Prof. Dr. U. Jensen / J. Wiedmann

SS 99
Blatt 6
27.05.1999

Übungen zu Statistik I

(Abgabe: Donnerstag, den **10.06.1999**, vor den Übungen)

1. An einem regnerischen Tag hat ein Student im wesentlichen 3 Möglichkeiten ($\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$):
   (a_1) einen Schirm mit an die Uni zu nehmen und ihn möglicherweise zu vergessen,
   (a_2) den Schirm zu Hause zu lassen und möglicherweise im Regen zu stehen,
   (a_3) die Vorlesung ausfallen zu lassen und weiterzuschlafen.
   Sei $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, wobei θ_1 Regen und θ_2 kein Regen entspricht. Folgende Aufstellung gibt die Verluste für das Entscheidungsproblem des Studenten wieder:

	θ_1	θ_2
a_1	1	2
a_2	4	0
a_3	5	5

   Der Student trifft seine Entscheidung mit Hilfe des Wetterberichts, der von Θ wie folgt abhängt:

	θ_1	θ_2
W_1(Regen)	0.7	0.2
W_2(kein Regen)	0.3	0.8

   Berechnen Sie die Minimax-Entscheidungsregel, um dem Studenten zu helfen. (3)

2. Gegeben sei ein lineares Modell $\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$, wobei

   $$\mathrm{E}(\underline{\epsilon}) = 0, \quad \mathrm{Cov}(\underline{\epsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}, \quad \sigma^2 > 0, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad rg(\mathbf{X}) = 2.$$

   a) Zeigen Sie: Die Kleinst-Quadrate-Schätzer für β_1 bzw. β_0 sind

   $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \text{ bzw. } \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

   (3)

b) Die letzten 10 Jahre wurden die Gewinne eines Unternehmens aufgezeichnet (in 1000 DM). Man erhielt folgende Meßreihe:

Jahr (t_i)	'88	'89	'90	'91	'92	'93	'94	'95	'96	'97
Gewinn (X_i)	74	78	81	96	107	110	120	127	133	142

Berechnen Sie unter Zugrundelegung obigen Modells und dem Ansatz aus a) die Schätzungen für β_0 und β_1. Führen Sie ebenfalls einen graphischen Vergleich der Werte (t_i, X_i) und $(t_i, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t_i), i = 1, \cdots, 10$ durch. (3)

c) Zeigen Sie: Gilt zudem die Normalverteilungsannahme ($\underline{\epsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$), so stimmen die Maximum-Likelihood Schätzer für β_1, bzw. β_0 mit den Kleinst-Quadrate-Schätzern überein. (3)

3. Seien X und Y unabhängige und identisch $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen, $\sigma^2 > 0$. Zeigen Sie:

   a) Die Zufallsvariablen $X^2 + Y^2$ und $\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ sind stochastisch unabhängig, (4)

   b) $\theta = sin^{-1}(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}})$ ist gleichverteilt auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (2)

4. Der Vektor (X, Y) genüge einer bivariaten Normalverteilung $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, wobei $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho).$$

(3)

5. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Zufallsstichprobe zum Merkmal X mit $X \sim Exp(\theta), \theta > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$.

   a) Konstruieren Sie ein $(1 - \alpha)$-Konfidenzintervall für $\mathrm{E}(X)$. (3)

   b) Konstruieren Sie ein $(1 - \alpha)$-Konfidenzintervall für $\mathrm{Var}(X)$. (3)

   c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß obige Intervalle den wahren Erwartungswert und die wahre Varianz simultan überdecken. (2)

   d) Konstruieren Sie mittels $X_{(1)} := min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ein Konfidenzintervall für θ. (3)

6. Bei der Auswertung der Ergebnisse von 10 Versuchsflügen eines Sportflugzeuges ergaben sich folgende Werte für dessen Maximalgeschwindigkeit (in m/s):

422.2	418.7	425.6	420.3	425.8
423.1	431.5	428.2	417.2	421.4

Es soll angenommen werden, daß die gemessenen Maximalgeschwindigkeiten normalverteilt sind ($\alpha = 0.1$).

   a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für den Parameter μ. (2)

   b) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für den Parameter σ^2. (2)

   c) Geben Sie den Konfidenzbereich für (μ, σ^2) an und skizzieren Sie diesen. (2)