Seminar „Bayessche Ansätze in der Bildanalyse“

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

von Benjamin Mayer

Universität Ulm, Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

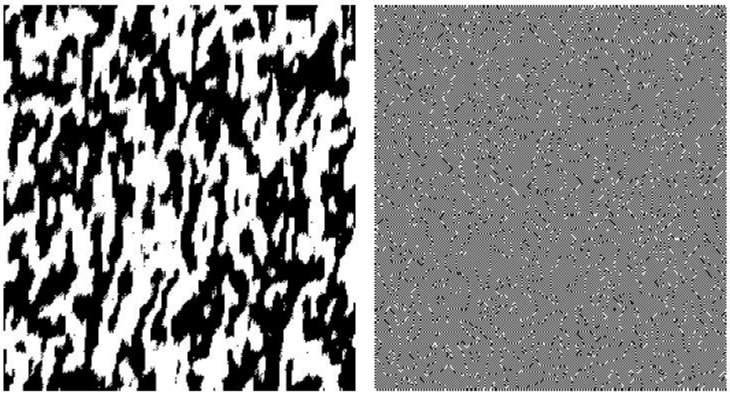
1 Der bayessche Ansatz in der Bildanalyse

Diese Seminararbeit beschäftigt sich mit dem Einsatz zufälliger Markov-Felder und Gibbs-Potentiale bei der Bayesschen Bildanalyse. Es soll aufgezeigt werden, wieso der Einsatz dieser Objekte sinnvoll sein kann und insbesondere, wie die Arbeit mit ihnen funktioniert. Eine der Aufgaben der statistischen Bildanalyse ist es, ein gestörtes oder verändertes Bild wieder herzustellen, man spricht hierbei von Bildrekonstruktion. Stellt man sich beispielsweise eine Digitalfotografie vor, so kommt es immer wieder vor, dass ein Bild unscharf oder falsch belichtet ist, d.h. die Aufnahme entspricht nicht dem eigentlichen Orginalzustand.
Mit Hilfe statistischer Methoden soll außerdem sowohl eine qualitative (welche Störung ist zu beobachten und wie kann man sie eventuell beheben) als auch quantitative Analyse (welche Beschaffenheit weist die Struktur der Pixel auf) eines Bildes vorgenommen werden. Die Beziehungen der zu untersuchenden Pixel zu ihren Nachbarn wird hierbei insbesondere betrachtet.
Bei der Untersuchung eines Bildes kann sich die Suche nach einer gemeinsamen Verteilung, welche die Struktur der Pixel beschreibt, als sehr schwierig gestalten. Oftmals ist nicht klar, wie man diese Aufgabe angehen soll. Die Annäherung der Bildausgabe durch bedingte Wahrscheinlichkeiten stellt hierzu einen sinnvollen und vereinfachenden Ansatz dar. Man betrachtet die Nachbarschaftsstruktur eines Pixels als gegeben und untersucht unter dieser Voraussetzung die Eigenschaft des Pixels selbst.
Der bayessche Ansatz führt zu der Theorie der Markovschen Zufallsfelder. Die bedingte Verteilung eines jeden Pixels des zu untersuchenden Bildes hängt unter der Betrachtung der restlichen Pixel des Bildes nur von den Werten seiner direkten Nachbarn ab, was bereits den Zusammenhang mit der Markov'schen Eigenschaft vermuten lässt. Anwendungen der Theorie Markov'scher Zufallsfelder finden sich in vielen Bereichen des Alltags, wie beispielsweise der Medizin (Krebsforschung, Computertomographie), Forschung und Entwicklung in der Industrie (Werkstoffanalyse, Fahrzeugbau), Telekommunikation, Geographie usw.
Die Verwendung zufälliger Markov-Felder vereinfacht nicht nur die Aufgabe die gemeinsame Verteilung eines zu untersuchenden Bildes zu bestimmen, sondern reduziert zudem auch den Aufwand der benötigt wird, um das Bild zu analysieren. Unter Ausnutzung der Markovschen Eigenschaft werden für einen Bildbereich, der pixelweise bearbeitet wird, nur Abschätzungen der lokalen bedingten Erwartung gefordert. Aufgrund der Tatsache, dass die Anzahl der Nachbarn bei fast allen Anwendungen sehr umfangreich ist, lässt

sich der Aufwand für die Bearbeitung eines Bildes mit Hilfe einer Gibbs-Verteilung auf O(n) Operationen für ein Markovsches Zufallsfeld reduzieren, im Vergleich zu $O(n^2)$ Operationen für ein Zufallsfeld ohne Markov'sche Eigenschaft.

2 Zufällige Markov-Felder

Zunächst einmal seien hier zwei Beispiele für ein Markovsches Zufallsfeld gegeben:



Man geht also von einem Bild aus, das es mit statistischen Methoden zu untersuchen gilt. Hierbei betrachtet man, wie bereits erwähnt, nicht das Bild im Ganzen, sondern versucht es in Teilen zu bearbeiten. Die stochastische Modellierung dieses Problems, d.h die Bestimmung einer gemeinsamen Verteilung des Bildes, erfolgt über sogenannte Zufallsfelder. Man betrachtet jeden Pixel des Bildes mit dessen (bekannten) Nachbarn und kann so mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsfunktion Aussagen über die Eigenschaften des Pixels treffen.
Für ein Zufallsfeld sei S eine endliche Menge mit Elementen s, die als Stellen oder Pixel bezeichnet werden. Desweiteren sei Λ eine ebenfalls endliche Menge, die Phasenraum genannt wird. Eine Folge

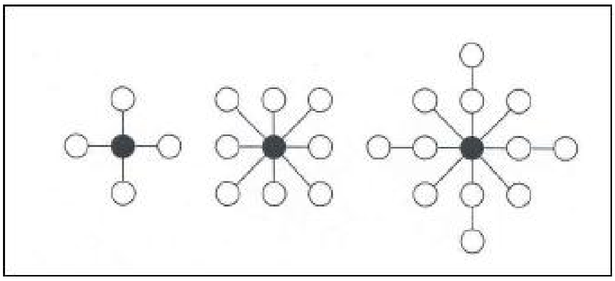
$$X = \{X(s) : s \in S\}$$

von Zufallsvariablen mit Werten im Phasenraum Λ wird im allgemeinen als Zufallsfeld bezeichnet.
Wie im einleitenden Kapitel bereits kurz angesprochen versucht man Aussagen über jeden einzelnen Pixel $s \in S$ (und damit auch über das entsprechende Zufallsfeld) zu treffen, indem man die Nachbarschaftsstruktur eines jeden Pixels betrachtet. Der in diesem Zusammenhang auftauchende Begriff

„Nachbarschaftssystem“ ist wie folgt definiert:
Ein Nachbarschaftssystem auf einer Menge S ist eine Familie $N = \{N_s : s \in S\}$ von Teilmengen von S, so dass für alle $s \in S$ gilt

1. $s \notin N_s$
2. $t \in N_s \Rightarrow s \in N_t$

Somit kann man für jeden Pixel s des Bildes eine Nachbarschaft N_s bestimmen mit $N_s \subseteq S$. Das Tupel (S,N) nennt man Topologie. In der Interpretation dieses Tupels ist S die Menge der zu untersuchenden Pixel und N die vereinigte Menge der Nachbarschaftssysteme aller Pixel s.
Es gibt verschiedene Arten von Nachbarschaftssystemen eines Pixels s, die sich in der Betrachtung der „nächsten Nachbarn“ von s unterscheiden. Üblicherweise werden hier Modelle mit den vier, acht oder zwölf nächsten Nachbarn verwendet.



Bevor man nun den Begriff des Markov'schen Zufallsfeldes definiert sollte nochmals die Definition der Markov'schen Eigenschaft wiederholt werden.
Eine Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen $X_0, X_1, ... : \Omega \to E$, die demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) angehören und ihre Werte in E = {1,2,...,l} annehmen, heißt eine Markovkette, wenn gilt

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

für beliebige n = 0,1,2,... und $i_0, i_1, ..., i_n \in E$. Die bedingte Verteilung des (zufälligen) Zustandes X_n der Markovkette $\{X_n\}$ zum „Zeitpunkt“ n wird also vollständig durch den Zustand $X_{n-1} = i_{n-1}$ zum vorhergehenden Zeitpunkt n-1 bestimmt. In der Bildanalyse wird die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Pixles in einem Gitter, d.h. eines Pixels des Bildes, also nur durch die Zustände der unmittelbaren Nachbarn bestimmt. Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Markov'schen Kette im Zweidimensionalen wird dann als Markov'sches Feld bezeichnet.

Mit den Begriffen Nachbarschaftssystem und Markovsche Eigenschaft ist es nun möglich die Definition eines zufälligen Markov-Feldes zu geben.
Ein Zufallsfeld X ist ein Markov-Feld, wenn

$$P(x_s|\{x_t, t \neq s\})=P(x_s|\{x_t, t \in N_s\})$$

gilt. Mit anderen Worten heißt das, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Pixel s einen bestimmten Wert annimmt, ausschließlich von den Werten der Nachbarn t mit $t \in N_s$ abhängt. Dabei sind für einen Pixel s die direkten Nachbarn t gemeint, wobei sich die Anzahl dieser Nachbarn durch die Wahl des entsprechenden Nachbarschaftssystems von s ergibt. Eine weitere Definition eines zufälligen Markov-Feldes, die jedoch letzten Endes zu demselben Ergebnis führt, benutzt die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen. Demnach heißt ein Zufallsfeld X Markov-Feld (MRF) in Bezug auf ein Nachbarschaftssystem N, wenn für alle Pixel $s \in S$ die Zufallsvariablen X(s) und $X(S \setminus N_s \cup \{s\})$ zu gegebenem $X(N_s)$ unabhängig sind, d.h.

$$P(X(s) = x(s)|X(S \setminus s) = x(S \setminus s)) = P(X(s) = x(s)|X(N_s) = x(N_s))$$

Zwei wichtige Begriffe, die im Zusammenhang mit zufälligen Markov-Feldern X auftauchen, sind zum einen die lokale Charakteristik des zu X gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes P und zum anderen die lokale Bestimmtheit (local specification) eines MRF.
Die lokale Charakteristik eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P eines MRF gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass $x_A = (x_s)_{s\in A}$ eine Struktur in A ist unter der Bedingung, dass $x_{S\setminus A} = (x_s)_{s\in S\setminus A}$ für den Rest der Umgebung gilt.
Dazu sei das W-Maß P strikt positiv, d.h. $P(x) > 0 \ \forall x \in S$. Dann heißen bedingte Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X_A = x_A|X_{S\setminus A} = x_{S\setminus A})$, $A \subset S$, eine lokale Charakteristik von P. An dieser Stelle wird der Zusammenhang zwischen der Markovschen Eigenschaft und der zu Beginn angesprochenen Abschätzung der lokalen bedingten Erwartung klar. Der Zustand des Pixels s ist nur abhängig von den Zuständen seiner unmittelbaren Nachbarn, d.h. nur die Struktur des Nachbarschaftssystems von s spielt für den Zustand von s eine Rolle.
Die lokale Charakteristik auf einem zufälligen Markov-Feld ist an der Stelle s gegeben durch die Funktion

$$\pi^{\mathrm{s}}(x) = P(X(s) = x(s)|X(N_s) = x(N_s))$$

Die Familie $\{\pi^{\mathrm{s}}\}_{s\in S}$ aller Pixel heißt dann die lokale Bestimmtheit (local specification) des zufälligen Markov-Feldes.

3 Gibbs-Potentiale

Eine spezielle Klasse von Zufallsfeldern sind die sogenannten Gibbs-Felder. Sie sind charakterisiert durch die analytische Darstellung ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es gibt viele Anwendungsbeispiele, bei denen die Gibbs-Verteilung bzw. die sogenannten Gibbs-Potentiale eine Rolle spielen und man diese dann auch explizit angeben kann.
Bevor nun die Gibbs-Verteilung angegeben werden kann bedarf es der Definition der Begriffe Potential bzw. Energie. Ein Potential ist eine Familie $\{\mathrm{U}_A : \mathrm{A} \subset \mathrm{S}\}$ von Funktionen in X. Für diese Familie gilt

1. $U_\emptyset = 0$
2. $U_A(x) = U_A(y)$, wenn $x_s = y_s \ \forall s \in A$

Die sogenannte Energie des Potentials U ist gegeben durch die Funktion

$$H_U(\mathrm{x}) = \textstyle\sum_{A \subset S} U_A(\mathrm{x})$$

Hierbei sei x der Gitterpunkt eines Bildes, der den Zustand s beschreibt und $A \in S$ sei eine Teilmenge aller Pixel in S. Ein Zufallsfeld X heißt nun ein Gibbs-Feld der Energie $H_U(\mathrm{x}) = \sum_{A \subset S} U_A(\mathrm{x})$, wenn X von der sogenannten Gibbs-Verteilung

$$\Pi(x) = P(X = x) = \frac{1}{Z} * exp(-H_U(x))$$

beherrscht wird. Hierbei ist Z eine Normierungskonstante, die aus P ein Wahrscheinlichkeitsmaß macht. Diese Konstante lässt sich jedoch oftmals weder analytisch noch numerisch bestimmen aufgrund der großen Anzahl möglicher Strukturen, die ein zu untersuchendes Bild mit sich bringt. Bemerkenswert ist, dass jede Verteilung eines Zufallsfeldes in der Form $\Pi(x)$ dargestellt werden kann. Die spezielle Rolle Gibbs'scher Zufallsfelder ist in der Literatur als das *Gibbs variational principle* bekannt. Dieses Prinzip besagt, dass ein Gibbs-Feld Π die größte Entropie unter allen Verteilungen hat, d.h. der mittlere Informationsgehalt, den wir durch eine Beobachtung erhalten, ist bei einem Gibbs-Feld am größten. Der Begriff „Clique“ ist im Kontext der Gibbs-Felder sehr wichtig. Unter einer Clique der Topologie (S,N) versteht man eine Teilmenge $C \subset S$ mit $c \in C$, $c \geq 2$, bei der zwei beliebige verschiedene Elemente c_1, $c_2 \in C$ gegenseitige Nachbarn sind, d.h. wenn gilt $c_1 \in N_{c_2}$ und $c_2 \in N_{c_1}$.

Ein Potential U heißt Nachbarschaftspotential bezüglich eines Nachbarschaftssystems N, wenn $U_A = 0$ für alle diejenigen Teilmengen A von S gilt, die keine Clique bilden. Ist das Potential U kein Nachbarschaftspotential, so besitzt das zugehörige Zufallsfeld auch keine Markovsche Eigenschaft, d.h. man kann allein durch die Betrachtung der nächsten Nachbarn eines Pixels nicht unbedingt Aussagen über dessen Zustand treffen.
Im Folgenden sollen nun einige Beispiele für Potentiale und Energiefunktionen betrachtet werden. Grundlage für diese Beispiele sei das diskrete Energiemodell

$$H(g|x) = \alpha H_1(g) + H_2(x|g) = \\ \alpha \sum_s (2g(t_s) - g(t_{s-1}) - g(t_{s+1}))^2 + \sum_s (x_s - g(t_s))^2,$$

wobei x das Orginalbild sei und g eine Annäherung von x, man sagt g ist ein Spline. Die Funktion H_1 misst die lokale Abweichung der diskretisierten Oberfläche g. Die Parameter t_s sind die benachbarten Stellen des Pixels s. Dies bedeutet insbesondere, dass man hierbei von einem eindimensionalen Bild ausgeht, sonst wären die Stellen ...,t_{s-1}, t_s, t_{s+1},... nicht definiert.

- *Krümmungsenergie:* Wir betrachten den Term H_1 und schreiben ihn etwas um in

  $$H_1(g) = \sum_s (2g(t_{s+1}) - g(t_s) - g(t_{s+2}))^2$$

  Es gilt hier $x \equiv g$ mit $S = \{t_1, ..., tn\}$ und t $\in$ R. Man erhält durch Umformen $H_1(g) = \sum_s (6g(t_s)^2 - 4g(t_s)g(t_{s+1}) + g(t_s)g(t_{s+2})$, wobei H_1 ein Nachbarschaftspotential ist und die Glattheit der Annäherung beschreibt. α ist ein Kontrollparameter für den Einfluss der Glattheit auf das Modell. Der Spline g kann nun als Realisierung eines Markov-Feldes X aufgefasst werden mit der Gibbs-Verteilung

  $$P(X = x) = \frac{1}{Z} * exp(-\alpha H_1(g))$$

  mit $\alpha > 0$. Die Oberflächen g mit einem hohen Grad an Krümmung sind weniger geeignet als Kurven mit geringer Krümmung. Dies wird durch den Parameter α bestimmt.

- *Bernoulli Energie:* X sei ein binäres Markov-Feld mit $S \subset \mathbb{Z}^2$ und Werten in $\Lambda = \{0, 1\}$. Das Nachbarschaftssystem von s sei das der vier nächsten Nachbarn. Der Pixel t_s ist genau dann ein Nachbar von s, wenn $||s - t||_2 = 1$. Die Cliquen von X sind die Pixel s und die Paare $s \sim t$, so dass gilt $||s - t||_2 = 1$. Dann heißt das Zufallsfeld X ein Bernoulli-Feld mit der folgenden Gibbs-Verteilung

$$P(X = x) = \frac{1}{Z} * exp(-H(x))$$

und es gilt

$$H(x) = \alpha_1 \sum_s x_s + \alpha_2 \sum_{<s,t>} x_s x_t$$

- *Gauß Energie:* Das Nachbarschaftssystem von s sei wiederum das der vier nächsten Nachbarn. Man benutzt hier Λ, um ein diskretes symmetrisches Intervall anzugeben. Ein Markov-Feld mit diesem Nachbarschaftssystem heißt ein zentriertes Gauß-Feld und ist gegeben durch die folgende Gibbs-Verteilung

$$P(X = x) = \frac{1}{Z} * exp(-H(x))$$

mit

$$H(x) = \alpha_1 \sum_s x_s^2 + \alpha_2 \sum_{<s,t>} x_s x_t$$

Nach den Beispielen für Nachbarschaftspotentiale und Energien seien im Folgenden noch zwei Beispiele für Testmodelle gegeben.

Das Ising Modell ist ein Testmodell für binäre Bilder, d.h. schwarz-weiß Bilder, mit dem grundlegende Fragen über Markov-Felder beantwortet werden können. Es beschreibt verschiedene fundamentale und typische Phänomene, die in vielen komplexen Systemen vorkommen, wie z.B. im Bereich Ferromagnetismus oder bei der Legierung von Metallen.
Im endlichen Ising Modell sei die Menge S aller Pixel gegeben durch $S = \mathbb{Z}^2$ und der Phasenraum Λ durch die Zweipunktmenge {+1,-1}. Das zugehörige Nachbarschaftssystem ist wieder das der vier nächsten Nachbarn und die vollständig bedingte Dichte im Ising Modell ist gegeben durch

$$P(x_s = 1|x(N_s)) = \frac{exp(\beta n_s^b)}{exp(\beta n_s^b) + exp(\beta n_s^w)}$$

Hierbei ist β ein positiver Parameter und x_s gibt den Gitterpunkt eines Bildes an, der den Zustand s beschreibt bzw. gibt $x(N_s)$ die Menge aller Pixel des zugehörigen Nachbarschaftssystems von s im Bild x an. Außerdem ist $n_s^b = \sum_{t \sim s} 1_{[x_t=1]}$ die Anzahl der schwarzen Nachbarn von s und $n_s^w = \sum_{t \sim s} 1_{[x_t=-1]}$die Anzahl der weißen Nachbarn von s. Die Energiefunktion ist dann im einfachsten Fall gegeben durch H(x) = -$\beta \sum_{s \sim t} x_s x_t$.
Eine Verallgemeinerung des Ising Modells auf mehr als zwei Farben ist das Potts Modell. Für die Werte der Pixel $s \in S$ gilt also $x_s \in \{0, 1, ..., n_c - 1\}$, $n_c > 2$, wobei n_c die Anzahl der Farben beschreibt. Die Energiefunktion im Potts Modell ist gegeben durch

$$\mathrm{H(x)} = -\gamma \sum_{s \sim t} \delta_{x_s, x_t}$$

mit

$$\delta_{a,b} = 1, \text{ wenn a = b und } \delta_{a,b} = 0 \text{ sonst}$$

Das Ising Modell ist also ein Spezialfall des Potts Modells für zweifarbige Bilder.
Die sogenannten *Binären auto-logistik Modelle* sind eine Modifikation des Ising Modells. Jeder Term des Ising Modells kann individuell gewichtet werden, so dass für die Energiefunktion H(x) gilt

$$\mathrm{H(x)} = \sum_{s \sim t} \vartheta_{st} x_s x_t + \sum_s \vartheta_s x_s$$

mit $x_s = \pm 1$. Wenn für den Gewichtungsparameter $\vartheta_{st} < 0$ gilt, so ist $x_s = x_t$ zu favorisieren. Hingegen ist die These $x_s = -x_t$ zu unterstützen, wenn gilt $\vartheta_{st} > 0$.

4 Gibbs-Markov-Äquivalenz

In diesem Abschnitt wollen wir näher auf die sogenannte Gibbs-Markov-Äquivalenz eingehen, welche die zentralen Begriffe des zufälligen Markov-Feldes und des Gibbs-Potentials in eine enge Beziehung zueinander stellt. Die Gibbs-Markov-Äquivalenz besteht aus zwei Teilen. Der direkte Teil liefert die Aussage, dass Gibbs-Felder ebenso Markov-Felder sind, der theoretische Teil ist gegeben durch das Theorem von Hammersley-Clifford. Zusammen mit dem direkten Teil kann man mit Hilfe des Theorems von Hammersley-Clifford folgern, dass Gibbs-Verteilungen und zufällige Markov-Felder im Wesentlichen dieselben Objekte sind.
Sei also X ein Gibbs'sches Zufallsfeld des Potentials U. Dann erhält man durch den direkten Teil der Gibbs-Markov-Äquivalenz die folgende Aussage:

Ist U ein Nachbarschaftspotential bezüglich eines Nachbarschaftssystems N, so ist X ein Markov-Feld bezüglich desselben Nachbarschaftssystems. Umgekehrt gilt der *Satz von Hammersley-Clifford*:
Sei P die Verteilung eines zufälligen Markov-Feldes bezüglich einer Topologie (S,N), wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß P strikt positiv sei. Dann gilt

$$P(x) = \frac{1}{Z} * exp(-H_U(x))$$

in Verbindung mit der Topologie (S,N) für eine Energiefunktion H(x), die von einem Gibbs-Potential $\{U_A : A \subset S\}$ abstammt.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines zufälligen Markov-Feldes besitzt also die Form, die in Kapitel 3 als Charakteristikum eines Gibbs'schen Zufallsfeldes definiert wurde. Die Gibbs-Markov-Äquivalenz spielt insbesondere in der Anwendung stochastischer Bildmodelle eine wichtige Rolle. Sie ermöglicht die Simulation verschiedener Testmodelle, wie beispielsweise dem Ising Modell, auf Basis der Markov'schen Zufallsfelder und lässt gleichzeitig die Definition von Energiepotentialen zu. Mit Hilfe der Energiepotentiale können dann, wie bereits gesehen an einigen Beispielen, die Testmodelle analysiert werden.

5 Inverse Probleme

In diesem letzten Abschnitt möchte ich noch auf die sogenannten Inversen Probleme eingehen. Arnd Rösch, Dozent der TU zu Berlin, schreibt in seinem Manuskript mit dem Titel „Inverse Probleme“ folgendes:
„Die Aufgabenstellungen, die man in vielen verschiedenen mathematischen Vorlesungen kennenlernt sind in der Regel *direkte Probleme*. Man hat beispielsweise ein System mathematischer Gleichungen, die aus einer naturwissenschaftlichen Aufgabenstellung abgeleitet sind. Bekannt ist also die Konfiguration des Problems und die Ausgangssituation. Das Ziel besteht in einer Simulation des Verlaufs dieses Prozesses. Allgemein kann man darum sagen, dass sich ein direktes Problem dadurch auszeichnet, dass man aus bekannten Ursachen die unbekannten Wirkungen zu ermitteln hat. Bei inversen Problemstellungen steht die Aufgabe in der anderen Richtung. Gegeben sind Messwerte oder Beobachtungen der Wirkungen. Gesucht ist die Ursache bzw. ein Teil der Ursachen, die zu den Beobachtungen geführt haben.“
Im Kontext der statistischen Bildanalyse bedeutet dies also, dass man es im Grunde relativ häufig mit inversen Problemstellungen in der Bildanalyse zu tun hat. Bei der Bildrekonstruktion sind gestörte, verrauschte oder verschlüsselte Bilder zu analysieren und anschließend mit geeigneten Modellen

so zu bearbeiten, dass das Ergebnis dem Orginalbild möglichst ähnlich wird. Das zu bearbeitende Bild kann somit als beobachteter Datensatz aufgefasst werden. Die allgemeine Definition eines inversen Problems ist bei Bernard Chálmond zusammengefasst durch das Tupel (y^o,X,H($x|y,\theta$)).

- Das erste Element dieses Tupels ist ein beobachtetes Zufallsfeld y^o, d.h. dieses Element stellt ein Bild dar, das es zu rekonstruieren gilt.
- Das zweite Element X ist die Definition eines sogenannten versteckten Zufallsfeldes, d.h. ein Zufallsfeld, welches nicht direkt beobachtbar ist. Hierbei handelt es sich natürlich um das Orginalbild, das man aus den beobachteten Daten bestimmen will.
- Das dritte Element des Tupels ist die Definition einer Energiefunktion, dargestellt durch die Energiefunktion

  $$H(x|y,\theta) = H_1(x,\theta_1) + H_2(y,\theta_2)$$

  Die Energiefunktionen H_1 und H_2 sind Energien eines Nachbarschaftspotentials und $\theta_{i,j}$ sind Parameter zur Gewichtung.

Die Zerlegung der Energiefunktion H in H_1 und H_2 ist additiv. Dies folgt aus der a-posteriori-Wahrscheinlichkeit. Die Lösung eines inversen Problems dieser Form bringt die Berechnung des Minimums einer für das Modell definierten Kostenfunktion mit sich und zwar gemäß $H(x|y^o,\theta)$. Die Energiefunktion H ist also definiert für die Berechnung des Orginalbild unter gegebenen Beobachtungen y^o und Gewichtungsparametern θ.

Zusammenfassung

In den vergangenen Kapiteln konnte man also sehen, dass die Problemstellung der statistischen Bildanalyse, d.h. die Rekonstruktion eines Bildes mit Hilfe einer gemeinsamen Verteilung, die es zu bestimmen gilt, durch die Verwendung von zufälligen Markov-Feldern vereinfacht werden kann. Zudem lässt sich der Aufwand für die Bearbeitung eines Bildes mit Hilfe verschiedener Algorithmen, die auf Gibbs-Potentialen beruhen, deutlich reduzieren. Beispiele hierfür wären der Gibbs-Sampler oder der Metropolis-Hastings-Algorithmus. Des Weiteren stellen die zufälligen Markov-Felder und Gibbs-Potentiale eine geeignete Basis für Simulationen verschiedener Testmodelle dar, da aufgrund der Gibbs-Markov-Äquivalenz Markov'sche Zufallsfelder durch eine analytische Darstellung ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung repräsentiert werden können.

Literatur

- Gerhard Winkler „Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods“
- Bernard Chálmond „Modeling and Inverse Problems in Image Analysis“
- Jesper Møller „Spatial Statistics and Computational Methods“
- Pierre Brémaud „Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues“
- Volker Schmidt „Markov Ketten und Monte Carlo Simulation“
- Arnd Rösch „Inverse Probleme“, TU Berlin
- http://www.google.de, http://www.wikipedia.org