Prof. Dr. U.Jensen / J. Wiedmann

SS 99
Blatt 8
17.06.1999

Übungen zu Statistik I

(Abgabe: Donnerstag, den 24.06.1999, vor den Übungen)

1. Zeigen Sie: Sind $X_1, \ldots, X_m$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige und identisch $Exp(\theta)$-verteilte Zufallsvariablen, so gilt:

$$F := \frac{n}{m} \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} \sim \mathcal{F}_{2m,2n}.$$

(3)

2. Sei $X \sim B(1,p)$, $p \in [0,1]$. Weiterhin sei $\Theta_0 = [0, 0.6]$ und $\Theta_1 = (0.6, 1]$ gegeben. Für einen Test der Hypothese $H_0 : p \in \Theta_0$ gegen $H_1 : p \in \Theta_1$ soll folgende Testvorschrift verwendet werden:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{X} > 0.7 \\ 0 & \text{falls } \bar{X} \leq 0.7 \end{cases}$$

Bis auf Teilaufgabe (f) sei $n = 10$.

a) Wieviele Einsen darf eine Realisation der Stichprobe höchstens enthalten, damit die Hypothese nicht abgelehnt wird? (1)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1.Art, wenn $p = 0.4$ ist? (2)

c) Wie groß ist die maximale Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1.Art? (2)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, falsch zu entscheiden, wenn der wahre Wert $p = 0.75$ ist? (2)

e) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisher erlangten Informationen (und evtl. zusätzlicher Funktionswerte) die Gütefunktion des Tests φ. (2)

f) Um wieviel verbessert sich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2.Art bei einem Stichprobenumfang von $n = 20$ für $p = 0.75$? (2)

3. Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine einfache Zufallsstichprobe zum Merkmal X mit $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ und $\mu \in \mathbb{R}, \sigma_0^2 > 0$. Zum Überprüfen der Hypothese $\mathrm{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$ mit Irrtumswahrscheinlichkeit α, wobei $\mu_0 \in \mathbb{R}$ gelte, wird folgender Test benutzt:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{X} > \mu_0 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \sigma_0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $z_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung ist.

a) Skizzieren Sie die Gütefunktion $G_\varphi(u)$ des Tests, falls $\mu_0 = 0$ und $\sigma_0^2 = 1$, $n = 10$ und $\alpha = 0.05$ sind. (3)

b) Tabellieren Sie die Stichprobenumfänge n, die notwendig sind, damit die Macht des Tests 0.7 bzw. 0.9 beträgt, wenn $\frac{1}{\sigma_0}(\mu - \mu_0) \in \{2, 1.5, 1, 0.9, 0.8, \ldots, 1\}$ gilt. Hierbei ist $\alpha = 0.05$ zu wählen. (4)