Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

SS 2007
29.06.2007

# Räumliche Statistik II
## Übungsblatt 6

Präsentation der Lösungen: Freitag, 13.07.2007

**Aufgabe 1**

(a) Seien $X_1 \ldots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ Zufallsvektoren.
Zeige, dass $\Xi = conv\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine zufällige kompakte Menge ist.

(b) Sei $\{\xi_t : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und stetigen Trajektorien. Das heißt insbesondere, dass die Abbildungen $\xi_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $t \geq 0$ Borel-messbar sind.
Zeige, dass $\Xi = \{t \geq 0 : \xi_t = 0\}$ eine zufällige abgeschlossene Menge ist.
Hinweis: Benutze, dass eine Abbildung $\Xi : \Omega \longrightarrow \mathcal{F}$ in den Raum der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ genau dann messbar ist, wenn $\{\omega : \Xi(\omega) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ für alle offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^d$.

**Aufgabe 2**

(a) Zeige, dass jede nichtleere stationäre zufällige abgeschlossene Menge $\Xi$ fast sicher unbeschränkt ist.

(b) Sei $\Xi$ eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge, so dass $T_\Xi(\{o\}) = 1$, wobei $T_\Xi(C) = P(\Xi \cap C \neq \emptyset)$ für $C \in \mathcal{C}$ das Kapazitätsfunktional bezeichnet. Zeige, dass dann $P(\Xi = \mathbb{R}^d) = 1$.

**Aufgabe 3**

(a) Sei $\mu$ ein lokal endliches und diffuses Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Welche zufällige abgeschlossene Menge $\Xi$ hat das Kapazitätsfunktional $T_\Xi(K) = 1 - e^{-\mu(K)}$?

(b) Sei $Y$ eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechne das Kapazitätsfunktional der zufälligen abgeschlossenen Menge $\Xi = \{x : f(x) \geq Y\}$, wobei $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine stetige Funktion ist.

(c) Sei $N$ ein einfaches und lokal endliches zufälliges Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass die Verteilung von $N$ vollständig durch die Leerwahrscheinlichkeiten $P(N_C = 0)$, $C \in \mathcal{C}$, bestimmt ist.

**Aufgabe 4** Sei $\Xi$ eine beliebige zufällige abgeschlossene Menge.

(a) Zeige die folgende Konkavitätseigenschaft des Kapazitätsfunktionals $T_\Xi$:

$$T_\Xi(K_1 \cap K_2) + T_\Xi(K_1 \cup K_2) \leq T_\Xi(K_1) + T_\Xi(K_2), \ \forall K_1, K_2 \in \mathcal{C}.$$

(b) Zeige, dass $\Xi$ genau dann fast sicher konvex ist, wenn

$$T_\Xi(K_1 \cap K_2) + T_\Xi(K_1 \cup K_2) = T_\Xi(K_1) + T_\Xi(K_2)$$

für alle konvexen und kompakten Mengen $K_1,\ K_2 \subset \mathbb{R}^d$, deren Vereinigung $K_1 \cup K_2$ ebenfalls konvex ist.