Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. J. Rumpf

SS 2006
06.07.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 9

(Abgabe: Donnerstag, 13.07.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Der Lévy-Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ sei ein Gamma-Prozess mit Parametern $b, p > 0$, das heißt, für jedes $t \geq 0$ gelte $X_t \sim \Gamma(b, pt)$. Zeige, dass $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Subordinator ist mit dem Laplace-Exponenten $\xi(u) = \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\, \nu(dy)$ für $\nu(dy) = p\, y^{-1} e^{-by} dy$, $y > 0$. (4)

Aufgabe 2

Zeige Theorem 3.6.: Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$\mathbb{E}\,|X| < \infty\,, \qquad \mathbb{E}\,|Y| < \infty\,, \qquad \mathbb{E}\,|XY| < \infty\,,$$

und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine beliebige Teil–σ–Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gilt

1. $\mathbb{E}\,(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}\,X$, $\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{F}) = X$,
2. $\mathbb{E}\,(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\,\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}\,(Y \mid \mathcal{G})$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$,
3. $\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}\,(Y \mid \mathcal{G})$, falls $X \leq Y$,
4. $\mathbb{E}\,(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G})$, falls Y eine $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$–messbare Zufallsvariable ist,
5. $\mathbb{E}\,\big(\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1\big) = \mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}_1)$, falls $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ Teil–σ–Algebren von $\mathcal{F}$ sind mit $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$,
6. $\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\,X$, falls die σ–Algebren $\mathcal{G}$ und $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unabhängig sind, d.h., falls $P(A \cap A') = P(A)P(A')$ für beliebige $A \in \mathcal{G}$ und $A' \in \sigma(X)$.
7. $\mathbb{E}\,\big(f(X) \mid \mathcal{G}\big) \geq f\big(\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G})\big)$, falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist, so dass $\mathbb{E}\,|f(X)| < \infty$. (10)

Aufgabe 3

Betrachte die Zufallsvariablen X und Y über dem W-Raum $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \frac{1}{2}\nu)$ mit $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. Bestimme für die folgenden Zufallsvariablen jeweils $\sigma(Y)$ und eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(X \,|\, Y)$.

(a) $Y(\omega) = \omega^5$, (3)

(b) $Y(\omega) = (-1)^k$ für $\omega \in [\frac{k-3}{2}, \frac{k-2}{2})$, $k = 1, \ldots, 4$, und $Y(1) = 1$. (3)