

Räumliche Statistik II

Übungsblatt 3

Präsentation der Lösungen: Freitag, 25.05.2007

Aufgabe 1

- (a) Sei $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, N ein (unmarkierter) Punktprozess und das Maß $\alpha : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert vermöge

$$\alpha(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{N}} \int_{B_1} \int_{B_2} f(x_1, x_2) (\varphi - \delta_{x_1})(dx_2) \varphi(dx_1) P_N(d\varphi).$$

Zeige, dass dann für jede messbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{B_1 \times B_2} g(x_1, x_2) \alpha(dx_1, dx_2) = \int_{\mathbb{N}} \int_{B_1} \int_{B_2} g(x_1, x_2) f(x_1, x_2) (\varphi - \delta_{x_1})(dx_2) \varphi(dx_1) P_N(d\varphi).$$

- (b) Sei $\{(S_n, L_n)\}$ ein stationärer und isotroper markierter Punktprozess mit nicht-leerem, endlichem Markenraum $\mathbb{L}$. Zeige, dass

$$\lambda_i \widehat{\lambda_j K_{ij}}(r) = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{I}_{(0,r)}(|S_{n_2} - S_{n_1}|) \mathbb{I}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2}) \mathbb{I}_{\{i\} \times \{j\}}(L_{n_1}, L_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}$$

für beliebige $r > 0$ und $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, so dass $\nu_d(W \cap (W + x)) > 0$ für jedes $x \in B(o, r)$, ein erwartungstreuer Schätzer für $\lambda_i \lambda_j K_{i,j}(r)$ ist.

Hinweis: Gehe analog zum Beweis von Theorem 4.18 vor und benutze Teil (a)

Aufgabe 2 Sei $\Delta = 1 - \sum_{i \in \mathbb{L}} \frac{\lambda_i^2}{\bar{\lambda}^2}$ der Diversitätsindex eines stationären markierten Punktprozesses $\{(S_n, L_n)\}$ mit Markenraum $\mathbb{L} = \{1, \dots, k\}$ und sei λ_i die Intensität der Punkte vom Typ i .

- (a) In welchem Intervall liegen die Werte von Δ ?
- (b) Gib ein Beispiel für $\{(S_n, L_n)\}$ an, so dass Δ bei festem k den kleinst- bzw. größtmöglichen Wert annimmt.
- (c) Sei $W_m = [-m, m]^d$, $m = 1, 2, \dots$ und $\{(S_n, L_n)\}$ ergodisch. Zeige, dass dann

$$\Delta_m = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{N_{W_m \times \{i\}}(N_{W_m \times \{i\}} - 1)}{N_{W_m \times \mathbb{L}}(N_{W_m \times \mathbb{L}} - 1)}$$

für $m \rightarrow \infty$ ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für Δ ist.

Aufgabe 3 Eine Gerade $\ell_{\theta,q} \subset \mathbb{R}^2$ kann wie folgt eindeutig mittels ihrer Orientierung $\theta \in [0, \pi)$ und ihres signierten Abstandes $q \in \mathbb{R}$ vom Ursprung beschrieben werden:

$$\ell_{\theta,q} = \{(x, y) : x \cos \theta + y \sin \theta = q\}.$$

Man sagt, dass $\{\ell_{\Theta_n, Q_n}\}$ ein Poissonscher Geradenprozess mit Intensität λ ist, wenn $\{(\Theta_n, Q_n)\}$ ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\lambda \nu_2(\cdot \cap ([0, \pi) \times \mathbb{R}))$ im Raum $[0, \pi) \times \mathbb{R}$ der Koordinatenpaare (θ, q) ist.

- (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und konvex, so dass $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Bestimme die Verteilung der Anzahl Z der Geraden eines Poissonschen Geradenprozesses, welche die Menge A schneiden.

Hinweis: Croftons Formel besagt, dass für $A \subset \mathbb{R}^2$ mit obigen Eigenschaften $\int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \#(\partial A \cap \ell_{\theta,q}) dq d\theta = 2\nu_1(\partial A)$, wobei $\#(\partial A \cap \ell_{\theta,q})$ die Anzahl der Schnittpunkte des Randes ∂A mit $\ell_{\theta,q}$ und $\nu_1(\partial A)$ die Randlänge bezeichnet.

- (b) Sei $s \subset \mathbb{R}^2$ ein Liniensegment und A wie oben, so dass $s \subset A$. Ferner sei $X = \ell_{\Theta, Q}$ eine zufällige Gerade wobei die Dichte $f : [0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ des Zufallsvektors (Θ, Q) gegeben sei durch

$$f(\theta, q) = \begin{cases} \frac{1}{\nu_1(\partial A)}, & \text{falls } \ell_{\theta,q} \cap A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass $P(X \cap S \neq \emptyset) = 2 \frac{\nu_1(s)}{\nu_1(\partial A)}$.

- (c) Seien A und X wie oben und $C \subset A$ eine rektifizierbare Kurve.

Zeige, dass $\mathbb{E} \#(X \cap C) = 2 \frac{\nu_1(C)}{\nu_1(\partial A)}$.

- (d) Zeige, dass die erwartete Anzahl der Schnittpunkte zwischen C und den Geraden des Poissonschen Geradenprozesses durch $2\lambda\nu_1(C)$ gegeben ist.