Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
20.07.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 11

(Abgabe: Donnerstag, 27.07.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Seien $\{X_t, t \geq 0\}, \{Y_t, t \geq 0\}$ Submartingale und $\{U_t, t \geq 0\}, \{V_t, t \geq 0\}$ Supermartingale bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Zeige: $\{\max\{X_t, Y_t\}, t \geq 0\}$ ist ein Submartingal und $\{\min\{U_t, V_t\}, t \geq 0\}$ ist ein Supermartingal. (4)

Aufgabe 2

Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener–Prozess. Zeige, dass $\{X_t, t \geq 0\}$, $\{X_t^2 - t, t \geq 0\}$ und $\{e^{u X_t - u^2 t/2}, t \geq 0\}$, für ein beliebiges (aber festes) $u \in \mathbb{R}$, Martingale bzgl. der natürlichen Filtration $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ sind. (6)

Aufgabe 3

Sei $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\,|X_n| < \infty$ für jedes $n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ mit Wahrscheinlichkeit 1 für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $\{X_n,\, n \geq 1\}$ ist gleichgradig integrierbar.
- Es gilt $\mathbb{E}\,|X| < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|X_n - X| = 0$.

• Hinweis 1: $X_n \xrightarrow{f.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
• Hinweis 2: Verwende Lemma von Fatou & Satz über die majorisierte Konvergenz. (8)

Dies ist das letzte Übungsblatt des Semesters. Die erreichbare Gesamtpunktzahl liegt damit bei 240. Für den Erhalt des Scheines sind also 120 Punkte hinreichend. Die Scheine können nach dem Semester im Sekretariat der Abteilung Stochastik (Helmholtzstr. 18, Raum 164) abgeholt werden. Dort kann ab 15. August auch die neue Fassung des gedruckten Skriptes zum Preis von voraussichtlich ca. 5 Euro erworben werden.