

Räumliche Statistik II

Übungsblatt 4

Präsentation der Lösungen: Freitag, 15.06.2007

Aufgabe 1 Ein homogener Gauß-Poisson-Prozess ist eine Überlagerung zweier Punktprozesse. Dabei wird zunächst ein homogener Poisson-Prozess $\{S_n^{(1)}\}$ mit Intensität λ realisiert. Anschließend wird für jeden Punkt $S_n^{(1)}$ in einer Folge unabhängiger Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ entschieden, ob ein Tochterpunkt $S_n^{(2)}$ erzeugt wird. Die Zufallsvariablen $S_n^{(2)}$ werden dann gleichverteilt auf $B(S_n^{(1)}, R)$ realisiert, wobei $R > 0$ konstant gewählt wird.

- (a) Schreibe ein Programm, das einen markierten Gauß-Poisson Prozess auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$ randeffektfrei realisiert. Die Markierung soll dabei auf zwei verschiedene Weisen vorgenommen werden können:
 - (i) Die Folge der Marken $\{L_m\}$ ist unabhängig und identisch verteilt auf $\{0, 1\}$ gemäß einer Verteilung $P(L_m = 0) = p_0$, $P(L_m = 1) = 1 - p_0$ für $p_0 \in [0, 1]$.
 - (ii) Elternpunkte bekommen die Marke 0, Tochterpunkte die Marke 1.
- (b) Visualisiere für beide Markierungsarten jeweils eine Realisierung des markierten Gauß-Poisson Prozesses mit den Parametern $\lambda = 0.0005$, $R = 10$ und $p = 0.8$ auf dem Fenster $W = [0, 500]^2$. Wähle im Falle der unabhängigen Markierung $p_0 = 0.5$.

Hinweis: Es ist sinnvoll, die Datenstruktur für die markierten Punktprozesse so zu wählen, dass für jede Marke i ein Array v_i angelegt wird, das die Punkte vom Typ i enthält. Ein markierter Punktprozess wird dann durch ein Array dieser v_i repräsentiert.

Aufgabe 2

- (a) Implementiere für $d = 2$ folgende Schätzer:
 - (i) für die bedingte K-Funktion $K_{ij}(r)$, $r > 0$ den Schätzer

$$\widehat{K_{ij}(r)} = \frac{\lambda_i \lambda_j \widehat{K_{ij}(r)}}{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}_j}, \text{ wobei}$$

$$\widehat{\lambda_i \lambda_j K_{ij}(r)} = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{I}_{(0, r)}(|S_{n_2} - S_{n_1}|) \mathbb{I}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2}) \mathbb{I}_{\{i\} \times \{j\}}(L_{n_1}, L_{n_2})}{\nu_2(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}$$

$$\text{und } \widehat{\lambda}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{W \times \{i\}}(S_n, L_n) / \nu_d(W),$$

(ii) für die bedingte L-Funktion $L_{ij}(r)$, $r > 0$ den Schätzer

$$\widehat{L}_{ij}(r) = \sqrt{\frac{\widehat{K}_{ij}(r)}{\pi}},$$

(iii) und für die bedingte Paarkorrelationsfunktion den Schätzer $\widehat{g^{ij}}(r) = \frac{\widehat{\rho_2^{ij}}(r)}{\widehat{\lambda_i \lambda_j}}$, $r \geq 0$, wobei

$$\widehat{\rho_2^{ij}}(r) = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{k(|S_{n_2} - S_{n_1}| - r) \mathbb{I}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2}) \mathbb{I}_{\{i\} \times \{j\}}(L_{n_1}, L_{n_2})}{2\pi r \nu_2(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}$$

und die Kernfunktion $k(t)$ wie folgt gewählt wird:

$$k(t) = \frac{1}{2h} \mathbb{I}_{[-h, h]}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) Visualisiere für beide Markierungsarten aus Aufgabe 1 die Schätzungen der modifizierten L-Funktionen $L_{ij}(r) - r$ und der Paarkorrelationsfunktionen $g_{ij}(r)$ für $i, j \in \{0, 1\}$ und $r \in \{0.5, 1, 1.5, \dots, 200\}$. Als Bandbreite h des Kernschätzers $k(t)$ wird in der Literatur $h = \frac{0.15}{\sqrt{\lambda_i}}$ empfohlen. Interpretiere die Resultate.

Aufgabe 3

- (a) Bestimme für den unabhängig markierten Gauß-Poisson-Prozess aus Aufgabe 1 mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulation Konfidenzintervalle zum Niveau 0.96 für $L_{0,1}(r)$ bzw. $g^{0,1}(r)$, wobei $r \in \{1, 2, \dots, 35\}$. Lege der Berechnung 1000 Realisierungen zugrunde.
- (b) Teste für 1000 Realisierungen des abhängig markierten Prozesses aus Aufgabe 1 mit Hilfe der Konfidenzintervalle für $g^{0,1}(r)$ bzw. $L_{0,1}(r)$, ob unabhängige Markierung vorliegt. Dabei soll die Hypothese abgelehnt werden, sobald der Schätzer für $g^{0,1}(r)$ bzw. $L_{0,1}(r)$ außerhalb eines der Konfidenzintervalle aus (a) liegt. Wie hoch ist die relative Häufigkeit der Fälle, in denen die Hypothese nicht abgelehnt wird?
- (c) Wie verändert sich die Fehlerwahrscheinlichkeit in (b), wenn der Gauß-Poisson-Prozess mit Parameter $R = 100$ realisiert wird?

Aufgabe 4

- (a) Implementiere folgende Schätzer für den Diversitätsindex Δ bzw. seine abstandsabhängigen Verallgemeinerungen $\Delta_g(r)$ und $\Delta_K(r)$ auf dem Markenraum $\mathbb{L} = \{1, \dots, n\}$, wobei $W \subset \mathbb{R}^2$ ein rechteckiges Beobachtungsfenster ist:

(i)

$$\widehat{\Delta} = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{\lambda}_i(\widehat{\lambda}_i - 1)}{\widehat{\lambda}(\widehat{\lambda} - 1)},$$

wobei $\widehat{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{W \times \mathbb{L}}(S_n, L_n) / \nu_2(W)$.

(ii) $\widehat{\Delta_K(r)} = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{\lambda_i^2 K_{ii}(r)}}{\widehat{\lambda^2 K(r)}}$, wobei

$$\widehat{\lambda^2 K(r)} = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{I}_{B(o,r)}(|S_{n_2} - S_{n_1}|) \mathbb{I}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_2(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}.$$

(iii) $\widehat{\Delta_g(r)} = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{\hat{\lambda}_i^2 \rho_2^{ii}(r)}}{\widehat{\hat{\lambda}^2 \rho_2(r)}}$, wobei

$$\widehat{\rho_2(r)} = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{k(|S_{n_2} - S_{n_1}| - r) \mathbb{I}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{2\pi r \nu_2(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}.$$

Alle nicht angegebenen Größen sind wie in Aufgabe 2 spezifiziert.

- (b) Visualisiere die Schätzungen für Δ basierend auf jeweils einer Realisierung für den Gauss-Poisson Prozess aus Aufgabe 1 im abhängig und im unabhängig markierten Fall. Im abhängig markierten Fall soll der Parameter p dabei die Werte $0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ durchlaufen, während im unabhängig markierten Fall der Parameter p_0 in gleicher Weise variiert werden soll.
- (c) Untersuche durch Visualisierung von Simulationsergebnissen, wie sich die abstandsabhängigen Varianten $\Delta_K(r)$ und $\Delta_g(r)$ als Funktionen von $r > 0$ bei gleicher Variation der Parameter wie in (b) verhalten.