Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

SS 2007
15.06.2007

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 5

Präsentation der Lösungen: Freitag, 29.06.2007

Aufgabe 1 Sei A eine nichtleere Menge. Dann heißt eine Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen von A Basis, wenn folgendes gilt:

(i) Für jedes $x \in A$ existiert ein Basiselement $B \in \mathcal{B}$, so dass $x \in B$.

(ii) Falls $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$, dann gibt es ein Basiselement $B_3 \in \mathcal{B}$, so dass $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(a) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis. Die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie $\mathcal{G}$ ist dann wie folgt definiert: Eine Teilmenge $U \subset A$ heißt offen, es gilt also $U \in \mathcal{G}$, wenn es für jedes $x \in U$ ein Basiselement $B \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $x \in B \subset U$. Zeige, dass $\mathcal{G}$ eine Topologie ist, d.h.

  (i) $\emptyset$, $A \in \mathcal{G}$,

  (ii) $\mathcal{G}$ ist abgeschlossen bezüglich beliebiger Vereinigungen,

  (iii) $\mathcal{G}$ ist abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte.

(b) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{G}$ auf A. Zeige, dass $\mathcal{G}$ dann die Familie aller Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.

(c) Sei $(A, \mathcal{G})$ ein topologischer Raum. Sei ferner $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ eine Familie von offenen Mengen, so dass für jede offene Menge $U \subset A$ und jedes $x \in U$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ existiert, so dass $x \in B \subset U$. Zeige, dass dann $\mathcal{A}$ eine Basis für die Topologie $\mathcal{G}$ ist.

Aufgabe 2

(a) Betrachte zwei Topologien $\mathcal{G}$ und $\tilde{\mathcal{G}}$ auf einer Menge A. Dann heißt $\tilde{\mathcal{G}}$ feiner als $\mathcal{G}$, wenn $\tilde{\mathcal{G}} \supset \mathcal{G}$. Seien nun $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ Basen für $\mathcal{G}$ bzw. $\tilde{\mathcal{G}}$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

  (i) $\tilde{\mathcal{G}}$ ist feiner als $\mathcal{G}$

  (ii) Für jedes $x \in A$ und jedes $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ gibt es ein Basiselement $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$, so dass $x \in \tilde{B} \subset B$.

(b) Sei $\mathcal{D}$ das System von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, das alle offenen Kugeln mit rationalen Mittelpunkten und Radien und die leere Menge enthält. Zeige, dass

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\mathcal{F}^{\mathrm{cl}\, B'_1 \cup \ldots \cup \mathrm{cl}\, B'_m}_{B_1,\ldots,B_k} : \ B_1, \ldots, B_k, B'_1, \ldots, B'_m \in \mathcal{D},\ k \geq 0,\, m > 1\}$$

eine abzählbare Basis für die Fell-Topologie ist.

Aufgabe 3 Zeige, dass die Schnitt-σ-Algebra $\sigma(\{\mathcal{F}^C : \ C \in \mathcal{C}\})$ auf dem Raum $\mathcal{F}$ der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit der Borel-σ-Algebra $\sigma(\mathcal{G})$ übereinstimmt, die von den Elementen der Fell-Topologie $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{F}$ erzeugt wird.

Aufgabe 4 Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen eines metrischen Raumes (A, ρ) heißt Cauchy-Folge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.
Zeige, dass der Raum $\mathcal{C}$ der kompakten Mengen mit der Hausdorff-Metrik

$$\rho(C_1, C_2) = \min\{\varepsilon : \ C_1 \subset C_2 \oplus b(o, \varepsilon) \text{ und } C_2 \subset C_1 \oplus b(o, \varepsilon)\}$$

vollständig ist, das heißt, dass jede Cauchy-Folge $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Mengen gegen einen Grenzwert in $\mathcal{C}$ konvergiert.