Prof. Dr. U.Jensen / J. Wiedmann

SS 99
Blatt 1
15.04.1999

Übungen zu Statistik I

(Abgabe: Donnerstag, den 22.04.1999, vor den Übungen)

1. Sei X eine Poisson $P(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Die Zufallsvariable Y sei unter der Bedingung $X = k$ binomial $B(k,p)$-verteilt, $0 < p < 1, k \in \mathbb{N}_0$, $P(Y = 0) = 1$ für $k = 0$. Zeigen Sie:
   a) $Y \sim P(\lambda p)$, (2)
   b) Y und $X - Y$ sind unabhängig. (3)
   c) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X unter $Y = y$. (2)

2. Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariable mit $P(X = 0) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X + Y|X)$. (2)

3. Es sei (X,Y) ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Verteilungsdichte $f(x,y) = x + y, 0 \leq x, y \leq 1$.
   a) Sind X und Y unabhängig ? (2)
   b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X|Y = y)$. (3)

4. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Zufallsstichprobe zum Merkmal X mit $\mu = \mathrm{E}(X)$ und $0 < \sigma^2 = \mathrm{E}(X - \mu)^2 < \infty$. Zudem sei

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \quad \text{und} \quad \overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{für} \quad n > 1.$$

   Zeigen Sie:
   a) $\mathrm{E}(S_n^2) = \sigma^2$, $n > 1$. (2)
   b) $S_n^2 \xrightarrow{f.s.} \sigma^2 \quad (n \to \infty)$. (2)
   c) Gilt auch $\mathrm{E}(S_n) = \sigma$? (Begründung) (2)

5. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe zum Merkmal X und $\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,t]}(X_i)$ die empirische Verteilungsfunktion. Zeigen Sie:
   a) $\mathrm{E}(\hat{F}_n(t)) = F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (1)
   b) $Cov\left(\hat{F}_n(s), \hat{F}_n(t)\right) = \frac{1}{n} F(s)(1 - F(t)), \quad s < t.$ (3)
   c) Gegeben seien folgende Eruptionslängen des Old-Faithful-Geysirs in Minuten:

      3.51 3.54 4.45 3.36 3.05 5.60 4.45 2.47 4.35 4.63.

      Berechnen Sie basierend auf diesen Daten die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_{10}(t)$ und skizzieren Sie deren Graphen. (4)