

Einführung in Punktprozesse und ihre Charakteristiken

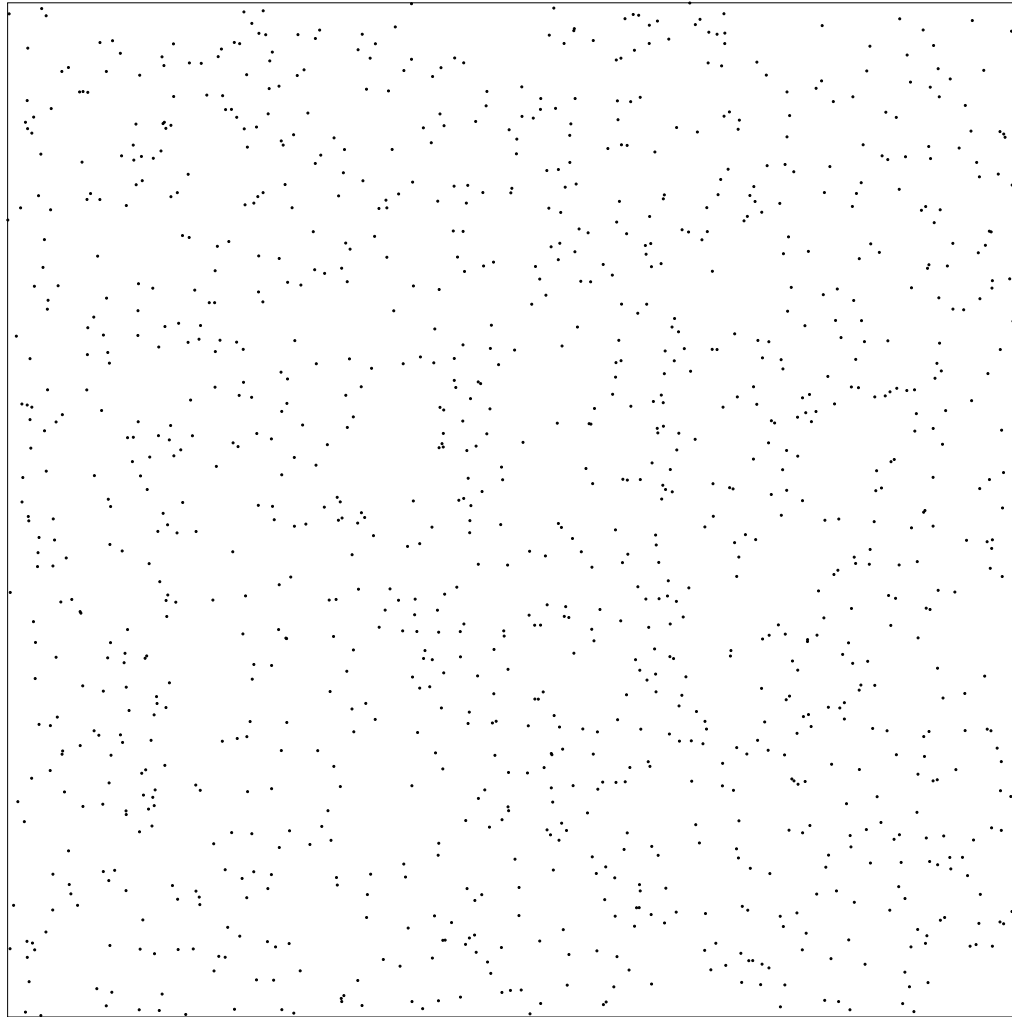
Ralf Thiedmann

rthied@mathematik.uni-ulm.de

Seminar „Bildanalyse und Simulation mit Java“ im WS 2003/2004
Universität Ulm

Beispiel

Poissonprozess



Gliederung

1. Einführung in Punktprozesse

Gliederung

1. Einführung in Punktprozesse
2. Beispiele für Punktprozesse
 - Poissonprozess
 - Clusterprozess
 - Hard-Core Prozess

Gliederung

1. Einführung in Punktprozesse
2. Beispiele für Punktprozesse
 - Poissonprozess
 - Clusterprozess
 - Hard-Core Prozess
3. Eigenschaften von Punktprozessen
 - Kontaktverteilungsfunktion
 - Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion
 - Ripley's K-Funktion
 - Paarkorrelationsfunktion

Definitionen

Punktprozess

Φ heißt (zufälliger) **Punktprozess** im \mathbb{R}^2 , wenn Φ eine Zufallsvariable aus dem meßbaren Raum $[\mathbb{N}, \mathcal{N}]$ ist, wobei \mathbb{N} die Menge aller Folgen φ aus \mathbb{R}^2 ist, für die gilt:

1. φ ist lokal endlich
2. φ ist einfach (d.h. $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$)

Definitionen

Punktprozess

Φ heißt (zufälliger) **Punktprozess** im \mathbb{R}^2 , wenn Φ eine Zufallsvariable aus dem meßbaren Raum $[\mathbb{N}, \mathcal{N}]$ ist, wobei \mathbb{N} die Menge aller Folgen φ aus \mathbb{R}^2 ist, für die gilt:

1. φ ist lokal endlich
2. φ ist einfach (d.h. $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$)

Punkteanzahl

$$\Phi(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_B(X_n) < \infty, \quad B \in \mathbb{R}^2$$

Definitionen

Verteilung

- P_Φ heißt **Verteilung** des Punktprozesses Φ , wenn

$$P_\Phi(Y) = \mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in Y\}),$$

wobei $Y \in \mathcal{N}$

Definitionen

Stationarität , Isotropie

- Φ heißt **stationär (homogen)**, wenn

$$\mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\Phi_x \in Y) \quad \forall Y \in \mathcal{N}$$

wobei $\Phi_x = \{x + y : y \in \Phi\}$

Definitionen

Stationarität, Isotropie

- Φ heißt **stationär (homogen)**, wenn

$$\mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\Phi_x \in Y) \quad \forall Y \in \mathcal{N}$$

wobei $\Phi_x = \{x + y : y \in \Phi\}$

- Φ heißt **isotrop**, wenn

$$\mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(R_\alpha \Phi \in Y) \quad \forall Y \in \mathcal{N}$$

wobei R_α eine Drehung um den Ursprung mit Winkel α ist

Definitionen

Stationarität, Isotropie

- Φ heißt **stationär (homogen)**, wenn

$$\mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\Phi_x \in Y) \quad \forall Y \in \mathcal{N}$$

wobei $\Phi_x = \{x + y : y \in \Phi\}$

- Φ heißt **isotrop**, wenn

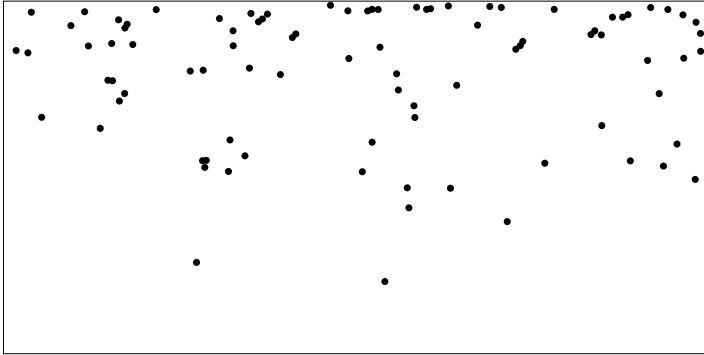
$$\mathbb{P}(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(R_\alpha \Phi \in Y) \quad \forall Y \in \mathcal{N}$$

wobei R_α eine Drehung um den Ursprung mit Winkel α ist

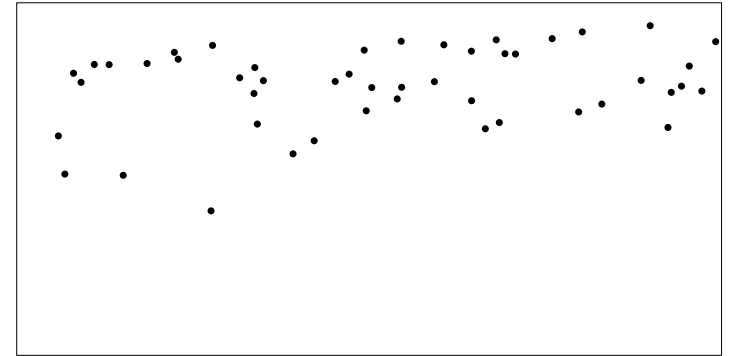
- Ein homogener und isotroper Punktprozess heißt **bewegungsinvariant**

Definitionen

Stationarität



Fichtenwurzeln



Buchenwurzeln

Definitionen

Intensitätsmaß

- **Intensitätsmaß** Λ

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}(\Phi(B)) = \int \varphi(B) P(d\varphi) \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Definitionen

Intensitätsmaß

- **Intensitätsmaß** Λ

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}(\Phi(B)) = \int \varphi(B) P(d\varphi) \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

- oft existiert eine Intensitätsfunktion $\lambda(x)$, dann gilt

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) \mathbf{d}x \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Definitionen

Intensitätsmaß

- **Intensitätsmaß** Λ

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}(\Phi(B)) = \int \varphi(B) P(d\varphi) \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

- oft existiert eine Intensitätsfunktion $\lambda(x)$, dann gilt

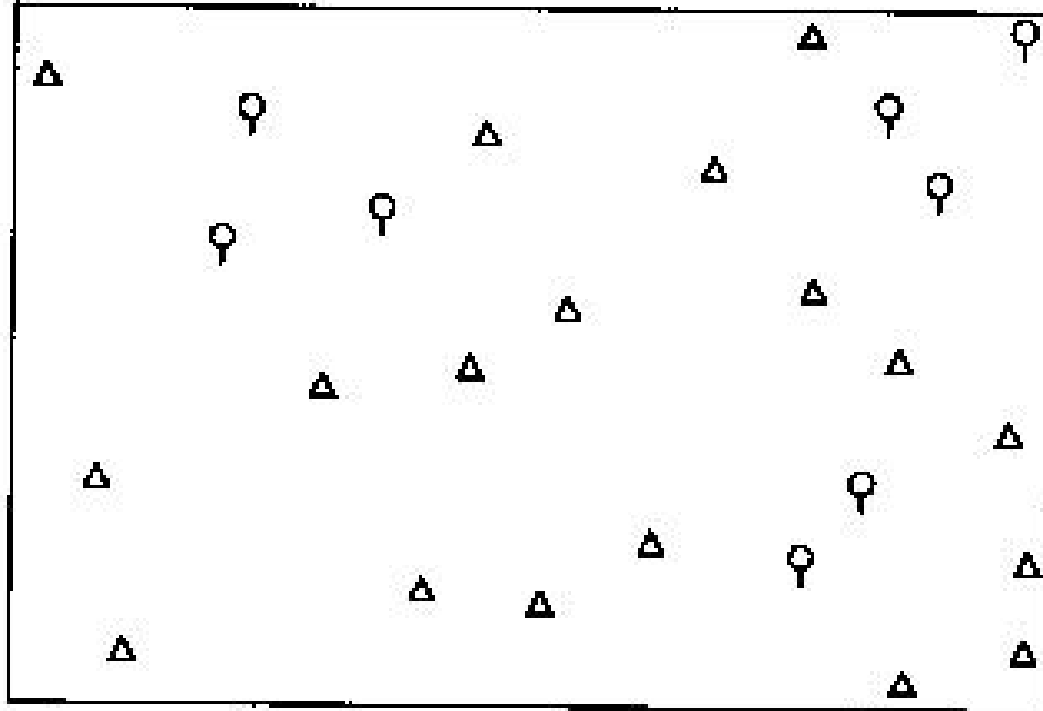
$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) \mathbf{d}x \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

- für homogene Punktprozesse gilt $\lambda(x) = \lambda$ und somit

$$\Lambda(B) = \lambda |B|$$

Definitionen

Markierte Punktprozesse



Definitionen

Markierte Punktprozesse

- $\Phi = \{X_n\}$ ein Punktprozess
- $\{M_1, M_2, \dots\}$ eine Folge von ZV, die nach K abbildet, wobei K ein polnischer Raum ist

Φ_M heißt **Markierter Punktprozess**, wenn

$$\Phi_M = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi\}$$

Beispiele

Poissonprozess

Sei Λ ein diffuses und lokalendliches Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Dann heißt Φ auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ **Poissonprozess** mit Intensitätsmaß Λ , falls gilt :

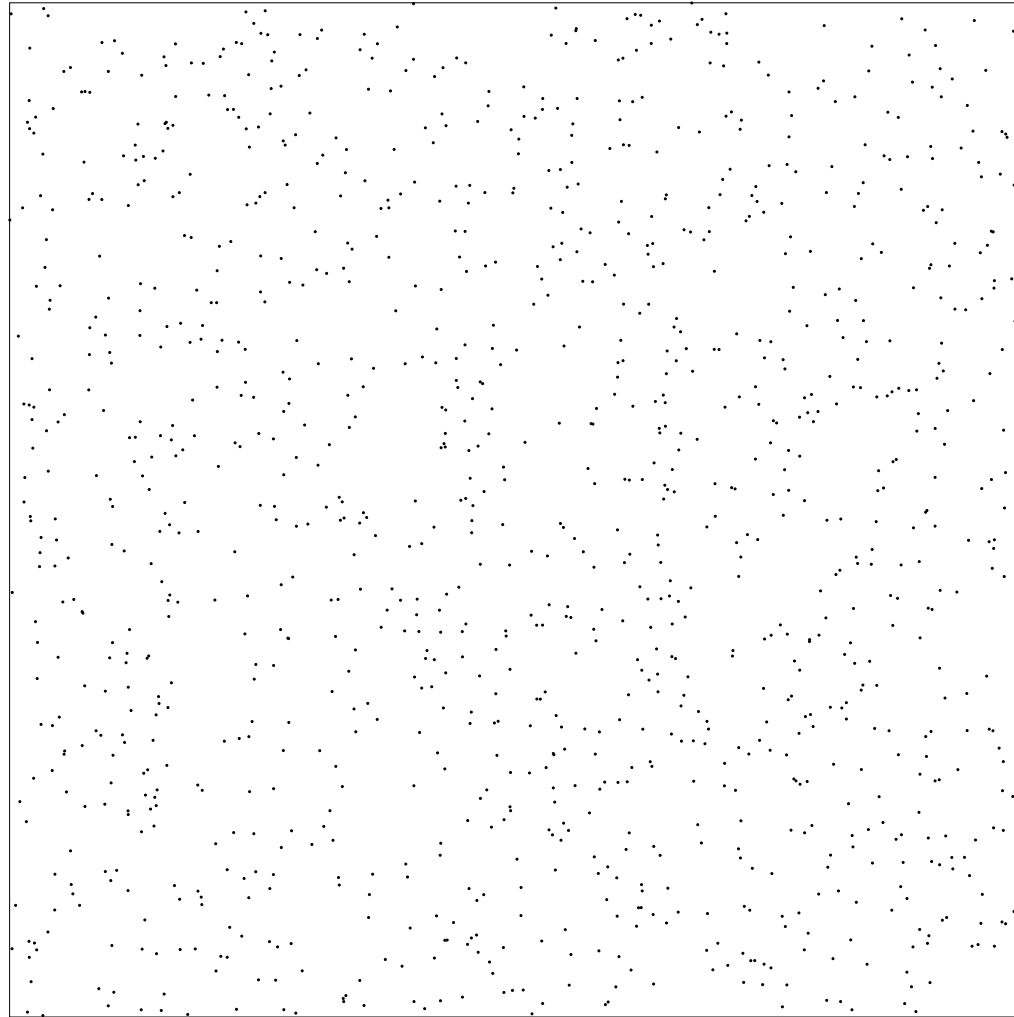
- für $k \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ sind die Zufallsgrößen $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$ stochastisch unabhängig, und
- $\Phi(B)$ ist poissonverteilt mit Parameter $\Lambda(B)$, d.h

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = k) = \frac{(\Lambda(B))^k}{k!} \exp(-\Lambda(B)), \quad k = 0, 1, \dots$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, B beschränkt,

Beispiele

Poissonprozess



Beispiele

Konstruktion von Modellen

Man kann Modelle auf drei Arten konstruieren:

- durch **Ausdünnung**
- durch **Clustering**
- durch **Superposition**

t-Ausdünnung

- Erzeuge aus einem stationären Poissonprozess Φ_P einen markierten Punktprozess Φ_M mit

$$\Phi_M = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_P\},$$

wobei $M_n \sim U(0, 1)$

t-Ausdünnung

- Erzeuge aus einem stationären Poissonprozess Φ_P einen markierten Punktprozess Φ_M mit

$$\Phi_M = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_P\},$$

wobei $M_n \sim U(0, 1)$

- Der neue Prozess $\tilde{\Phi}$ ergibt sich dann mit

$$\tilde{\Phi} = \{X_n \in \Phi_P : M_n < t\}, \quad t \in (0, 1)$$

t-Ausdünnung

- Erzeuge aus einem stationären Poissonprozess Φ_P einen markierten Punktprozess Φ_M mit

$$\Phi_M = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_P\},$$

wobei $M_n \sim U(0, 1)$

- Der neue Prozess $\tilde{\Phi}$ ergibt sich dann mit

$$\tilde{\Phi} = \{X_n \in \Phi_P : M_n < t\}, \quad t \in (0, 1)$$

- $\tilde{\Phi}$ ist dann wieder ein Poissonprozess mit Intensität $\tilde{\lambda}$, wobei

$$\tilde{\lambda} = \lambda_P t$$

- **Clustering**

Man nehme einen Vaterpunktprozess Φ_P und bildet um jeden Punkt $X_n \in \Phi_P$ einen neuen Punktprozess Φ_{X_n}

$$\Phi = \bigcup_{X_n \in \Phi_P} \Phi_{X_n}$$

- **Clustering**

Man nehme einen Vaterpunktprozess Φ_P und bildet um jeden Punkt $X_n \in \Phi_P$ einen neuen Punktprozess Φ_{X_n}

$$\Phi = \bigcup_{X_n \in \Phi_P} \Phi_{X_n}$$

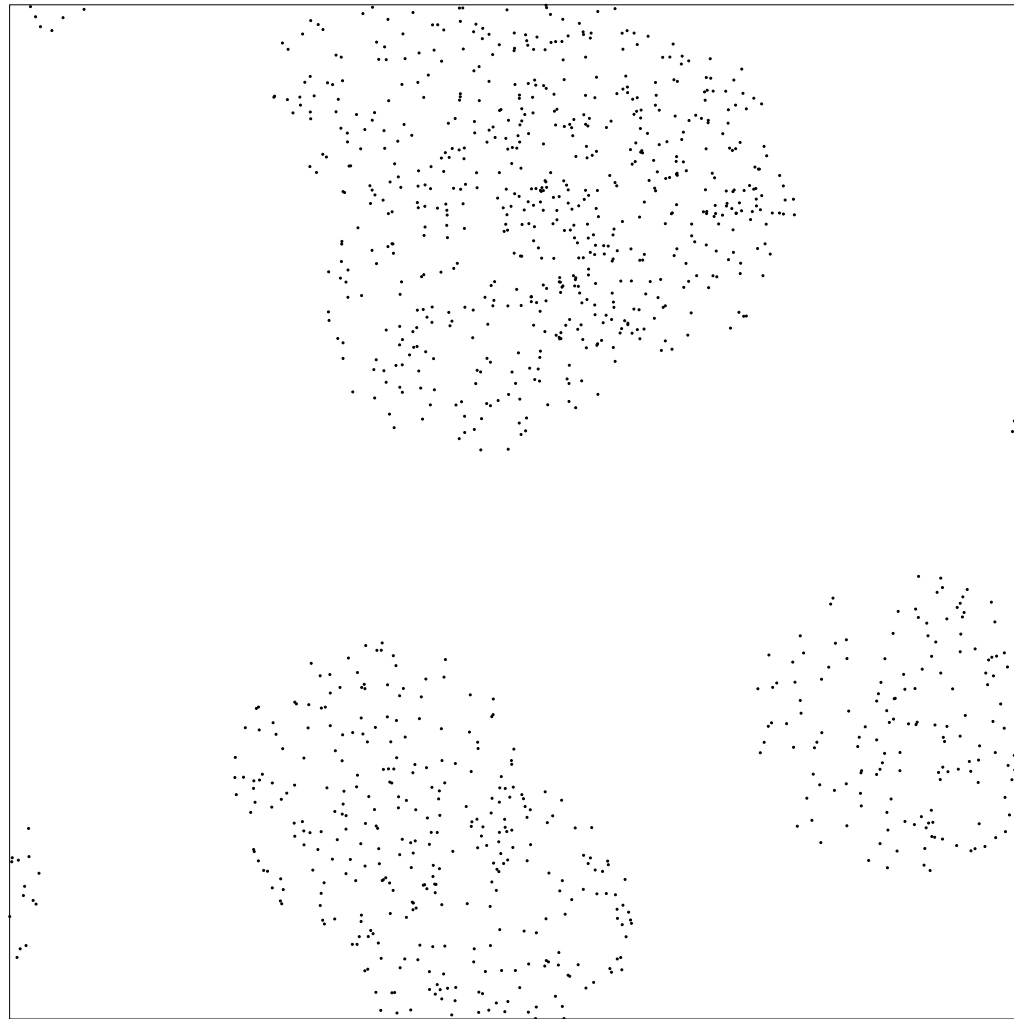
- **Superposition**

Seien Φ_1 und Φ_2 zwei Punktprozesse.

$$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$$

Beispiele

Cluster-Prozess



Modellbeschreibung von Neyman-Scott-Feldern (N-S-F)

- Basis ist ein homogener Poissonprozess Φ_P mit Intensität λ_P (sog. Vaterprozess)
- Um jeden Punkt $X_n \in \Phi_P$ wird nach dem selben Schema ein Tochterpunktprozess Φ_{X_n} erzeugt, wobei die Verteilung von Φ_{X_n} für alle $X_n \in \Phi_P$ identisch ist.
- Bei N-S-F werden nun nur die Tochterpunktprozesse ohne den Vaterprozess betrachtet.

Beispiele

Cluster-Prozess

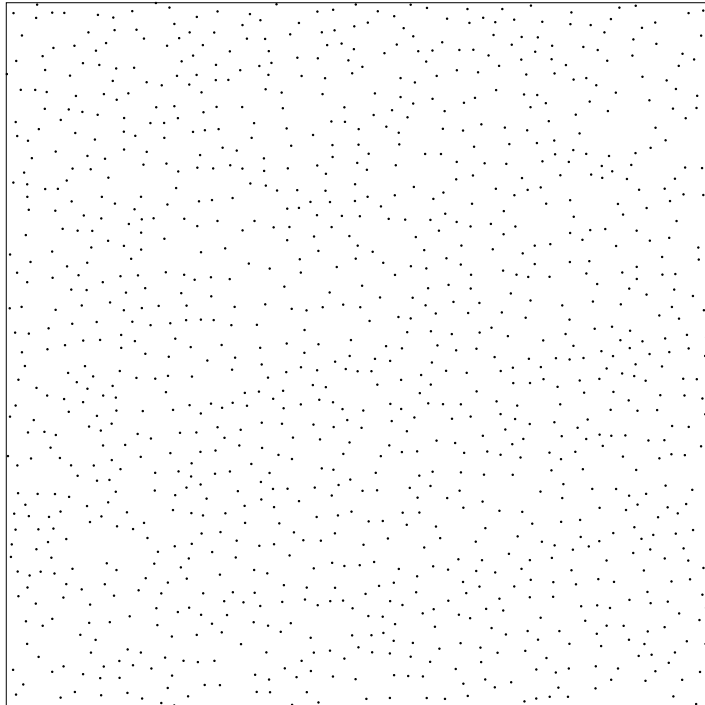
Für bewegungsinvariante N-S-F gilt

$$\lambda = \lambda_P \bar{c}$$

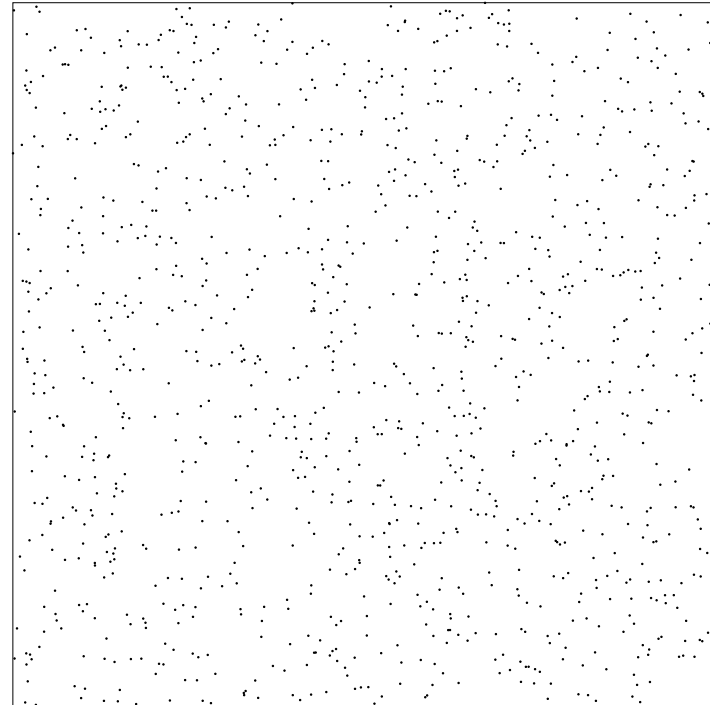
wobei \bar{c} = erwartete Anzahl von Punkten pro Cluster

Beispiele

Hard-Core-Prozess



Hard-Core-Prozess



Poissonprozess

Beispiele

Hard-Core-Prozess

Modellbeschreibung

- Basis ist ein Punktprozess Φ_P mit Intensität λ_P
- Dann Ausdünnung von Φ_P bis jeder Punkt $X_n \in \Phi_P$ einen Mindestabstand zum nächsten Punkt überschreitet.

Ausdünnung am Beispiel des Matérn-Hard-Core-Prozess

- Erzeuge aus einem homogenem Poissonprozess Φ_P mit Intensität λ_P einen markierten Punktprozess Φ_M mit

$$\Phi_M = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_P\},$$

wobei $M_n \sim U(0, 1)$

Ausdünnung am Beispiel des Matérn-Hard-Core-Prozess

- Erzeuge aus einem homogenem Poissonprozess Φ_P mit Intensität λ_P einen markierten Punktprozess Φ_M mit

$$\Phi_M = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_P\},$$

wobei $M_n \sim U(0, 1)$

- Dann ergibt sich für $h \geq 0$ der Matérn-Hard-Core-Prozess Φ mit

$$\Phi = \{X_n \in \Phi_P : M_n < M_m \forall X_m \in \Phi_P \cap b(X_n, h) \setminus \{X_n\}\}$$

Beispiele

Hard-Core-Prozess

Für den Matérn-Hard-Core-Prozess gilt

$$\lambda = p\lambda_P$$

Für den Matérn-Hard-Core-Prozess gilt

$$\lambda = p\lambda_P$$

mit

$$p = \int_0^1 r(t) dt = \frac{1 - \exp(-\lambda_P \pi h^2)}{\lambda_P \pi h^2}$$

wobei $r(t) = \exp(-\lambda_P t \pi h^2)$

Beispiele

Hard-Core-Prozess

Für den Matérn-Hard-Core-Prozess gilt

$$\lambda = p\lambda_P$$

mit

$$p = \int_0^1 r(t) dt = \frac{1 - \exp(-\lambda_P \pi h^2)}{\lambda_P \pi h^2}$$

wobei $r(t) = \exp(-\lambda_P t \pi h^2)$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1 - \exp(-\lambda_P \pi h^2)}{\pi h^2}$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Kontaktverteilungsfunktion

- **Kontaktverteilungsfunktion** $H_B(r)$

$$H_B(r) = 1 - \mathbb{P}(\Phi(rB) = 0)$$

mit $r \geq 0, B \in \mathbb{R}^2$ kompakt mit $|B| > 0$

Eigenschaften von Punktprozessen

Kontaktverteilungsfunktion

- **Kontaktverteilungsfunktion** $H_B(r)$

$$H_B(r) = 1 - \mathbb{P}(\Phi(rB) = 0)$$

mit $r \geq 0, B \in \mathbb{R}^2$ kompakt mit $|B| > 0$

- **Sphärische-Kontakt-Verteilungsfunktion** $H_S(r)$

$$H_S(r) = 1 - \mathbb{P}(\Phi(b(0, r)) = 0), \quad r \geq 0$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Kontaktverteilungsfunktion

- **Kontaktverteilungsfunktion** $H_B(r)$

$$H_B(r) = 1 - \mathbb{P}(\Phi(rB) = 0)$$

mit $r \geq 0, B \in \mathbb{R}^2$ kompakt mit $|B| > 0$

- **Sphärische-Kontakt-Verteilungsfunktion** $H_S(r)$

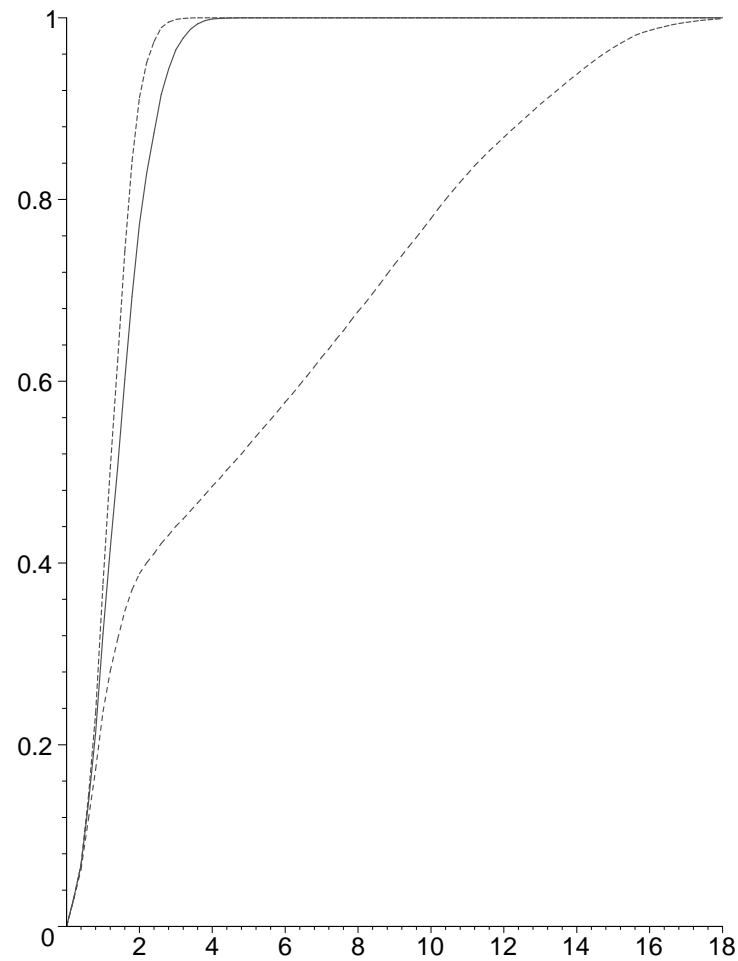
$$H_S(r) = 1 - \mathbb{P}(\Phi(b(0, r)) = 0), \quad r \geq 0$$

- Für den homogenen Poissonpunktprozess gilt

$$H_S(r) = 1 - e^{-\lambda\pi r^2}, \quad r \geq 0$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Kontaktverteilungsfunktion



Eigenschaften von Punktprozessen

Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion

- Sei Φ_M ein markierter Punktprozess, bei welchem die Markierung den Abstand zum nächsten Nachbarpunkt aus Φ_M angibt.
 - ◊ $\Phi_r = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_M, M_n \leq r\}$
 - ◊ $\lambda(r)$ ist die Intensität von Φ_r

Eigenschaften von Punktprozessen

Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion

- Sei Φ_M ein markierter Punktprozess, bei welchem die Markierung den Abstand zum nächsten Nachbarpunkt aus Φ_M angibt.
 - ◊ $\Phi_r = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_M, M_n \leq r\}$
 - ◊ $\lambda(r)$ ist die Intensität von Φ_r
- **Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion**

$$D(r) = \frac{\lambda(r)}{\lambda} = 1 - \mathbb{P}(\Phi(b(x, r)) = 1 || x) \quad x \in \Phi$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion

- Sei Φ_M ein markierter Punktprozess, bei welchem die Markierung den Abstand zum nächsten Nachbarpunkt aus Φ_M angibt.
 - ◊ $\Phi_r = \{(X_n, M_n) : X_n \in \Phi_M, M_n \leq r\}$
 - ◊ $\lambda(r)$ ist die Intensität von Φ_r
- **Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion**

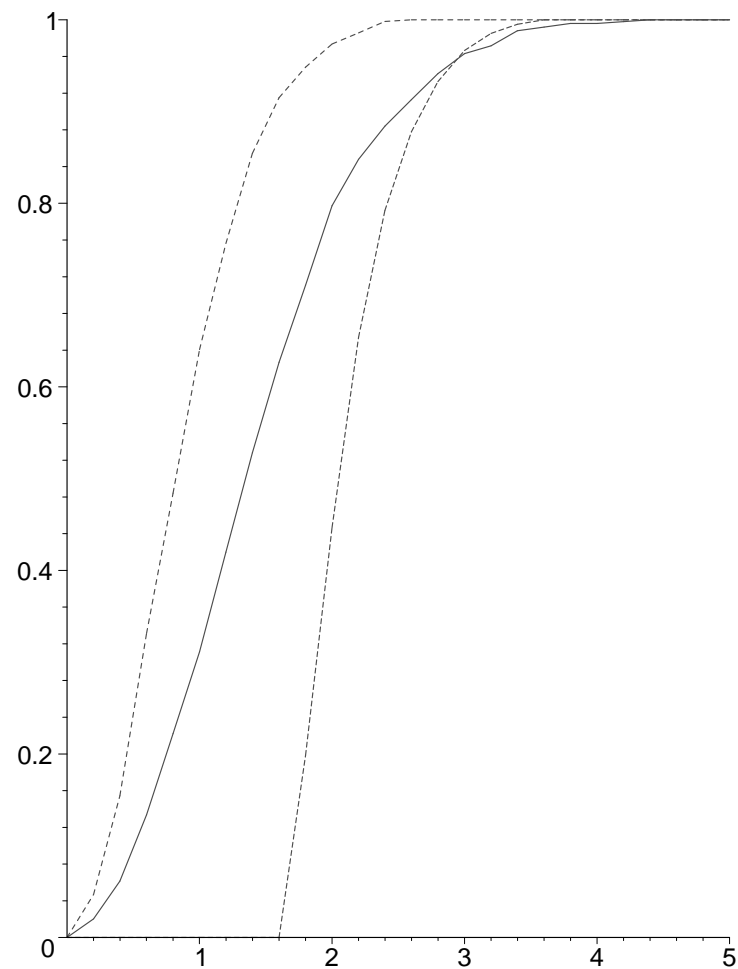
$$D(r) = \frac{\lambda(r)}{\lambda} = 1 - \mathbb{P}(\Phi(b(x, r)) = 1 || x) \quad x \in \Phi$$

- Für den homogenen Poissonprozess gilt

$$D(r) = 1 - e^{-\lambda\pi r^2}, \quad r \geq 0$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion



Eigenschaften von Punktprozessen

J-Funktion

- **J-Funktion**

$$J(r) := \frac{1 - D(r)}{1 - H_S(r)}, \quad \forall r \geq 0 \text{ mit } H_S(r) < 1$$

Eigenschaften von Punktprozessen

J-Funktion

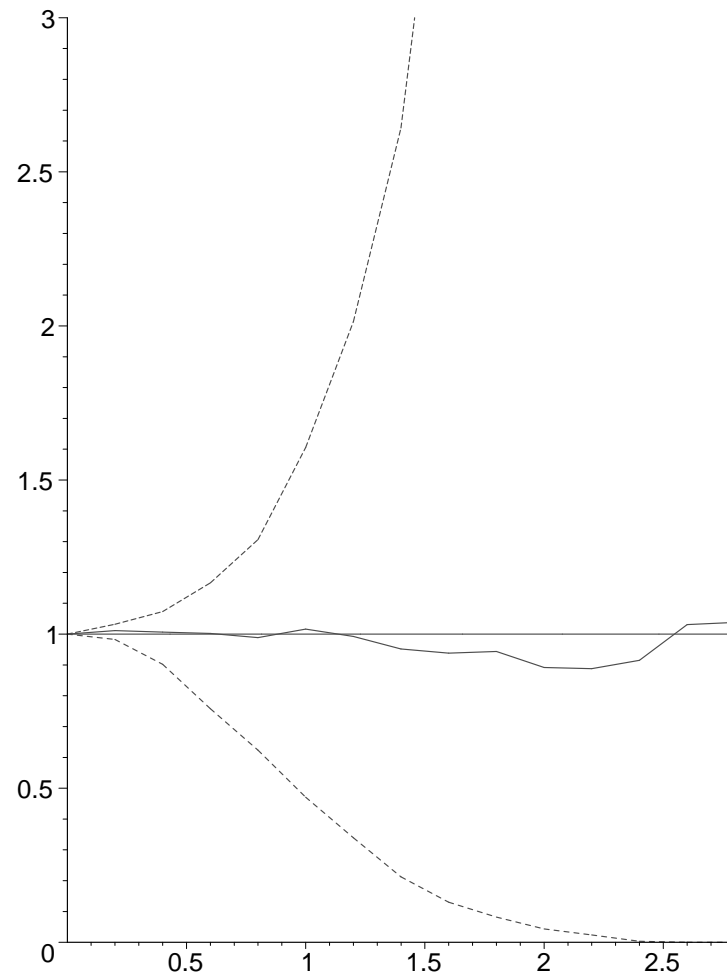
- **J-Funktion**

$$J(r) := \frac{1 - D(r)}{1 - H_S(r)}, \quad \forall r \geq 0 \text{ mit } H_S(r) < 1$$

- Für den homogene Poissonprozesse gilt: $J(r) \equiv 1$

Eigenschaften von Punktprozessen

J-Funktion



Eigenschaften von Punktprozessen

Ripley's K-Funktion

- Ripley's K-Funktion

$$\lambda K(r) = \mathbb{E}(\Phi(b(0, r)) \setminus \{0\} \mid 0), \quad r \geq 0$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Ripley's K -Funktion

- Ripley's K -Funktion

$$\lambda K(r) = \mathbb{E}(\Phi(b(0, r)) \setminus \{0\} | 0), \quad r \geq 0$$

- Für den homogenen Poissonprozess gilt :

$$\lambda K(r) = \lambda \pi r^2$$

Eigenschaften von Punktprozessen

L-Funktion

- L-Funktion

$$L(r) = \sqrt{\frac{K(r)}{\pi}}$$

Eigenschaften von Punktprozessen

L-Funktion

- **L-Funktion**

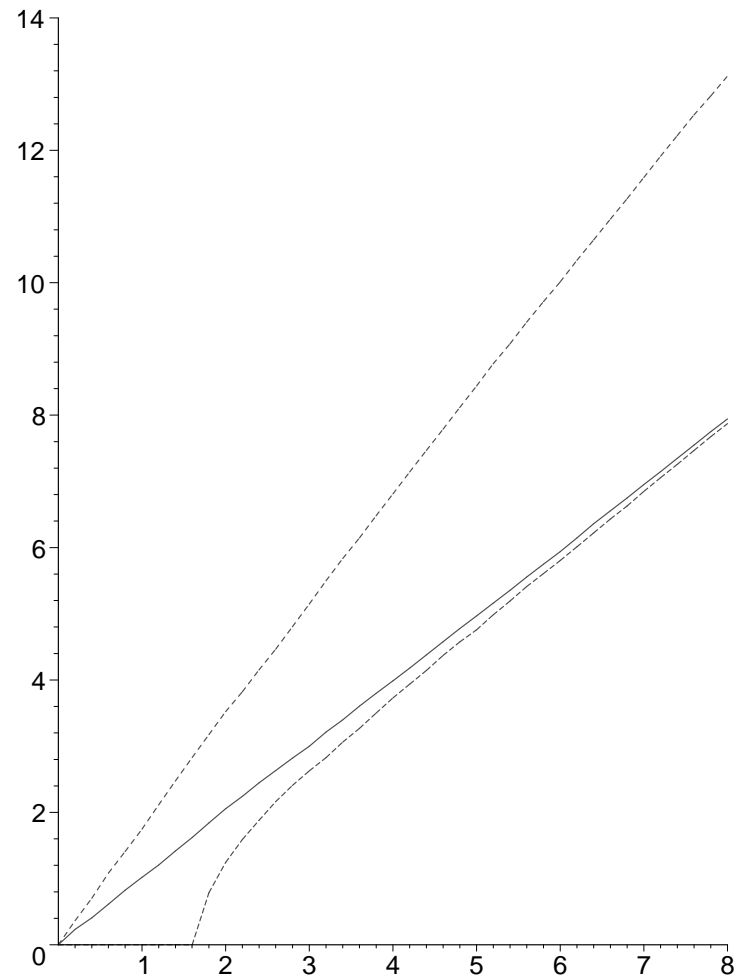
$$L(r) = \sqrt{\frac{K(r)}{\pi}}$$

- Für den homogenen Poissonprozess ist $K(r) = \pi r^2$,
deshalb:

$$L(r) = r$$

Eigenschaften von Punktprozessen

L-Funktion



Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

Vorbemerkung

- Es sei $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
- Das **gewöhnliche Momentenmaß 2. Ordnung** $\mu^{(2)}$ von Φ

$$\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) := \mathbb{E}(\Phi(B_1)\Phi(B_2))$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

Vorbemerkung

- Es sei $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
- Das **gewöhnliche Momentenmaß 2. Ordnung** $\mu^{(2)}$ von Φ

$$\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) := \mathbb{E}(\Phi(B_1)\Phi(B_2))$$

- Das **faktorielle Momentenmaß 2. Ordnung** $\alpha^{(2)}$ von Φ

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) := \mathbb{E}\left(\sum_{x_1, x_2 \in \Phi, x_1 \neq x_2} \mathbb{1}_{B_1}(x_1)\mathbb{1}_{B_2}(x_2)\right)$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

- oft besitzt $\alpha^{(2)}$ eine Dichtefunktion $\rho^{(2)}(x_1, x_2)$, dann

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \int_{B_2} \rho^{(2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

- oft besitzt $\alpha^{(2)}$ eine Dichtefunktion $\rho^{(2)}(x_1, x_2)$, dann

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \int_{B_2} \rho^{(2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

- durch Normierung ergibt sich bei bewegungsinvarianten Punktprozessen

$$g(r) = \frac{\rho^{(2)}(r)}{\lambda^2}, \quad r \geq 0$$

der sog. **Paarkorrelationskoeffizient**

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

Für die Paarkorrelation $g(r)$ gilt

- $g(r) \geq 0$

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

Für die Paarkorrelation $g(r)$ gilt

- $g(r) \geq 0$
- $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1$

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

Für die Paarkorrelation $g(r)$ gilt

- $g(r) \geq 0$
- $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1$
- $g(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} K(r)$

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

Für die Paarkorrelation $g(r)$ gilt

- $g(r) \geq 0$
- $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1$
- $g(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} K(r)$
- **Short-Range-Order M**

$$M = \frac{g(r_1) - g(r_2)}{r_2 - r_1}$$

Eigenschaften von Punktprozessen

Paarkorrelationsfunktion

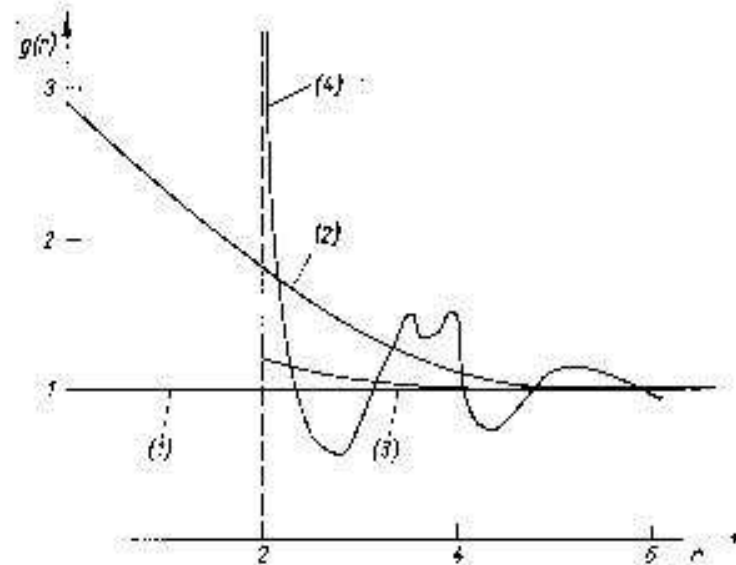


Figure 4.10 Pair-correlation functions g for various point process models: (1) Poisson process; (2) Matérn's cluster process with parameters $R = 2.5$ and $\lambda = 0.027$, $\mu = 5$ (the values of $g(r)$ greater than 1 for small r result from clustering); (3) Matérn hard-core process with parameters $R = 1$ and $p_A \sim 0.03$ (the hard-core distance is 2); (4) close random packing of spheres; an approximation for $R = 1$ (again the hard-core distance is 2. The peaks occur in a typical pattern at $2R$, at less than $4R$ and are there split into two maxima, etc.)

Literatur

- D.Stoyan, H.Stoyan:
Fractals, random shapes and point fields.
- D.Stoyan, W.S.Kendall, J.Mecke:
Stochastic geometry and its applications.
- R.Schneider, W.Weil:
Stochastische Geometrie.

**Danke für Ihre
Aufmerksamkeit.**