Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
13.07.2006

# **Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie** - Blatt 10

(Abgabe: Donnerstag, 20.07.2006, vor den Übungen)

**Aufgabe 1**
Definiere die bedingte Varianz durch

$$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}\left(Y|X\right))^2|X\right)$$

Zeige:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Var}(Y|X)\right) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}\left(Y|X\right))$$

(4)

**Aufgabe 2**
Es seien $S$ und $T$ Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

(a) Zeige, dass $\min\{S,T\}, \max\{S,T\}, S+T$ und $\alpha T, \alpha \geq 1$, Stoppzeiten sind. (5)

(b) Zeige, dass $S-T$ im allgemeinen keine Stoppzeit ist. (1)

**Aufgabe 3**
Für eine Stoppzeit $\tau$ definieren wir die *gestoppte $\sigma$-Algebra* $\mathcal{F}_\tau$ wie folgt:

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für beliebige } t \geq 0\}$$

Seien nun $S$ und $T$ Stoppzeiten bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Zeige:

(a) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$ (2)

(b) $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \ \forall A \in \mathcal{F}_S$ (2)

(c) $\mathcal{F}_{\min\{S,T\}} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ (2)

**Aufgabe 4**
Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Zeige, dass der Prozess $\{Y_t, t \geq 0\}$ mit $Y_t = (X_t - t\lambda)^2 - t\lambda$ ein Martingal ist. (4)