Prof. Dr. U. Jensen / J. Wiedmann

SS 99
Blatt 3
29.04.1999

Übungen zu Statistik I

(Abgabe: Donnerstag, den 06.05.1999, vor den Übungen)

1. Gegeben sei eine einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_1 \sim U(0, \theta), \theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$. Es seien $T_1(X_1, \ldots, X_n) = 2\bar{X}_n$ und $T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n+1}{n} max\{X_1, \ldots, X_n\}$ zwei erwartungstreue Schätzer für den Parameter θ.

   Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(T_1)$ und $\mathrm{Var}(T_2)$. (4)

2. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Zufallsstichprobe zum Merkmal X mit $X \sim F_\theta(x)$ und zugehöriger Dichtefunktion $f_\theta(x)$. Bestimmen Sie eine suffiziente Statistik für θ, falls

   a) $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x} \cdot I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0,$ (2)

   b) $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x), \quad \theta \in \mathbb{R},$ (2)

   c) $f_\theta(x) = \frac{1}{B(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} I_{(0,1)}(x), \quad \theta = (r,s) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$, mit $B(r,s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{b-1} dt \quad r, s > 0$ die Betafunktion. (3)

3. Seien X_1, X_2 unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit Zähldichte $f_\theta(k), \theta > 0$, wobei $f_\theta(0) = e^{-\theta}$, $f_\theta(1) = \theta e^{-\theta}$, $f_\theta(2) = 1 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta}$ und $f_\theta(k) = 0$ sonst.

   Zeigen Sie: $X_1 + X_2$ ist keine suffiziente Statistik für θ. (3)

4. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Zufallsstichprobe zum Merkmal X mit $X \sim U(\theta_1, \theta_2), \theta_1 < \theta_2$ und $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $T(X_1, \ldots, X_n) = (min\{X_1, \ldots, X_n\}, max\{X_1, \ldots, X_n\})$ ist eine suffiziente Statistik für (θ_1, θ_2). (3)

5. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Zufallsstichprobe zum Merkmal X. Es gelte $\mu = \mathrm{E}(X) \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 = Var(X) > 0$. Ferner sei $T_{\underline{c}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n c_i X_i$, $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$.

   Zeigen Sie:

   a) $T_{\underline{c}}(X_1, \ldots, X_n)$ ist erwartungstreuer Schätzer für μ genau dann, wenn $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. (2)

   b) $\bar{X}$ besitzt unter allen erwartungstreuen Schätzern obiger Form die kleinste Varianz. (3)