Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf
SS 2006
11.05.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 3

(Abgabe: Donnerstag, 18.05.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$.
Sei $\hat{g}_{N_t}(s) = \mathbb{E}(s^{N_t}), s \in (0,1)$, die erzeugende Funktion des Poisson-Prozesses N_t, $\hat{l}_U(s) = \mathbb{E}(e^{-sU})$ die Laplace-Transformierte von U_i $\forall i$ und $\hat{l}_{X_t}(s)$ die Laplace-Transformierte von X_t. Zeige:

$$\hat{l}_{X_t}(s) = \hat{g}_{N_t}(\hat{l}_U(s)), s \geq 0$$

(4)

Aufgabe 2

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ mit $U_i \sim Exp(\gamma)$ $\forall i$, wobei die Intensität von N_t durch λ gegeben sei. Zeige, dass für die Laplace-Transformierte $\hat{l}_{X_t}(s)$ von X_t gilt:

$$\hat{l}_{X_t}(s) = e^{-\frac{\lambda t s}{\gamma + s}}$$

(4)

Aufgabe 3

Schreibe ein Programm, dem als Parameter ein Zeitpunkt t, eine Intensität λ und ein Wert γ übergeben werden und das als Ergebnis den zufälligen Wert eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit Charakteristiken (λ,$Exp(\gamma)$) (vgl. Aufgabe 2) zum Zeitpunkt t ausgibt. (2)

Zur Erinnerung: Wie bei allen Programmieraufgaben ist auch hier folgendes zu beachten: Abzugeben ist ein Ausdruck des lesbar kommentierten Programmcodes *und* der (ggf. beispielhaften) Ausgaben. Bevorzugt werden Programme in Java. Lösungen in anderen gebräuchlichen Programmiersprachen werden auch akzeptiert, **wenn sie kommentiert, strukturiert und lesbar sind.** Ein Link zur Java-Online-Dokumentation und anderen hilfreichen Seiten sowie aktuelle Informationen zur Vorlesung sind auf der Vorlesungshomepage zu finden:

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss06/wt.html`

Die Lösungen der Übungsblätter können zu zweit abgegeben werden. Bitte die Namen **deutlich** schreiben!

Aufgabe 4

Der stochastische Prozess $\{N_t\}$ sei ein Cox-Prozess mit Intensitätsfunktion $\lambda_t = Z$, wobei Z eine diskrete Zufallsvariable ist, welche die Werte λ_1 und λ_2 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ annimmt. Bestimme die momenterzeugende Funktion sowie den Erwartungswert und die Varianz von N_t. (5)

Aufgabe 5

Gegeben seien zwei unabhängige, homogene Poissonprozesse $\{N_t^{(1)}\}$ und $\{N_t^{(2)}\}$ mit den Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Weiter sei $X \geq 0$ eine beliebige nichtnegative Zufallsvariable, die von $\{(N_t^{(1)}, N_t^{(2)})\}$ unabhängig ist.

Zeige, dass der Prozess $\{N_t\}$ mit

$$N_t = \begin{cases} N_t^{(1)}, & \text{falls } t \leq X, \\ N_X^{(1)} + N_{t-X}^{(2)}, & \text{falls } t > X \end{cases}$$

ein Cox-Prozess ist, dessen Intensitätsprozess $\{\lambda_t\}$ gegeben ist durch

$$\lambda_t = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } t \leq X, \\ \lambda_2, & \text{falls } t > X. \end{cases}$$

(5)