Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
04.05.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 2

(Abgabe: Donnerstag, 11.05.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

(a) Schreiben Sie ein Programm, dem als Parameter eine Intervallobergrenze T und eine Intensität λ übergeben werden und das für eine Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ alle Erneuerungszeitpunkte im dem Intervall $[0, T]$ sowie zusätzlich die zugehörige erwartete Anzahl von Erneuerungszeitpunkten ausgibt. (5)

(b) Schreiben Sie eine zusätzliche Prozedur, welche die mittlere Anzahl von Erneuerungszeitpunkten im Intervall $[0, 100]$ für $\lambda = 0.2$ bei 1000 Durchläufen ausgibt. (1)

Tip: Verwenden Sie folgende Implikation: $U \sim U[0,1] \Rightarrow Z = \frac{-\ln(U)}{\lambda} \sim Exp(\lambda)$.

Bitte für diese und alle zukünftigen Programmieraufgaben folgendes beachten: Abzugeben ist ein Ausdruck des lesbar kommentierten Programmcodes *und* der (ggf. beispielhaften) Ausgaben. Bevorzugt werden Programme in Java. Lösungen in anderen gebräuchlichen Programmiersprachen werden auch akzeptiert, **wenn sie kommentiert, strukturiert und lesbar sind.** Einen Link zur Java-Online-Dokumentation und anderen hilfreichen Seiten finden Sie auf der Vorlesungshomepage:

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss06/wt.html`

Aufgabe 2

Sei $\{N_t, t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ. Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass im Intervall $[0, s]$, genau i Ereignisse auftreten unter der Bedingung, dass im Intervall $[0, t]$ genau n Ereignisse eintreten; d. h. $P(N_s = i \,|\, N_t = n)$ für $s < t, i = 0, 1, \ldots, n$. (4)

Aufgabe 3

Sei $\{N_t, t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ, und sei T_0 eine von N_t unabhängige Zufallsvariable mit $P(T_0 = 1) = \frac{1}{2} = P(T_0 = -1)$. Der Prozess T_t sei gegeben durch $T_t = T_0(-1)^{N_t}$.

(a) Sei t beliebig, aber fest. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass N_t gerade bzw. ungerade ist. (2)

(b) Sei t beliebig, aber fest. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass T_t gleich +1 bzw. -1 ist und bestimme den Erwartungswert und die Varianz von T_t. (3)

(c) Berechne den Korrelationskoeffizienten $\rho(T_s, T_{s+t})$ für beliebige $s \geq 0, t > 0$. (2)

Aufgabe 4

Seien $X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ unabhängige homogene Poisson-Prozesse mit Intensitäten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeige: $Y_t = \sum\limits_{i=1}^{n} X_t^{(i)}$ ist ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. (3)