cdot d$	$750 \cdot d$	$1000 \cdot d$
0.0	2.578 0.667	2.808 0.671	2.936 0.672	3.024 0.673	3.091 0.673	3.209 0.673	3.291 0.674
0.1	2.531 0.654	2.753 0.657	2.876 0.658	2.960 0.658	3.024 0.658	3.138 0.658	3.216 0.658
0.2	2.442 0.631	2.651 0.632	2.767 0.632	2.847 0.632	2.907 0.632	3.014 0.631	3.088 0.631
0.3	2.330 0.600	2.525 0.600	2.632 0.599	2.706 0.599	2.763 0.598	2.862 0.597	2.931 0.597
0.4	2.197 0.563	2.376 0.562	2.475 0.561	2.543 0.560	2.595 0.559	2.686 0.558	2.749 0.557
0.5	2.042 0.520	2.204 0.518	2.294 0.517	2.355 0.516	2.402 0.515	2.485 0.513	2.542 0.512
0.6	1.861 0.470	2.005 0.467	2.084 0.466	2.139 0.464	2.180 0.463	2.253 0.462	2.304 0.460
0.7	1.647 0.411	1.769 0.408	1.837 0.406	1.884 0.404	1.919 0.403	1.982 0.402	2.025 0.400
0.8	1.380 0.338	1.478 0.334	1.533 0.333	1.570 0.331	1.599 0.330	1.649 0.329	1.684 0.328
0.9	1.015 0.239	1.082 0.237	1.119 0.235	1.145 0.234	1.165 0.234	1.199 0.233	1.223 0.232

Tabelle 3.3: Eingriffsgrenzen der VSI-Shewhart-Karte bei austauschbaren, normalverteilten Zufallsvariablen (oben c_1, unten c_2)

Bei der Berechnung der Eingriffsgrenzen zeigte sich ein interessantes Ergebnis. Solange $d = (d_1 + d_2)/2$ gewählt wird, sind die Eingriffsgrenzen unabhängig von der speziellen Wahl von d_1 und d_2. Allein der Quotient ATS_0/d ist für die Eingriffsgrenzen relevant. Aus diesem Grund werden die Eingriffsgrenzen in Tabelle 3.3 auch nur in Abhängigkeit von ρ und $d \cdot A$ tabelliert, wobei man durch eine Variation von A die durchschnittliche Laufzeit im Zustand unter Kontrolle direkt regulieren kann.

Betrachtet man die Eingriffsgrenzen näher, so fällt auf, daß das Verhältnis von c_2 zu c_1 in Abhängigkeit von ρ fast konstant ist. So schwankt der Quotient bei $\mathrm{ATS}_0 = 100 \cdot d$ zwischen 25.8% und 23.5%, für $\mathrm{ATS}_0 = 1000 \cdot d$ liegt die Schwankungsbreite zwischen 20.4% und 18.9%.

Für die praktische Anwendung haben diese Ergebnisse wichtige Auswirkungen. Man ist dadurch in der Lage, eine bereits eingesetzte FSI-Karte mit Stichprobenabstand d ohne aufwendige Berechnungen in eine VSI-Karte umzuwandeln, die, wie aus den Tabellen 3.1 und 3.2 hervorgeht, ohne zusätzliche Stichprobenentnahmen ein besseres Leistungsverhalten zeigt. Als äußere Eingriffsgrenze c_1 wählt man dazu die bisherige Eingriffsgrenze der FSI-Karte. Die Grenze c_2 kann man, ohne große Fehler zu machen, unabhängig von ρ als eine von ATS_0 abhängige Konstante wählen und für d_1 sowie d_2 sind alle Werte mit $d = (d_1 + d_2)/2$ zulässig.

3.4.2 Vergleich optimierter VSI-Shewhart-Karten

Dadurch, daß bei der VSI-Karte bisher die äußerste Eingriffsgrenze entsprechend der Eingriffsgrenze der FSI-Karte gewählt wurde, wird in den meisten Fällen nicht die volle Leistungsfähigkeit von VSI-Karten ausgeschöpft. Wie groß eventuelle Leistungsverluste durch diese Wahl der Eingriffsgrenzen sind, soll im weiteren kurz untersucht werden. Dazu werden vier verschiedene Kontrollschemata betrachtet. Zum einen die herkömmliche FSI-Karte und die darauf basierende VSI-Karte, und zum anderen zwei VSI-Karten, die für bestimmte Situationen optimiert wurden.

Bei allen Kontrollschemata wurden die Eingriffsgrenzen so gewählt, daß die durchschnittliche Laufzeit im Zustand unter Kontrolle gleich 500 ist. Für die VSI-Karten wurden die variablen Stichprobenabstände $d_1 = 1$ und $d_2 = 9$ beziehungsweise bei der FSI-Karte $d = 5$ gewählt. Der Korrelationsfaktor ρ war in allen Fällen 0.3. Damit erhält man für die Eingriffsgrenzen der FSI-Karte (vergleiche Tabelle 3.3) $c = 2.330$ und für die normale VSI-Karte $c_1 = 2.330$ und $c_2 = 0.600$.

Für die erste der optimierten VSI-Karten wurden die Eingriffsgrenzen so gewählt, daß die Zeit bis zum Erkennen einer Störung von $a = 2.0$ minimiert wird. Dies führt zu den Grenzen $c_1 = 2.483$ und $c_2 = 0.271$. Im weiteren Verlauf soll diese Karte mit $\mathrm{VSI}_1^{\mathrm{opt}}$ bezeichnet werden.

Bei dem zweiten optimierten Kontrollschema wurde die Anzahl der Stichproben im Zustand unter Kontrolle optimiert. Eine Minimierung der ANSS_0 macht keinen Sinn, da dies dazu führen würde, daß $c_1 = c_2$ wird, d.h. es wird immer nur der größte Stichprobenabstand verwendet. Die VSI-Karte wird dadurch zu einer FSI-Karte mit $d = d_2$. Aus diesem Grund wurden die Eingriffsgrenzen so berechnet, daß ANSS_0 einen festen, vorgegebenen Wert annimmt, in diesem Fall 75% der Stichprobenanzahl der FSI-Karte. Damit ergibt sich $c_1 = 2.245$ und $c_2 = 0.939$. Als Bezeichnung für diese Karte soll im weiteren $\mathrm{VSI}_2^{\mathrm{opt}}$ verwendet werden.

In Tabelle 3.4 sind durchschnittliche Laufzeit und Stichprobenanzahl dieser Kontrolldesigns tabelliert. Man erkennt, daß alle drei VSI-Karten ein besseres Verhalten in Bezug auf die durchschnittliche Lauflänge haben als die FSI-Karte. Die $\mathrm{VSI}_1^{\mathrm{opt}}$-Karte, bei der die ATS speziell für $a = 2.0$ minimiert wurde, hat zwar in der durchschnittlichen Laufzeit geringe Vorteile gegenüber der normalen VSI-Karte, dafür ist jedoch die Anzahl der nötigen Stichproben im Schnitt um 70% höher als bei der normalen VSI- oder FSI-Karte.

Bei der zweiten optimierten VSI-Karte $\mathrm{VSI}_2^{\mathrm{opt}}$ erkennt man, daß sie geringe Nachteile im Laufzeitverhalten gegenüber der normalen VSI-Karte hat. Sie ist jedoch noch immer deutlich besser, als die entsprechende FSI-Karte. Aufgrund der Optimierung der Stichprobenanzahl im Zustand unter Kontrolle, benötigt diese Karte jedoch bei fast allen Prozeßzuständen nur 75% bis 80% der Stichproben der normalen VSI-Karte.

Insgesamt sieht man, daß das einfache, auf der FSI-Karte basierende VSI-Kontrolldesign bereits ein sehr gutes Verhalten in der durchschnittlichen Laufzeit zeigt. Selbst

	ATS				ANSS			
a	FSI	VSI	$\mathrm{VSI}_1^{\mathrm{opt}}$	$\mathrm{VSI}_2^{\mathrm{opt}}$	FSI	VSI	$\mathrm{VSI}_1^{\mathrm{opt}}$	$\mathrm{VSI}_2^{\mathrm{opt}}$
0.00	500.000	500.000	500.000	500.000	100.800	100.800	172.195	75.600
0.25	468.384	466.267	465.461	467.189	94.477	94.477	160.965	70.971
0.50	386.054	378.820	376.208	381.877	78.011	78.011	131.828	58.890
0.75	282.287	269.695	265.546	274.752	57.257	57.257	95.374	43.597
1.00	185.835	170.006	165.446	175.913	37.967	37.967	61.882	29.285
1.25	112.614	96.427	92.551	101.904	23.323	23.323	36.872	18.316
1.50	64.702	50.377	47.692	54.654	13.740	13.740	20.863	11.046
1.75	36.468	25.036	23.484	27.960	8.094	8.094	11.691	6.694
2.00	20.819	12.345	11.600	14.144	4.964	4.964	6.776	4.236
2.25	12.314	6.351	6.075	7.366	3.263	3.263	4.202	2.874
2.50	7.627	3.584	3.536	4.115	2.325	2.325	2.835	2.108
2.75	4.960	2.296	2.338	2.553	1.792	1.792	2.082	1.666
3.00	3.389	1.677	1.741	1.791	1.478	1.478	1.650	1.402

Tabelle 3.4: Vergleich verschiedener VSI-Karten (austauschbare, normalverteilte Zufallsvariablen): $\mathrm{ATS}_0 = 500$, $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d = 5$, $\rho = 0.3$

durch eine zusätzliche Optimierung der ATS werden nur geringfügige Verbesserungen in der Reaktionszeit erwirkt, die jedoch durch einschneidende Verschlechterungen in der durchschnittlichen Anzahl von Stichproben deutlich aufgewogen werden. Allein eine Optimierung der ANSS bringt weitere Vorteile im gesamten Leistungsverhalten der VSI-Karte.

3.5 Vergleichsstudie bei autoregressiven Prozessen

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der VSI-Shewhart-Karte bei autoregressiven Prozessen der Ordnung eins näher untersucht werden, d.h. für den Fall, daß der ungestörte Prozeß durch

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

gegeben ist, mit ε_t, $t \in \mathbb{N}$, unabhängige, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Leider ist es in diesem Fall nicht möglich, die Kennzahlen der Kontrollkarte numerisch zu berechnen, so daß alle Vergleiche anhand von Simulationen durchgeführt werden müssen. Aus diesem Grund soll auch nur kurz auf diesen Fall eingegangen werden.

Alle folgenden Beispiele gelten für den Fall $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d = 5$, $R_1 = 1$ und $\mathrm{ATS}_0 = 500$. Analog zum Abschnitt 3.4.1 wird bei der VSI-Karte die äußere Eingriffsgrenze c_1 gleich der Eingriffsgrenze c der FSI-Karte gewählt. Da sich die auf diese Art ermittelten Eingriffsgrenzen bei positiven und dem entsprechenden nega-

$\lvert\alpha\rvert$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
c_1	2.578	2.592	2.631	2.704	2.814	2.978	3.225	3.610	4.273	5.768
c_2	0.667	0.690	0.754	0.846	1.029	1.297	1.656	2.157	2.925	4.445

Tabelle 3.5: Eingriffsgrenzen der VSI-Karte bei AR(1)-Prozessen: $\text{ATS}_0 = 500$, $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d = 5$

tiven α nur geringfügig unterscheiden, kann man davon ausgehen, daß diese Unterschiede auf die Simulationen zurückzuführen sind und die Eingriffsgrenzen eigentlich übereinstimmen. Aus diesem Grund sind in Tabelle 3.5 die Eingriffsgrenzen für $|\alpha|$ tabelliert.

Im Gegensatz zum Fall bei austauschbaren, normalverteilten Zufallsvariablen (vergleiche Tabelle 3.3), hängen die Werte der Eingriffsgrenzen von jedem der Parameter d_1, d_2, d, R_1 und α ab. Deshalb werden die Eingriffsgrenzen nur für die hier benötigten Parameterkombinationen angegeben. Die Eingriffsgrenzen für jede mögliche Parameterkombination zu tabellieren, erscheint besonders unter Berücksichtung des hohen Zeitaufwands zur Bestimmung über Simulationen nicht sinnvoll.

In den Tabellen 3.6 und 3.7 ist das Verhalten der durchschnittlichen Laufzeit und der durchschnittlichen Anzahl von Stichproben der VSI-Karte im Vergleich zur FSI-Karte für verschiedene α tabelliert. Da im Unterschied zu austauschbaren, normalverteilten Zufallsvariablen die durchschnittliche Stichprobenanzahl von VSI- und FSI-Karte nicht übereinstimmt, muß diese noch zusätzlich für die FSI-Karte tabelliert werden. Diese Werte stehen in den Tabellen in den mit „Stpr" überschriebenen Spalten.

Wie man in Tabelle 3.6 erkennt, verhält sich die VSI-Karte für positive α durchweg besser, als die FSI-Karte. Sowohl ATS, als auch ANSS liegen teilweise deutlich unter den entsprechenden Werten der FSI-Karte. Im Gegensatz zu austauschbaren, normalverteilten Zufallsvariablen (vergleiche Tabellen 3.1 und 3.2) nehmen die Vorteile mit größerem α weiter zu. Erst für sehr große α nähern sich beide Karten wieder an, bis sie bei $\alpha = 0.9$ fast identische durchschnittliche Laufzeiten haben. Die Anzahl der Stichproben liegt bei der VSI-Karte jedoch immer unter dem entsprechenden Wert der FSI-Karte und fällt mit wachsendem α kontinuierlich ab, bis sie für $\alpha = 0.9$ ihr Minimum bei ungefähr 60% des Wertes der FSI-Karte erreicht. Insgesamt gesehen, hat die VSI-Karte für positives α ein deutlich besseres Leistungsverhalten als die FSI-Karte.

Für negative α erhält man für die durchschnittliche Laufzeit ein anderes Bild, wie Tabelle 3.7 verdeutlicht. Anfangs hat die FSI-Karte nur geringe Vorteile, die jedoch für betragsmäßig größer werdendes α weiter zunehmen. Insbesondere für kleine bis mittlere Störungen von $a = 0.5$ bis 2.0 hat die FSI-Karte für betragsmäßig großes α deutliche Vorteile im Verhalten der durchschnittlichen Laufzeit. Bei der durchschnittlichen Anzahl von Stichproben hingegen zeigen beide Karten ein fast identisches Verhalten zum Fall $\alpha \geq 0$. Die VSI-Karte benötigt durchweg weniger Stichproben als die FSI-Karte. Dieses Verhalten nimmt mit betragsmäßig wachsendem α weiter zu, bis

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	503.978	500.748	95.242	100.950
0.25	394.492	405.441	76.257	81.888
0.50	226.064	253.309	46.716	51.462
0.75	120.229	147.414	27.595	30.283
1.00	64.408	86.628	16.956	18.126
1.25	35.458	52.786	10.957	11.357
1.50	20.104	33.345	7.407	7.469
1.75	11.980	21.786	5.295	5.157
2.00	7.363	14.622	3.895	3.724
2.25	4.777	10.123	2.987	2.825
2.50	3.268	7.138	2.367	2.228
2.75	2.388	5.158	1.936	1.832
3.00	1.851	3.809	1.634	1.562

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	499.811	501.355	82.118	101.071
0.25	401.972	418.148	67.470	84.430
0.50	244.068	271.816	43.572	55.163
0.75	137.865	163.745	27.064	33.549
1.00	78.738	99.576	17.463	20.715
1.25	46.041	61.784	11.768	13.157
1.50	28.173	39.863	8.383	8.773
1.75	17.693	26.492	6.163	6.098
2.00	11.405	18.057	4.683	4.411
2.25	7.542	12.530	3.636	3.306
2.50	5.168	9.013	2.901	2.603
2.75	3.649	6.513	2.366	2.103
3.00	2.679	4.826	1.969	1.765

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	498.305	501.150	69.151	101.030
0.25	425.837	437.106	59.918	88.221
0.50	290.994	309.783	42.612	62.757
0.75	183.467	201.412	28.644	41.082
1.00	115.430	130.075	19.601	26.815
1.25	73.811	85.236	13.845	17.847
1.50	48.425	57.369	10.162	12.274
1.75	32.792	39.317	7.756	8.663
2.00	22.416	27.510	6.014	6.302
2.25	15.794	19.725	4.826	4.745
2.50	11.241	14.407	3.919	3.681
2.75	8.141	10.691	3.239	2.938
3.00	5.963	8.008	2.716	2.402

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	499.338	498.618	59.593	100.524
0.25	480.809	479.278	57.478	96.656
0.50	437.549	438.040	52.563	88.408
0.75	378.574	378.626	45.856	76.525
1.00	315.708	316.006	38.704	64.001
1.25	258.382	259.614	32.160	52.723
1.50	210.425	212.409	26.672	43.282
1.75	171.130	172.913	22.175	35.383
2.00	138.998	140.517	18.458	28.903
2.25	113.643	115.151	15.526	23.830
2.50	93.296	94.586	13.153	19.717
2.75	76.775	77.982	11.192	16.396
3.00	63.655	64.697	9.633	13.739

Tabelle 3.6: Vergleich VSI- – FSI-Karte (AR(1)-Prozeß): $\mathrm{ATS}_0 = 500$, $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d = 5$, $\alpha = 0.2$, 0.4, 0.6 und 0.9 (von links oben nach rechts unten)

sie für $\alpha = -0.9$ ebenfalls nur noch 60% der Stichproben der FSI-Karte benötigt.

Abschließend kann man sagen, daß die VSI-Shewhart-Karte bei einem autoregressiven Prozeß der Ordnung eins eine deutlich bessere Leistungsfähigkeit als die FSI-Karte zeigt. Zwar ist die durchschnittliche Laufzeit für negative α größer als der entsprechende Wert der FSI-Karte, dies wird jedoch durch die in den meisten Fällen deutlich niedrigere Anzahl von Stichproben aufgehoben.

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	499.532	501.784	95.671	101.157
0.25	414.167	407.441	80.631	82.288
0.50	258.976	254.249	53.100	51.650
0.75	143.999	147.864	32.290	30.373
1.00	76.733	86.892	19.555	18.178
1.25	40.135	53.207	12.099	11.441
1.50	20.953	33.453	7.703	7.491
1.75	11.329	21.802	5.154	5.160
2.00	6.472	14.671	3.627	3.734
2.25	4.005	10.118	2.699	2.824
2.50	2.721	7.156	2.116	2.231
2.75	2.037	5.163	1.749	1.833
3.00	1.645	3.812	1.506	1.562

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	495.085	494.767	81.054	99.753
0.25	428.005	412.122	70.664	83.224
0.50	303.171	269.097	51.480	54.619
0.75	196.215	161.731	35.193	33.146
1.00	120.056	98.051	23.553	20.410
1.25	69.670	61.211	15.598	13.042
1.50	38.023	39.297	10.178	8.659
1.75	19.934	25.989	6.620	5.998
2.00	10.615	17.716	4.459	4.343
2.25	6.000	12.407	3.160	3.281
2.50	3.744	8.820	2.390	2.564
2.75	2.610	6.426	1.925	2.085
3.00	1.974	4.751	1.624	1.750

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	499.545	500.538	69.078	100.908
0.25	448.223	433.083	62.107	87.417
0.50	348.343	305.712	48.684	61.942
0.75	256.702	196.801	36.613	40.160
1.00	185.213	126.050	27.426	26.010
1.25	131.258	81.862	20.642	17.172
1.50	88.663	54.300	15.235	11.660
1.75	57.077	36.934	11.095	8.187
2.00	33.828	25.706	7.775	5.941
2.25	19.003	18.278	5.373	4.456
2.50	10.544	13.304	3.756	3.461
2.75	6.149	9.791	2.742	2.758
3.00	3.965	7.337	2.135	2.267

a	ATS	ARL	ANSS	Stpr
0.00	500.105	501.525	59.761	101.105
0.25	477.731	476.425	57.029	96.085
0.50	434.981	414.605	51.845	83.721
0.75	385.346	340.847	45.979	68.969
1.00	335.423	269.344	40.237	54.669
1.25	282.214	211.645	34.203	43.129
1.50	231.107	164.447	28.434	33.689
1.75	184.835	128.495	23.184	26.499
2.00	146.583	101.186	18.801	21.037
2.25	115.859	79.920	15.258	16.784
2.50	92.541	63.529	12.550	13.506
2.75	74.262	50.464	10.405	10.893
3.00	59.666	40.266	8.667	8.853

Tabelle 3.7: Vergleich VSI- – FSI-Karte (AR(1)-Prozeß): $\mathrm{ATS}_0 = 500$, $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d = 5$, $\alpha = -0.2$, -0.4, -0.6 und -0.9 (von links oben nach rechts unten)

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen
$I_A(x)$	Charakteristische Funktion der Menge A an der Stelle x
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$	Vektoren
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$	Matrizen
$\boldsymbol{I}$	Einheitsmatrix
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	n-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungsvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$
χ^2_n	Chi-quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden
χ^2_{n,λ^2}	Nichtzentrale Chi-quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter λ^2
$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle x
$\chi^2_n(x)$	Verteilungsfunktion der Chi-quadrat-Verteilung an der Stelle x
$\chi^2_{n,\lambda^2}(x)$	Verteilungsfunktion der nichtzentralen Chi-quadrat-Verteilung an der Stelle x
ARL	Durchschnittliche Lauflänge (**A**verage **R**un **L**ength)
ATS	Durchschnittliche Laufzeit (**A**verage **T**ime to **S**ignal)
ANSS	Durchschnittliche Anzahl Stichproben (**A**verage **N**umber of **S**amples to **S**ignal)

Literaturverzeichnis

Alam, K. und Kulasekera, K. (1993). Truncation error in the expansion of the distribution of a quadratic form. *Sankya B 54*, 13–23.

Altman, E. I. (1983). *Corporate Financial Distress: A Complete Guide to Predicting, Avoiding and Dealing with Bankruptcy.* John Wiley & Sons, New York, NY.

Alwan, L. (1992). Effects of autocorrelation on control chart performance. *Communications in Statistics, Theory and Methods 21*(4), 1025–1049.

Alwan, L. und Roberts, H. (1988). Time series modeling for statistical process control. *Journal of Business and Economic Statistics 6*, 87–95.

Amin, R. (1987). *Variable Sampling Interval Control Charts.* Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.

Amin, R.; Bakir, S. und Reynolds, M. (1995a). Nonparametric control charts based on the sign statistic. *Communications in Statistics: Theory and Methods 6*, 1579–1623.

Amin, R.; Frank, O. und Schmid, W. (1995b). The effects of autocorrelation on the R-chart and the S^2-chart. Technischer Bericht 34, Europa-Universität Viadrina, Frankfurt (Oder).

Amin, R. und Miller, R. (1993). A robustness study of $\bar{X}$-charts with variable sampling intervals. *Journal of Quality Technology 25*, 36–44.

Arnold, J. (1970). A markovian sampling policy applied to quality monitoring of streams. *Biometrics 26*, 739–747.

Arnold, J. und Crigler, J. (1986). Economically optimum markovian sampling policies for process monitoring. *Communications in Statistics 15*, 1773–1802.

Bagshaw, M. und Johnson, R. (1975). The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests II. *Technometrics 17*(1), 73–80.

Berthouex, P.; Hunter, W. und Pallesen, L. (1978). Monitoring sewage treatment plants: Some quality aspects. *Journal of Quality Technology 10*(4), 139–149.

Berthouex, P.; Hunter, W.; Pallesen, L. und Shih, C. (1976). The use of stochastic models in the interpretation of historical data from sewage treatment plants. *Water Research 10*, 689–698.

Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure.* John Wiley & Sons, New York, NY.

Böhm, W. und Hackl, P. (1992). The effect of serial correlation on the in-control average run length of cumulative score charts. Technischer Bericht, Department of Statistics, University of Economics and Business Administrations, Wien.

Box, G.; Jenkins, G. und MacGregor, J. (1974). Some recent advances in forecasting and control, Part II. *Journal of the Royal Statistical Society, Series C 23*, 158–179.

Box, G. E. und Pierce, D. A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association 65*(332), 1509–1526.

Brockwell, P. und Davis, R. (1991). *Time Series: Theory and Methods.* Springer Verlag, New York, NY.

Chang, T.-H. (1991). Statistical control of correlated variables. *ASQC Quality Congress Transactions* Seiten 298–303.

Crigler, J. (1973). *An economically optimal Markovian sampling policy for monitoring continuous process.* Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.

Crigler, J. und Arnold, J. (1979). On economically optimal markovian sampling policies with application to water pollution monitoring. In *Proceedings of the International Statistical Institute, 42nd Session*, Seiten 501–525.

Cui, R.-Q. und Reynolds, M. R. (1988). $\bar{X}$-charts with run rules and variable sampling intervals. *Communications in Statistics, Simulation 17*(3), 1073–1093.

Dodge, H. F. (1943). A sampling inspection plan for continuous production. *Annals of Mathematical Statistics 14*, 264–279.

Domangue, R. und Patch, S. (1991). Some omnibus exponentially weighted moving average statistical process monitoring schemes. *Technometrics 33*, 299–314.

Frank, O. (1995). *Streuungskarten für korrelierte Daten.* Diplomarbeit, Abteilung Stochastik, Universität Ulm, Ulm.

Gan, F. (1995). Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts. *Technometrics 37*(4), 446–453.

Gideon, R. und Gurland, J. (1976). Series expansions for quadratic forms in normal variables. *Journal of the American Statistical Association 71*, 227–232.

Harris, T. und Ross, W. (1991). Statistical process control procedures for correlated observations. *Canadian Journal of Chemical Engineering 69*, 48–57.

Harvey, M. M.; Clayton, H. R. und Prybutok, V. R. (1995). Comparison of fixed versus variable sampling interval Shewhart $\bar{X}$ control charts in the presence of undetected positively autocorrelated data with fixed control limits. *Economic Quality Control 10*(1), 3–11.

Hubele, N. F. (1989). A multivariate and stochastic framework for statistical process control. In Keats, J. B. und Hubele, N. F. (Herausgeber), *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Kapitel 8. Marcel Dekker, Inc., New York, NY.

Hui, Y. und Jensen, D. (1980). Markovian time-delay sampling policies. Technischer Bericht Q-5, Department of Statistics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.

Johnson, N. und Kotz, S. (1968). Tables of distributions of positive definite quadratic forms in central normal variables. *Sankhya B 30*, 303–314.

Johnson, N. und Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions.* John Wiley & Sons, New York, NY.

Johnson, R. und Bagshaw, M. (1974). The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests. *Technometrics 16*(1), 103–112.

Kamps, U.; Clermont, S.; Herff, W. und Jochems, B. (1994). The adusted average time to signal of control charts with variable sampling intervals. Technischer Bericht, Institut für Statistik, Technische Universität Aachen, Aachen.

Kawata, T. (1972). *Fourier Analysis in Probability Theory.* Academic Press, New York, NY.

Khatri, C.; Krishnaiah, P. und Sen, P. (1977). A note on the joint distribution of correlated quadratic forms. *Journal of Statistical Planning and Inference 1*, 299–307.

Knight, J. L. (1985). The joint characteristic function of linear and quadratic forms of non-normal variables. *Sankhya A 47*, 231–238.

Knoth, S.; Schmid, W. und Schöne, A. (1997). Simultaneous control charts for time series. Arbeitsbericht, Europa-Universität Viadrina, Frankfurt (Oder).

Kotz, S.; Johnson, N. und Boyd, D. (1967a). Series representations of distributions of quadratic forms in normal variables II. *Annals of Mathematical Statistics 38*, 838–848.

Kotz, S.; Johnson, N. und Boyd, D. (1967b). Series representations of distributions of quadratic forms in normal variables I. *Annals of Mathematical Statistics 38*, 823–837.

Kramer, H. und Schmid, W. (1996). The influence of parameter estimation on the ARL of Shewhart type charts for time series. Technischer Bericht 60, Europa-Universität Viadrina, Frankfurt (Oder).

Kramer, H. und Schmid, W. (1997). EWMA charts for multivariate time series. Erscheint in Sequential Analysis.

Lieberman, G. J. und Solomon, H. (1955). Multi-level continuous sampling plans. *Annals of Mathematical Statistics 26*, 686–704.

Lu, C.-W. und Reynolds, M. R. (1992). An EWMA control chart on the residuals of a time series model. Technischer Bericht, Department of Statistics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.

Lu, C.-W. und Reynolds, M. R. (1995). Control charts based on residuals for monitoring autocorrelated processes. Technischer Bericht, Department of Statistics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.

MacGregor, J. F. und Harris, T. J. (1990). Dicussion of „Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements". *Technometrics 32*(1), 23–26.

MacGregor, J. F. und Harris, T. J. (1993). The exponentially weighted moving variance. *Journal of Quality Technology 25*(2), 106–118.

Maragah, H. und Woodall, W. (1992). The effect of autocorrelation on the retrospective $\bar{X}$-chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation 40*, 29–42.

Mathai, A. und Provost, S. B. (1992). *Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications*. Marcel Dekker, Inc., New York, NY.

McCulloch, R. E. und Tsay, R. S. (1993). Bayesian inference and prediction for mean and variance shifts in autoregressive time series. *Journal of the American Statistical Association, Theory and Methods 88*(423), 968–978.

Meaux, L. M. und Seanam, J. W. (1990). Probability inequalities for quadratic forms. *Communications in Statistics, Theory and Methods 19*(5), 1863–1874.

Montgomery, D. (1991). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, New York, NY.

Montgomery, D. und Mastrangelo, C. (1991). Some statistical process control methods for autocorrelated data. *Journal of Quality Technology 23*(3), 170–193.

Montgomery, D. C. und Friedmann, D. J. (1989). Statistical process control in a computer-integrated manufacturing environment. In Keats, J. B. und Hubele, N. F. (Herausgeber), *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Kapitel 5. Marcel Dekker, Inc., New York, NY.

Neftci, S. N. (1982). Optimal prediction of cyclical downturns. *Journal of Economic Dynamics and Control 6*, 225–241.

Notohardjono, B. D. und Ermer, D. S. (1986). Time series control charts for correlated and contaminated data. *Journal of Engineering for Industry 108*, 219–226.

Page, E. S. (1955). Control charts with warning limits. *Biometrika 42*, 243–257.

Quesenberry, C. P. (1986). Screening outliers in normal process control data with uniform residuals. *Journal of Quality Technology 18*(4), 226–233.

Rendtel, U. (1986). *Verallgemeinerte CUSUM–Kontrollkarten und ihre Anwendung auf die Annahmestichprobenprüfung.* Dissertation, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Freie Universität Berlin, Berlin.

Rendtel, U. (1990). CUSUM-schemes with variable sampling intervals and sample sizes. *Statistical Papers 32*, 103–118.

Reynolds, M. (1989a). Optimal one-sided Shewhart control charts with variable sampling intervals. *Sequential Analysis 8*, 51–77.

Reynolds, M. (1989b). Optimal variable sampling interval control charts. *Sequential Analysis 8*, 361–379.

Reynolds, M.; Amin, R. und Arnold, J. (1990). CUSUM-charts with variable sampling intervals. *Technometrics 32*, 371–396.

Reynolds, M.; Amin, R.; Arnold, J. und Nachlas, J. (1988). $\bar{X}$–charts with variable sampling intervals. *Technometrics 30*, 181–192.

Reynolds, M. R. (1996). Shewhart and EWMA variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. *Journal of Quality Technology 28*(2), 199–212.

Roes, K. C. und Does, R. J. (1995). Shewhart-type charts in nonstandard situations. *Technometrics 37*(1), 15–24. Discussion, 24–40.

Saniga, E. (1977). Joint economically optimal design of $\bar{X}$- and R-control charts. *Management Science 24*, 420–431.

Saniga, E. (1979). Joint economic design of $\bar{X}$- and R-control charts with alternative process models. *AIIE Transactions 11*, 254–260.

Saniga, E. (1984). Isodynes for $\bar{X}$- and R-control charts. In Lenz, H.; Wetherill, G. und Wilrich, P.-T. (Herausgeber), *Frontiers in Statistical Quality Control 2*, Seiten 268–273. Physica-Verlag, Wien.

Saniga, E. (1989). Economic statistical control chart design with an application to $\bar{X}$- and R-charts. *Technometrics 31*, 313–320.

Schmid, W. (1995). On the run length of a Shewhart chart for correlated data. *Statistical Papers 36*, 111–130.

Schmid, W. (1997). On EWMA charts for time series. In Lenz, H.; Wetherill, G. und Wilrich, P.-T. (Herausgeber), *Frontiers in Statistical Quality Control*. Physica-Verlag, Wien.

Schmid, W. und Schöne, A. (1997). Some properties of the EWMA control chart in the presence of autocorrelation. Erscheint in Annals of Statistics (25).

Shamma, S. E.; Amin, R. W. und Shamma, A. K. (1991). A double exponentially weighted moving average control procedure with variable sampling intervals. *Communication in Statistics, Simulation 20*(2), 511–528.

Smeach, S. und Jernigan, R. (1977). Further aspects of a markovian sampling policy for water quality monitoring. *Biometrics 33*, 41–46.

Theodossiou, P. T. (1993). Predicting shifts in the mean of a multivariate time series process: An application in predicting business failures. *Journal of the American Statistical Association 88*(422), 441–449.

Tong, Y. (1980). *Probability Inequalities in Multivariate Distributions*. Academic Press, New York, NY.

Tong, Y. (1990). *The Multivariate Normal Distribution*. Springer Verlag, Berlin.

Vasilopoulos, A. und Stamboulis, A. (1978). Modification of control chart limits in the presence of data correlation. *Journal of Quality Technology 10*(1), 20–30.

Vladimirov, V. S. (1966). *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*. MIT Press, Cambridge, Mass.

Woodall, W. und Faltin, F. (1994). Autocorrelated data and SPC. *ASQC Statistical Division Newsletter 13*(4), 18–21.

Yashchin, E. (1993). Performance of CUSUM control schemes for serially correlated observations. *Technometrics 35*(1), 37—52.

Yourstone, S. A. (1991). Real-time process quality control in a computer integrated manufacturing environment. In Keats, J. B. und Montgomery, D. C. (Herausgeber), *Statistical Process Control in Manufacturing*, Kapitel 6. Marcel Dekker, Inc., New York, NY.

Yourstone, S. A. und Montgomery, D. C. (1989). A time-series approach to discrete real-time process quality control. *Quality and Reliability Engineering International 5*, 309–317.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Alexander Michael Schöne
Geburtsdatum:	27. Juni 1967
Geburtsort:	Schwäbisch Gmünd
Familienstand:	ledig
Staatsangehörigkeit:	deutsch

Schulausbildung

Aug. 1973 – Juli 1977	Grundschule Mutlangen
Aug. 1977 – Juli 1983	Hans-Baldung-Grien-Gymnasium Schwäbisch Gmünd
Aug. 1983 – Juni 1986	Technisches Gymnasium Schwäbisch Gmünd
Juni 1986	Abschluß mit der allgemeinen Hochschulreife

Wehrdienst

Juli 1986 – Sep. 1987	Grundwehrdienst beim 2. Panzergrenadierbataillon 302 in Ellwangen

Hochschulausbildung

Okt. 1987 – Juli 1991	Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Ulm
Aug. 1991 – Mai 1992	Graduate studies in Mathematik an der Syracuse University, USA
Mai 1992	Abschluß als Master of Science, Syracuse University
Juni 1992 – Mai 1993	Fortführung des Wirtschaftsmathematikstudiums in Ulm
Mai 1993	Abschluß als Diplom-Wirtschaftsmathematiker, Universität Ulm
seit Okt. 1993	Doktorand an der Universität Ulm
Okt. 1993 – März 1996	Stipendiat der Landesgraduiertenförderung Baden-Württemberg
März 1994 – April 1994	Forschungsaufenthalt an der Laval Université in Québec, Kanada