Prof. Dr. V. Schmidt | SS 2006
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf | 22.06.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 29.06.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Es sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Betrachte die folgenden Transformationen des Wiener–Prozesses:

- *Brownsche Brücke* $\{B_t, t \in [0,1]\}$ mit $B_t = X_t - tX_1$,
- *geometrische Brownsche Bewegung* $\{Y_t, t \geq 0\}$ mit $Y_t = e^{X_t}$,
- *Ornstein–Uhlenbeck–Prozess* $\{U_t, t \geq 0\}$ mit $U_t = e^{-t/2} X_{e^t}$.

(a) Welche der Prozesse $\{B_t\}, \{Y_t\}$ bzw. $\{U_t\}$ sind Gauss-Prozesse? (3)

(b) Bestimme jeweils die zugehörige Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion. (3)

Aufgabe 2

Gegeben sei eine reellwertige Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F und charakteristischer Funktion φ. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Falls X unbegrenzt teilbar ist, dann gilt $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (4)

Hinweis: Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(s)|^2 = 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$, falls $\varphi(s) = \big(\varphi_n(s)\big)^n$. Beachte weiter, dass $|\varphi_n(s)|^2$ wiederum eine charakteristische Funktion ist, und $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$ für $x > 0$ gilt.

(b) Es gelte P-fast sicher $|X| \leq c$ für ein $c < \infty$. Die Zufallsvariable X ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn X P-fast sicher konstant ist. (4)

Hinweis: Zeige $P(|X_{j,n}| \leq \frac{c}{n}) = 1$ für $\sum_{j=1}^n X_{j,n} \overset{d}{=} X$, und folgere $\operatorname{Var}(X) = 0$.

(c) Gib ein Beispiel (mit Begründung) für eine Verteilung an, die nicht unbegrenzt teilbar ist. (2)

Aufgabe 3

Zeige Theorem 3.1.:
Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess. Dann ist die Zufallsvariable X_t für jedes $t \geq 0$ unbegrenzt teilbar. (2)