Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
27.04.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 1

(Abgabe: Donnerstag, 04.05.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Zeige: Für die Erneuerungsfunktion $H(t)$ eines einfachen Erneuerungsprozesses $\{N_t\}$, d. h. $F_1(t) \equiv F(t)$, gilt die folgende Abschätzung:

$$F(t) \le H(t) \le F(t)/(1 - F(t)) \text{ für jedes } t \in \mathbf{F} = \{t \ge 0 : F(t) < 1\}$$

(4)

Aufgabe 2

Sei $\{X_t, t \ge 0\}$ ein stochastischer Prozess. Zeige:

(a) Wenn $\{X_t, t \ge 0\}$ stationäre Zuwächse hat und die Funktion $f(t) = \mathbb{E}X_t$ stetig in t ist, dann ist $f(t)$ linear in t, d. h. $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass$f(t) = \alpha + \beta t$. (2)

(b) Wenn $\{X_t, t \ge 0\}$ stationäre und unabhängige Zuwächse hat und die Funktion $g(t) = \mathrm{Var}(X_t - X_0)$ stetig in t ist, dann gilt: $\exists\ \sigma^2 > 0$, so dass $\mathrm{Var}(X_{s+t} - X_s) = \sigma^2 t\ \forall s \ge 0$. (2)

Aufgabe 3

Zeige: Ein (reellwertiger) Prozess $\{X_t, t \ge 0\}$ mit unabhängigen Zuwächsen hat bereits dann stationäre Zuwächse, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen $X_{t+h} - X_h$ unabhängig von h ist. (3)

Aufgabe 4

Die Zwischenankunftszeiten $T_1, T_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch $\mathrm{Erl}(m, \lambda)$-verteilt mit $\lambda > 0, m \in \mathbb{N}$, d. h. sie haben die Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x}, \quad \forall\, x \ge 0$$

Bestimme für jedes m die Erneuerungsfunktion $H(t)$ des zugehörigen (einfachen) Erneuerungsprozesses $\{N_t\}$ und gib eine explizite Formel für den Fall $m = 1$ an. (5)

Aufgabe 5

Es sei $\{N_t, t \geq 0\}$ ein Erneuerungsprozess mit Erneuerungsfunktion $H(t)$. Die Verteilungsfunktion der zugehörigen Zwischenankunftszeiten sei mit $F(t)$ bezeichnet.

(a) Zeige:

$$\mathbb{E}(N_t^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)F^{*(n)}(t)$$

(2)

(b) (i) Bestimme die Laplace-Transformierte von $\sum_{n=1}^{\infty} nF^{*(n)}(t)$.

(ii) Benutze (i), um $\sum_{n=1}^{\infty} nF^{*(n)}(t)$ durch $H(t)$ auszudrücken. (2)

(c) Drücke $\mathbb{E}(N_t^2)$ durch $H(t)$ aus. (1)

Hinweis: Aktuelle Informationen zur Vorlesungen sind unter

http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss06/wt.html

zu finden. Dort stehen u. a. auch die Übungsblätter zum Download bereit. Die Lösungen der Übungsblätter können zu zweit abgegeben werden. Bitte die Namen **deutlich** schreiben!