Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
08.06.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 6

(Abgabe: Donnerstag, **22.06.2006**, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Ein Sensor zur Messung hoher Temperaturen zeigt im Mittel die wahre Temperatur an. Im Laufe der Nutzungsdauer verschlechtert sich jedoch die Anzeigegenauigkeit. Es sei Y_t die zufällige Abweichung der zum Zeitpunkt t angezeigten Temperatur von der tatsächlichen Temperatur. Statistische Untersuchungen haben gezeigt, dass $\{Y_t/\sqrt{\sigma^2}, t \geq 0\}$ gut durch einen Wiener-Prozess beschrieben wird, wobei $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y_1) = 0.01$ zu setzen ist.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Sensor zuerst $5°C$ zuviel anzeigt, bevor er $10°C$ zuwenig anzeigt.

Hinweis: Verwende $\mathbb{E}(Y_{T_{a,b}}) = 0$ ohne Beweis, wobei $T_{a,b} = \min\{T_a, T_b\}$ für $T_x = \inf\{t \geq 0 : Y_t = x\}, x \in \mathbb{R}$. (3)

(b) Nach welcher Zeit verlässt $\{Y_t\}$ im Mittel den Toleranzbereich $[-5°C, 5°C]$?

Hinweis: Verwende die Identität $\mathbb{E}(T_{a,b}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}(Y^2_{T_{a,b}})$ ohne Beweis. (3)

Aufgabe 2

Es seien $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess, $M_t = \max\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ für jedes $t \geq 0$, $a > 0$ und $T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$. Man kann zeigen, dass der Prozess $\{X^*_t, t \geq 0\}$ mit $X^*_t = X_t \mathbb{I}(t \leq T_a) + (2a - X_t)\mathbb{I}(t > T_a),\ t \geq 0$ wiederum ein Wiener-Prozess ist.

(a) Zeige, dass für alle $a > 0, y \geq 0$ gilt: (3)

$$P(X_t \leq a - y, M_t \geq a) = P(X_t > a + y).$$

(b) Zeige, dass für alle $a \geq 0, y \geq 0$ gilt: $P(M_t \geq a) = 2P(X_t \geq a)$. (2)

(c) Bestimme die Dichten von $T_a, a > 0$ und $M_t, t > 0$. (4)

Aufgabe 3

Es sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Berechne $P(X_1 < X_3 < X_2)$. (3)

Aufgabe 4

Schreibe ein Java-Programm zur Simulation eines Wiener–Prozesses im Intervall [0,1]. Verwende dabei die folgenden Algorithmen zur Approximation von X_t:

(1) $X_t^{(n)} = \sum_{k=1}^n Y_k S_k(t)$ mit $Y_k \sim N(0,1)$ i.i.d. und den Schauder-Funktionen $S_k(t), k = 1, ..., n$ beziehungsweise

(2) $\widetilde{X}_t^{(n)} = S_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\, Z_{\lfloor nt \rfloor + 1}/\sqrt{n}$ für $S_i = Z_1 + \ldots + Z_i$, wobei Z_i i.i.d Zufallsvariablen sind mit $P(Z_1 = 1) = P(Z_1 = -1) = 0.5$.

Führe die folgenden Teilaufgaben für beide Algorithmen getrennt aus und vergleiche die Ergebnisse.

(a) Simuliere 3 Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$ für $t \in [0,1]$ und zeichne diese in ein gemeinsames Schaubild. Betrachte hierbei die Stützstellen $t_k = k/n, k = 0, ..., n$ mit $n = 2^6, 2^7$ und $n = 2^8$.

(b) Bestimme aus 100 Simulationen mit $n = 2^8$, einen Schätzwert für den Erwartungswert und die Varianz des Maximums $M_1 = \max_{0 \le t \le 1} X_t$. Vergleiche die Werte mit den theoretischen Größen. (10)

Aufgabe 5

Der Abgabetermin von Aufgabe 5 auf Blatt 5 wurde auf den 22.06.06 verlegt. Bitte die Lösung dieser Aufgabe mit den Lösungen für Blatt 6 abgeben! (6)

Zur Erinnerung: Wie bei allen Programmieraufgaben ist auch hier folgendes zu beachten: Abzugeben ist ein Ausdruck des lesbar kommentierten Programmcodes *und* der (ggf. beispielhaften) Ausgaben. Bevorzugt werden Programme in Java. Lösungen in anderen gebräuchlichen Programmiersprachen werden auch akzeptiert, **wenn sie kommentiert, strukturiert und lesbar sind.** Ein Link zur Java-Online-Dokumentation und anderen hilfreichen Seiten sowie aktuelle Informationen zur Vorlesung sind auf der Vorlesungshomepage zu finden:

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss06/wt.html`

Die Lösungen der Übungsblätter können zu zweit abgegeben werden. Bitte die Namen **deutlich** schreiben!
Am 15.06.2006 finden wegen des Feiertages weder Vorlesung noch Übungen statt.