U. Jensen/ A. Gandy

SS 2003
Blatt 6
8.7.2003

Punktprozesse – Übungen

(Abgabe: Di, den 22. Juli 2003, vor den Übungen)

Die mit * gekennzeichnete Aufgabe ist freiwillig und ergibt Zusatzpunkte.

1. Zeigen Sie, daß für den Nelson-Aalen-Schätzer $\hat\Lambda(t) = \int_0^t dN_\cdot(s)/Y_\cdot(s)$ gilt:

   a) $$E[\hat\Lambda(t) - \Lambda(t)] = -\int_0^t \left[\prod_{j=1}^n (1-\pi_j(s))\right] d\Lambda(s).$$
   (Hinweis: $E\hat\Lambda(t) = E\Lambda^*(t)$ mit $\Lambda^*(t) = \int_0^t I_{\{Y_\cdot(s)>0\}} d\Lambda(s)$.) (2)

   b) $$E[\hat\Lambda(t) - \Lambda^*(t)]^2 = E\left[\int_0^t \frac{I_{\{Y_\cdot(s)>0\}}}{Y_\cdot(s)}(1-\Delta\Lambda(s))d\Lambda(s)\right].$$
   (Hinweis: $\hat\Lambda(t) - \Lambda^*(t) = \int_0^t \frac{I_{\{Y_\cdot(s)>0\}}}{Y_\cdot(s)} dM(s)$, $\langle M\rangle = \sum_{j=1}^n \langle M_j\rangle$ und $\langle M_j\rangle(t) = \int_0^t Y_j(s)(1-\Delta\Lambda(s))d\Lambda(s)$ kann ohne Beweis verwendet werden) (3)

2. Sei $D[0,1]$ die Menge der reelwertigen cadlag Funktionen auf $[0,1]$. Die Supremumsmetrik ρ auf $D[0,1]$ ist gegeben durch

   $$\rho(f,g) := \sup_{s\in[0,1]} |f(s) - g(s)|.$$

   Eine Metrik d, welche die Skorokhod-Topologie erzeugt ist gegeben durch

   $$d(f,g) := \sup_{\lambda\in\Lambda}\left(\sup_{t\in[0,1]}|\lambda(t)-t| \vee \sup_{t\in[0,1]}|f(\lambda(t)) - g(t)|\right)$$

   wobei

   $$\Lambda := \{\lambda : [0,1]\to[0,1] : \lambda \text{ monoton wachsend und bijektiv}\}.$$

   a) Zeigen Sie: $\forall f,g \in D[0,1] : \rho(f,g) \le d(f,g)$.

   b) Es $f_n, n\in I\!N$ und f seigen gegeben durch

   $$f_n(t) = I_{[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},1]}(t), \quad f(t) = I_{[\frac{1}{2},1]}(t).$$

   Untersuchen Sie die Konvergenz von f_n gegen f bezüglich der beiden Metriken. (4)

3.* Bei einer klinischen Studie betrug der Stichprobenumfang $n = 38$. In der folgenden Tabelle sind die Ausfallzeitpunkte und der zugehörige Kaplan-Meier-Schätzer $\hat S = 1 - \hat F$ sowie der Varianzschätzer

$$\hat V(t) := \hat S^2(t)\int_0^t \frac{dN_\cdot(s)}{(Y_\cdot(s) - \Delta N_\cdot(s))Y_\cdot(s)}$$

für den Zeitraum von 172 - 332 Tagen angegeben:

$t\in$	$[172,192)$	$[192,194)$	$[194,230)$	$[230,276)$	$[276,332)$
$\hat S(t)$	0.6842	0.6579	0.6316	0.6041	0.5767
$\sqrt{\hat V(t)}$	0.0754	0.0770	0.0783	0.0795	0.0805

Unter Regularitätsbedinungen (die erfüllt seien) gilt

$$\frac{\hat F(t) - F(t)}{\sqrt{\hat V(t)}} \xrightarrow{\text{d}} N(0,1) \quad (n\to\infty)$$

und

$$\sup_{0\le s\le t} \frac{\hat F(s) - F(s)}{\sqrt{\hat V(s)}} \xrightarrow{\text{d}} \sup_{x\in[0,1]} B(x) \quad (n\to\infty),$$

wobei B eine Brownsche Bewegung ist. Ohne Beweis kann verwendet werden, dass $\sup_{x\in[0,1]} B(x) \sim |B(1)|$.

a) Berechnen Sie für die Verteilungsfunktion $F = 1 - S$ an der Stelle $t = 200$ ein zweiseitiges asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau 0.95. (2)

b) Berechnen Sie für $F(s), 0\le s\le 300$, ein einseitiges asymptotischen Konfidenzband zum Niveau 0.95, und geben Sie die Grenzen dieses Bandes für $172 \le s \le 300$ an. (3)

c) Skizieren Sie die obigen Ergebnisse zusammen mit $\hat F$. (2)