Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
18.05.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 4

(Abgabe: Donnerstag, **01.06.2006**, vor den Übungen)

Aufgabe 1

(a) Schreibe ein Programm, dem die Parameter $a, b > 0, T > 0$ und $t_0 \in (0, T)$ übergeben werden, und das für eine Realisierung eines Cox-Prozesses $\{N_t\}$ mit Intensitätsprozess $\{\lambda_t\}$ alle Sprungzeitpunkte im Intervall $[0, T]$ ausgibt. Dabei sei λ_t gegeben durch

$$\lambda_t = \begin{cases} U_1 \ , & t < t_0 \\ U_2 \ , & t \geq t_0 \end{cases}$$

und U_1, U_2 seien unabhängige Zufallsvariablen mit $U_1 \sim U[0, a], U_2 \sim U[0, b]$, die auch von N_t unabhängig sind. (6)

(b) Stelle für eine Realisierung des in (a) implementierten Cox-Prozesses die Werte von N_t gemeinsam mit den Werten von λ_t im Intervall $[0, 4]$ für $t_0 = 2, a = 0.5, b = 4$ graphisch dar. (4)

(c) Berechne für die Parameterwerte aus (b) mittels 10.000 Realisierungen die empirischen Werte des Erwartungswertes $\mathbb{E}N_4$ und der Leerwahrscheinlichkeit $P(N_2 - N_1 = 0)$. (2)

Aufgabe 2

Sei $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})$, wobei $p_{12} = p_{23} = p_{31} = 1$ gelte. Die Anfangsverteilung sei durch $\alpha = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ gegeben.

(a) Zeige, dass die Folge $Y_n = 1 - 1\!\!\mathrm{I}(X_n = 1)$ keine Markov-Kette beschreibt. (2)

(b) Sei $Y_n = X_{2n}, n \geq 0$. Zeige, dass die Folge $\{Y_n\}$ eine Markov-Kette ist und bestimme die zugehörige Übergangsmatrix. (3)

Aufgabe 3

An einem Ort U sei das Wetter entweder sonnig, neblig oder regnerisch. Das Wetter dort werde modelliert durch eine Markov-Kette mit den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten:

		morgen wird es...		
		sonnig	neblig	regnerisch
heute ist es...	sonnig	0.8	0.2	0.0
	neblig	0.4	0.4	0.2
	regnerisch	0.2	0.6	0.2

Angenommen, der 10. Mai sei sonnig. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Wetterzustände sonnig, neblig und regnerisch am 2. September. (5)

Aufgabe 4

Seien $E = \{1, ..., l\}$ ein endlicher Zustandsraum, D ein beliebiger messbarer Zustandsraum, $Z_1, Z_2, \ldots : \Omega \to D$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, und die Zufallsvariable $X_0 : \Omega \to E$ sei unabhängig von $Z_1, Z_2, \ldots$. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to E$ seien durch die Rekursionsgleichung $X_n = \varphi(X_{n-1}, Z_n)$ gegeben, wobei $\varphi : E \times D \to E$ eine beliebige messbare Abbildung sei. Zeige: $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ist eine Markov-Kette. (4)

Aufgabe 5

Gegeben sei die Anfangsverteilung $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_l)$ und die Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$ mit $E = \{1, ..., l\}$. Die Folge $Z_0, Z_1, ...$ sei eine Folge von unabhängigen und identisch auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Definiere die E-wertige Zufallsvariable X_0 durch:

$$X_0 = k \;\Leftrightarrow\; Z_0 \in \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right]$$

und die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ...$ rekursiv über: $X_n = \varphi(X_{n-1}, Z_n)$, wobei die Funktion $\varphi : E \times [0, 1] \to E$ gegeben ist durch

$$\varphi(i, z) = \sum_{k=1}^{l} k \cdot \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} < z \leq \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \right).$$

Zeige, dass die Folge $\{X_n\}$ eine zeitdiskrete, homogene Markov-Kette mit Anfangsverteilung α und Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ ist. (4)

Aufgabe 6*

Es sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein rechtsstetiger Markov-Prozess mit endlichem Zustandsraum E, stückweisen konstanten Pfaden und Anfangsverteilung α. Sei $\{N_t, t \geq 0\}$ ein von $\{X_t\}$ unabhängiger Poissonprozess mit Intensität λ. Setze $Y_n = X_{S_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d. h., Y_n gibt den Zustand des Markov-Prozesses $\{X_t\}$ zum n-ten Sprungzeitpunkt S_n des Poissonprozesses an. Zeige, dass $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Markov-Kette ist und bestimme deren Übergangsmatrix P. (4*)