Prof. Dr. U. Jensen / J. Wiedmann

SS 99
Blatt 4
06.05.1999

Übungen zu Statistik I

(Abgabe: Donnerstag, den **20.05.1999**, vor den Übungen)

1. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe mit $X \sim F_\theta$ und zugehöriger Dichtefunktion $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} I_{(-\theta,\theta)}(x), \theta > 0$. Ist $T(X_1, \dots, X_n) = max(|X_1|, \dots, |X_n|)$ suffizient für θ ? (3)

2. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe mit $X \sim B_{1,p}, p \in (0,1)$. Zeigen Sie:
   a) $\bar{X}$ ist vollständig bezüglich p. (2)
   b) $\bar{X}$ ist UMVU-Schätzer für p. (2)

3. Bestimmen Sie unter den Voraussetzungen von Blatt3/Aufgabe4 und der zusätzlichen Annahme der Vollständigkeit von $T(X_1, \dots, X_n) = (min\{X_1, \dots, X_n\}, max\{X_1, \dots, X_n\})$ einen UMVU-Schätzer für $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. (4)

4. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe mit $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.
   a) Zeigen Sie: $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda)$ (2)
   b) Zeigen Sie: $T_1(X_1, \dots, X_n) = I_{\{0\}}(X_1)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $e^{-\lambda}$. (2)
   c) Zeigen Sie: $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ ist eine suffiziente Statistik für λ
      (i) mit der Definition von Suffizienz (2)
      (ii) mit Hilfe des Faktorisierungssatzes (2)
   d) Geben Sie ausgehend von $T_1(X_1, \dots, X_n)$ den durch Anwendung des Satzes von Rao-Blackwell verbesserten Schätzer für $e^{-\lambda}$ an, wenn $T(X_1, \dots, X_n)$ als suffiziente Statistik zugrundegelegt wird ? (3)
   e) Ist der in d) konstruierte Schätzer ein UMVU-Schätzer für $e^{-\lambda}$? (3)
   f) Bestimmen Sie einen UMVU-Schätzer für λ. (2)

5. Sei X exponentialverteilt mit Dichtefunktion $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} I_{[0,\infty)}(x), \theta > 0$.
   a) Zeigen Sie, daß das n-te Moment dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben ist durch $n!\theta^n$. (2)
   b) Bestimmen Sie die (eindimensionale) Fisher-Information $I_f(\theta)$. (2)

6. Sei $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$ und $T(X) = \begin{cases} 1 & \text{falls } X=0 \\ 0 & \text{falls } X \geq 1 \end{cases}$.

   Zeigen Sie:
   a) T ist der einzige erwartungstreue Schätzer für $g(\lambda) = e^{-\lambda}$ (d.h. T ist UMVU-Schätzer). (2)
   b) Bestimmen Sie $\mathrm{Var}_\lambda(T(X))$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der unteren Schranke im Satz von Rao-Cramér. (3)

7. Bestimmen Sie, falls möglich, Schätzfunktionen für den Parameter θ mittels der Momenten-Methode, wenn X folgende Dichte besitzt:

   a) $f_\theta(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x), \quad$ wobei $\quad \theta = (r, \lambda) \in (0, \infty)^2$. (2)

   b) $f_\theta(x) = \frac{1}{\pi\beta(1+(\frac{x-\alpha}{\beta})^2)}, \quad$ wobei $\quad \theta = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), x \in \mathbb{R}$. (2)

8. Bestimmen Sie, falls möglich, Schätzfunktionen für den Parameter θ mittels der Maximum-Likelihood-Methode, wenn X folgende Dichte besitzt:

   a) $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \quad$ wobei $\quad \theta > 0, x \in \mathbb{R}$; (2)

   b) $f_\theta(x) = c\theta^c x^{-(c+1)}, \quad x \geq \theta, \quad c \geq 0 \quad$ konstant, $\quad \theta > 0$; (2)

   c) $f_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad$ wobei $\quad \theta \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$. (3)