Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
01.06.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 5

(Abgabe: Donnerstag, 08.06.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Sei $\{\mathbf{P}(h), h \geq 0\}$ eine Familie $\ell \times \ell$-dimensionaler stochastischer Matrizen. Für alle $h_1, h_2 \geq 0$ gelte $\mathbf{P}(h_1 + h_2) = \mathbf{P}(h_1)\mathbf{P}(h_2)$ und $\lim\limits_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.
Zeige, dass $\mathbf{P}(h)$ auf $(0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist. (4)

Aufgabe 2

(a) Zeige, dass $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{A}') = \exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{A}')$ für beliebige quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ gilt, vorausgesetzt, dass $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\mathbf{A}$ ist. Weise insbesondere nach, dass für $h \geq 0$

$$\exp(h(\mathbf{I} + \mathbf{A})) = \exp(h) \exp(h\mathbf{A}).$$

(4)

(b) Sei $\mathbf{Q}$ eine $\ell \times \ell$-Intensitätsmatrix. Zeige, dass die Matrix-Exponentialfunktion $\{\exp(h\mathbf{Q}), h \geq 0\}$ der Chapman-Kolmogorov-Gleichung genügt. (1)

Aufgabe 3

Eine Maschine arbeite eine $\text{Exp}(\lambda)$-verteilte Zeitdauer fehlerfrei, bis sie ausfällt und repariert wird. Die Reparaturzeit (bis zum Neustart der Maschine) sei ebenfalls exponentialverteilt, wobei für eine Reparatur im Mittel μ^{-1} Zeiteinheiten benötigt werden. Sämtliche Arbeits- und Reparaturperioden sind unabhängig und erfolgen im Wechsel. Angenommen, die Maschine arbeitet zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einwandfrei, mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet sie zum Zeitpunkt $t_1 = 10$ für $\mu = 0.1, \lambda = 0.1$? (4)

Aufgabe 4

Betrachte N schwarze und N weiße Kugeln, die auf zwei Urnen A und B so verteilt werden, dass jede Urne genau N (nicht notwendigerweise gleichfarbige) Kugeln enthält. In jedem Schritt wird aus beiden Urnen jeweils eine Kugel zufällig gezogen, und die gezogenen Kugeln werden dann in die jeweils andere Urne gelegt. X_i sei die Anzahl der schwarzen Kugeln in Urne A nach dem i-ten Schritt. Bestimme die Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ und die zugehörige eindeutige stationäre (Anfangs-)Verteilung.
Hinweis: $\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}^2 = \binom{2N}{N}$ (4)

Aufgabe 5 Abgabe: 22.06.2006

Schreibe ein Java-Programm zur Simulation eines Markov-Prozesses $\{X_t, t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$, der Gleichverteilung auf E als Anfangsverteilung und der Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Führe die Simulation jeweils 1000mal bis zum Zeitpunkt $t_0 = 10.0, 100.0$ bzw. 1000.0 durch. Bestimme dabei die relativen Häufigkeiten der Zustände, die bei Abbruch der Simulation angenommen wurden. Vergleiche diese relativen Häufigkeiten mit der stationären Anfangsverteilung von $\{X_t\}$. (6)

Zur Erinnerung: Wie bei allen Programmieraufgaben ist auch hier folgendes zu beachten: Abzugeben ist ein Ausdruck des lesbar kommentierten Programmcodes *und* der (ggf. beispielhaften) Ausgaben. Bevorzugt werden Programme in Java. Lösungen in anderen gebräuchlichen Programmiersprachen werden auch akzeptiert, **wenn sie kommentiert, strukturiert und lesbar sind.** Ein Link zur Java-Online-Dokumentation und anderen hilfreichen Seiten sowie aktuelle Informationen zur Vorlesung sind auf der Vorlesungshomepage zu finden:

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss06/wt.html`

Die Lösungen der Übungsblätter können zu zweit abgegeben werden. Bitte die Namen **deutlich** schreiben!