

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 8

(Abgabe: Donnerstag, 06.07.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Zeige, dass die Summe von zwei unabhängigen Lévy-Prozessen wieder ein Lévy-Prozess ist, und gib die zugehörige Lévy-Charakteristik an. (6)

Aufgabe 2

Betrachte die folgende Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) = e^{\psi(t)} \quad , \quad \text{wobei} \quad \psi(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} (\cos(2^k t) - 1).$$

Zeige, dass $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung ist. (4)

Hinweis: Betrachte die Lévy-Chintschin-Darstellung mit Maß $\nu(\{\pm 2^k\}) = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X habe eine stabile Verteilung mit Stabilitätsfaktor α .

(a) Zeige, dass X unbegrenzt teilbar ist. (2)

Es gelte nun zusätzlich $X \stackrel{d}{=} -X$.

(b) Weise nach, dass $(\varphi_X(s))^n = \varphi_X(n^{1/\alpha}s)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$. (2)

(c) Zeige mit Hilfe von (b), dass $\varphi_X(s) = e^{-c_\alpha |s|^\alpha}$ gilt. (4)

(d) Widerlege mit Hilfe von (b), dass die Funktion $\varphi(t)$ aus Aufgabe 2 die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung ist. (2)

Vorlesungshomepage:

<http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss06/wt.html>