

# Einführung und geometrische Grundlagen

Melanie Guggolz

Oktober 2005

Seminar  
"Bildsegmentierung und Computer Vision"

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Überblick</b>	<b>2</b>
1.1	Level Set Methoden . . . . .	3
1.2	Beispiele . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Implizite Funktionen</b>	<b>5</b>
2.1	Punkte . . . . .	5
2.2	Kurven . . . . .	6
2.3	Oberflächen . . . . .	7
2.4	Werkzeuge aus der Geometrie und Analysis . . . . .	7
2.5	Vorzeichenbehaftete Abstandsfunktionen . . . . .	9
2.6	Werkzeuge aus der Geometrie und Analysis . . . . .	10

# Kapitel 1

## Überblick

Mit Bildsegmentierung bezeichnet man die Zerlegung der Bildebene in sinnvolle Teilbereiche. Was als „sinnvoll“ bezeichnet wird, hängt von der jeweiligen Anwendung ab. Zum Beispiel könnte man versuchen, in Videosequenzen von Verkehrsszenen Fußgänger und Autos vom Hintergrund zu trennen. Die Segmentierung ist eng verbunden mit den Problemen der Objekterkennung und des Trackings - das heisst, des Verfolgens bestimmter Objekte in einer Filmsequenz.

Ganz einfach ausgedrückt, geht es im Forschungsbereich 'Computer Vision' darum, Computern das Sehen beizubringen. Auf den ersten Blick mag dies nicht besonders kompliziert erscheinen, da bei uns Menschen das Sehen und Erkennen eine unbewusste Handlung ist, die mit hoher Geschwindigkeit und Robustheit abläuft. Wenn man aber versucht einen Computer zu programmieren, der selbst nur die anscheinend einfache Handlung des Erkennens, z.B. von Tassen in beliebigen Umgebungen bewerkstelligen soll, so ist man schon an der Grenze des heute Machbaren angelangt.

Der Kerngedanke der sogenannten Level Set Methoden ist es, eine Kontur implizit als Nulllinie eines Höhenprofils darzustellen. Anstatt die Kontur direkt zu propagieren, propagiert man das einbettende Höhenprofil. Ein großer Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die eingebettete Kontur im Laufe der Evolution des Höhenprofils topologische Veränderungen durchführen kann – zum Beispiel kann sich eine geschlossene Anfangskurve durch Trennung und Neuverschmelzung in zwei oder mehr Kurven verwandeln. Für die Bildsegmentierung hat das den Vorteil, dass der Benutzer nicht angeben muss, wieviele Objekte im Bild sind. Unter anderem kann man in einer Verkehrssequenz mehrere Autos aufgrund ihrer Bewegung vom Hintergrund trennen lassen, und eine mit bewegter Kamera gefilmte Landschaft in mehrere Tiefenschichten zerlegen lassen.

Bei der Level-Set-Methode wird eine sogenannte Level-Set-Funktion  $\phi$  eingeführt, die innerhalb des Interfaces kleiner als Null und außerhalb des Interfaces größer als Null ist. Der Rand der Struktur liegt genau dort, wo die Level-Set-Funktion  $\phi$  gleich Null ist. Sinnvollerweise wird als Level-Set-Funktion die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion, deren Funktionswert  $\phi(x)$  in jedem Punkt

$x$  gleich dem Abstand zum Rand der Struktur ist, genommen.

## 1.1 Level Set Methoden

Der Kerngedanke der sogenannten Level Set Methoden ist es, eine Kontur implizit als Nulllinie eines Höhenprofils darzustellen. Dadurch kann die eingebettete Kontur im Laufe der Evolution des Höhenprofils topologische Veränderungen durchführen. Zum Beispiel kann sich eine geschlossene Anfangskurve durch Trennung und Neuverschmelzung in zwei oder mehr Kurven verwandeln. Für die Bildsegmentierung hat das den Vorteil, dass der Benutzer nicht angeben muss, wieviele Objekte im Bild sind. Bei einem gegebenen Interface im  $\mathbb{R}^n$  von der Dimension  $\mathbb{R}^{n-1}$ , das ein offenes Gebiet  $\Omega$  begrenzt, will man die anschließende Bewegung unter einem Geschwindigkeitsfeld  $v$  analysieren und berechnen. Dafür definiert man sich eine glatte Funktion  $\phi(x, t)$ . Das Interface ist die Menge, wo  $\phi(x, t) = 0$  mit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $\phi$  hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &< 0 & x \in \Omega \\ \phi(x, t) &> 0 & x \notin \bar{\Omega} \\ \phi(x, t) &= 0 & x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

Die Bewegung wird durch die Verbindung der Werte von  $\phi$  mit dem Geschwindigkeitsfeld  $v$  analysiert. Die elementare Gleichung lautet

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + v \cdot \nabla\phi = 0$$

$|\nabla\phi| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^2}$   $v$  ist die gewünschte Geschwindigkeit auf dem Interface und sonst beliebig.

## 1.2 Beispiele

Mumford und Shah Modell:

$$F^{MS}(u, \Gamma) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \nu \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \mu \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) \rightarrow \min$$

$u_0$  ist das ursprüngliche Bild,  $u$  eine stückweise glatte Approximation davon. Der erste Term stellt sicher, dass  $u$  eine Approximation von  $u_0$  ist, der zweite Term sorgt dafür, dass  $u$  glatt außerhalb von  $\Gamma$  ist und der dritte Term stellt sicher, dass  $\Gamma$  glatt ist.  $\Gamma$  approximiert die Konturen von  $u$ .

Minimierung der totalen Variation nach Rudin-Osher-Fatemi

$$G^{TV}(u) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla u| \rightarrow \min$$

Allgemein gilt: von einem Bild  $f$  will man die wichtigste Information gewinnen. Dabei wird ein Bild  $u$  gesucht, das eine Vereinfachung von  $f$  ist, mit homogenen Bereichen und scharfen Konturen. Meistens wird folgende Beziehung angenommen:  $f = u + v$ , wobei  $v$  das Rauschen darstellt. Oft wird nur  $u$  gespeichert, manchmal ist  $v$  jedoch wichtig, z.B. wenn  $v$  ein Muster darstellt.

## Kapitel 2

# Implizite Funktionen

### 2.1 Punkte

Im Eindimensionalen teilt man den Zahlenstrahl in drei verschiedene Teile, die durch die Punkte  $x = -1$  und  $x = 1$  gebildet werden. Das heißt, man definiert  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  und  $(1, \infty)$  als drei getrennte Unterbereiche, obwohl der erste und dritte als zwei disjunkte Teile der gleichen Region betrachtet werden. Mit  $\Omega^- = (-1, 1)$  wird die innere Menge des Definitionsbereiches und mit  $\Omega^+ = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  die äußere Menge des Definitionsbereiches bezeichnet. Die Grenze zwischen der inneren und äußeren Menge besteht aus zwei Punkten  $\partial\Omega = \{-1, 1\}$  und wird Interface genannt. Im Eindimensionalen sind die innere und äußere Region eindimensionale Objekte, während das Interface weniger als eindimensional ist. In der Tat sind die Punkte, die das Interface bilden, nulldimensional. Allgemeiner sind im  $\mathbb{R}^n$  Unterbereiche  $n$ -dimensional, während das Interface die Dimension  $n - 1$  hat. Man sagt, das Interface hat Codimension eins.

Bei einer expliziten Interfacedarstellung schreibt man die Punkte, die zum Interface gehören, explizit auf. Alternativ definiert eine implizite Interfacedarstellung das Interface als die Isocontour einer Funktion. Zum Beispiel ist die Null-Isocontour von  $\phi(x) = x^2 - 1$  die Menge aller Punkte, für die  $\phi(x) = 0$ , d.h. sie ist genau  $\partial\Omega = \{-1, 1\}$ . Beachte, dass die implizite Funktion  $\phi(x)$  in dem ganzen eindimensionalen Definitionsbereich definiert ist, während die Isocontour, die das Interface definiert, eine Dimension weniger besitzt. Allgemeiner, im  $\mathbb{R}^n$ , ist die implizite Funktion  $\phi(\vec{x})$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  definiert, und ihre Isocontour hat die Dimension  $n - 1$ . Zunächst kann die implizite Darstellung verschwenderisch erscheinen, da die implizite Funktion  $\phi(\vec{x})$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert ist, während das Interface nur die Dimension  $n - 1$  hat. Es sind jedoch eine Anzahl sehr mächtiger Werkzeuge griffbereit, wenn diese Darstellung verwendet wird.

Oben wurde die  $\phi(x) = 0$  Isocontour gewählt, um das niedrigerdimensionale Interface darzustellen, aber es gibt nicht besonderes an der Null-Isocontour. Zum

Beispiel definiert die  $\hat{\phi}(x) = 1$  Isocontour von  $\hat{\phi}(x) = x^2$  das gleiche Interface  $\partial\Omega = \{-1, 1\}$ . Allgemein, für jede Funktion  $\hat{\phi}(\vec{x})$  und einer beliebigen Isocontour  $\hat{\phi}(\vec{x}) = a$  für einen Skalar  $a \in \mathbb{R}$  kann man  $\phi(\vec{x}) = \hat{\phi}(\vec{x}) - a$  definieren, so dass die  $\phi(\vec{x}) = 0$ -Isocontour von  $\phi$  identisch ist zu der  $\hat{\phi}(\vec{x}) = a$  Isocontour von  $\hat{\phi}$ . Zusätzlich haben die Funktionen  $\phi$  und  $\hat{\phi}$  identische Eigenschaften bis auf eine Skalartranslation  $a$ . Außerdem sind die partiellen Ableitungen von  $\phi$  gleich den partiellen Ableitungen von  $\hat{\phi}$ , da der Skalar beim Differenzieren verschwindet. Daher werden alle impliziten Funktionen  $\phi(\vec{x})$  im Folgenden so definiert, dass die  $\phi(\vec{x}) = 0$ -Isocontour das Interface darstellt.

## 2.2 Kurven

Im Zweidimensionalen ist das niedrigerdimensionale Interface eine Kurve, die den  $\mathbb{R}^2$  in zwei Unterbereiche mit Flächen, die nicht gleich Null sind, zerlegt. Hier werden die Interfacekurven auf solche beschränkt, die geschlossen sind, so dass sie eine klar definierte innere und äußere Region haben. Als ein Beispiel betrachte  $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$ , wo das Interface, das durch die  $\phi(\vec{x}) = 0$ -Isocontour definiert wird, der Einheitskreis, definiert durch  $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ , ist. Die innere Region ist die offene Einheitskreisscheibe  $\Omega^- = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < 1\}$  und die äußere Region ist  $\Omega^+ = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| > 1\}$ . Die explizite Darstellung des Interfaces ist einfach der Einheitskreis, definiert durch  $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ .

Im Zweidimensionalen muss die explizite Interfacedefinition alle Punkte auf einer Kurve festlegen. Während es in diesem Fall einfach getan werden kann, kann es für allgemeine Kurven schwieriger sein. Im Allgemeinen muss man die Kurve mit einer Vektorfunktion  $\vec{x}(s)$  parametrisieren, bei der der Parameter  $s$  in  $[s_o, s_f]$  liegt. Die Bedingung, dass die Kurve geschlossen ist, impliziert, dass  $\vec{x}(s_o) = \vec{x}(s_f)$ .

Während es angenehm ist, analytische Darstellungen zu verwenden, wie es bisher getan wurde, haben komplizierte zweidimensionale Kurven im Allgemeinen keine so einfache Darstellung. Ein geeigneter Weg, um eine explizite Darstellung zu erzeugen, ist es, den Parameter  $s$  in eine endliche Menge an Punkten  $s_o < \dots < s_{i-1} < s_i < s_{i+1} < \dots < s_f$  zu diskretisieren, wobei die Intervalle  $[s_i, s_{i+1}]$  nicht die gleiche Größe haben müssen. Für jeden Punkt  $s_i$  im parametrischen Raum speichert man den zugehörigen zweidimensionalen Ort der Kurve, bezeichnet mit  $\vec{x}(s_i)$ . Wenn die Anzahl der Punkte im diskretisierten Parameterraum erhöht wird, dann ist das Ergebnis die zweidimensionale Kurve.

Die implizite Darstellung kann auch als Diskretisierung abgespeichert werden, außer dass man nun den ganzen  $\mathbb{R}^2$  diskretisieren muss, was unmöglich ist, da er unbegrenzt ist. Stattdessen wird eine begrenzte Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^2$  diskretisiert. In dieser Menge wählt man eine endliche Menge an Punkten  $(x_i, y_i)$  für  $i=1, \dots, N$ , um die implizite Funktion  $\phi$  diskret zu approximieren. Das ist ein Nachteil der impliziten Oberflächendarstellung. Anstatt ein eindimensionales Intervall  $[s_o, s_f]$  aufzulösen, muss man eine zweidimensionale Region  $D$  auflösen. Allgemeiner im  $\mathbb{R}^n$  muss eine Diskretisierung einer expliziten Darstellung nur eine  $(n - 1)$ -dimensionale Menge auflösen, während eine Diskretisierung einer

impliziten Darstellung eine  $n$ -dimensionale Menge auflösen muss. Dies kann teilweise vermieden werden, indem alle Punkte  $\vec{x}$  sehr nahe an das Interface gelegt werden und der Rest von  $D$  unaufgelöst bleibt. Da nur die  $\phi(\vec{x}) = 0$ -Isocontour wichtig ist, werden nur die Punkte  $\vec{x}$  in der Nähe dieser Isocontour benötigt, um das Interface richtig darzustellen. Der Rest von  $D$  ist unwichtig. Die Punkte in der Nähe des Interfaces anzuhäufen ist eine lokale Herangehensweise, implizite Darstellungen zu diskretisieren. Wenn man die Menge der Punkte, die unsere Diskretisierung darstellen, ausgewählt hat, speichert man die Werte der impliziten Funktion  $\phi(\vec{x})$  an jedem dieser Punkte.

Weder die explizite noch die implizite Diskretisierung sagt uns, wo sich das Interface befindet. Stattdessen geben sie beide Informationen an den gewählten Stellen. Bei der expliziten Darstellung kennen wir den Ort einer endlichen Menge an Punkten auf der Kurve. Gewöhnlich wird interpoliert, um die Punkte, die nicht durch die Diskretisierung dargestellt werden, zu approximieren. Zum Beispiel kann stückweise polynomiale Interpolation verwendet werden, um die Gestalt des Interfaces zwischen den Datenpunkten zu bestimmen. Splines sind dafür gewöhnlich geeignet.

## 2.3 Oberflächen

Im Dreidimensionalen ist das Interface eine Oberfläche, die den  $\mathbb{R}^3$  in getrennte, nichtleere Unterräume zerlegt. Es werden wieder nur Oberflächen mit klar definierten inneren und äußeren Regionen betrachtet. Zum Beispiel:  $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Das Interface ist die Oberfläche der Einheitskugel, d.h.  $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ . Das innere Gebiet ist die offene Einheitskugel  $\Omega^- = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < 1\}$  und das äußere Gebiet ist  $\Omega^+ = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| > 1\}$ . Im Dreidimensionalen kann es recht schwierig sein, die explizite Darstellung zu diskretisieren. Man muss eine Anzahl von Punkten auf der zweidimensionalen Oberfläche auswählen und ihre Verbindung untereinander speichern, da sonst selbst beliebige Algorithmen inkurate Oberflächen erzeugen, z.B. Oberflächen mit Löchern. Die Verbindung untereinander kann sich bei dynamischen Oberflächen verändern, d.h. Oberflächen können verschmelzen oder sich trennen. Bei impliziten Darstellungen muss die Verbindung untereinander für die Diskretisierung nicht bestimmt werden.

## 2.4 Werkzeuge aus der Geometrie und Analysis

Implizite Interfacedarstellungen beinhalten sehr mächtige geometrische Werkzeuge. Zum Beispiel gilt, dass  $\vec{x}_o$  innerhalb des Interfaces liegt, falls  $\phi(\vec{x}_o) < 0$ , außerhalb des Interfaces, falls  $\phi(\vec{x}_o) > 0$  und auf dem Interface, falls  $\phi(\vec{x}_o) = 0$ . Bei expliziten Darstellungen kann es schwierig sein zu entscheiden, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb des Interfaces liegt. Zum Beispiel kann man von dem in Frage kommenden Punkt einen Strahl zu einem entfernten Punkt legen, von dem man weiß, dass er außerhalb liegt. Wenn der Strahl das Interface eine gerade Anzahl mal schneidet, dann liegt der Punkt außerhalb des Interfaces, sonst



innerhalb. Offensichtlich ist es einfacher,  $\phi$  an der Stelle  $\vec{x}_0$  zu berechnen.

Falls  $\phi_1$  und  $\phi_2$  zwei verschiedene implizite Funktionen sind, dann ist durch  $\phi(\vec{x}) = \min(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$  eine implizite Funktion gegeben, welche die Vereinigung der inneren Gebiete von  $\phi_1$  und  $\phi_2$  darstellt. Entsprechend ist durch  $\phi(\vec{x}) = \max(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$  eine implizite Funktion gegeben, welche den Schnitt der inneren Gebiete von  $\phi_1$  und  $\phi_2$  darstellt. Das Komplement von  $\phi_1(\vec{x})$  kann durch  $\phi(\vec{x}) = -\phi_1(\vec{x})$  definiert werden.

Der Gradient von  $\phi$  ist wie folgt definiert:

$$\nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

Der Gradient  $\nabla\phi$  steht senkrecht auf den Höhenlinien von  $\phi$  und zeigt in die Richtung des Anstiegs von  $\phi$ . Daher wird die Normale so definiert:

$$\vec{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (2.2)$$

Bei dem eindimensionalen Beispiel gilt, dass  $\vec{N} = x/|x|$ , d.h.  $\vec{N}$  zeigt nach rechts für alle  $x > 0$  und nach links für alle  $x < 0$ .

Im kartesischen Gitterkreuz können die Ableitungen wie folgt approximiert werden:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$$

Die durchschnittliche Krümmung des Interfaces ist definiert durch

$$\kappa = \nabla \cdot \vec{N} = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z} \quad (2.3)$$

mit  $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ .  $\kappa > 0$  in konvexen Gebieten und  $\kappa < 0$  in konkaven Gebieten. Durch Substitution von (2.2) in (2.3) erhält man

$$\begin{aligned} \kappa = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right) &= (\phi_x^2\phi_{yy} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{xx} + \phi_x^2\phi_{zz} - 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} \\ &+ \phi_z^2\phi_{xx} + \phi_y^2\phi_{zz} - 2\phi_y\phi_z\phi_{yz} + \phi_z^2\phi_{yy}) / |\nabla\phi|^3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

In dem eindimensionalen Beispiel mit  $\phi(x) = x^2 - 1$  gilt überall  $\kappa = 0$ , in den zwei- und dreidimensionalen Beispielen ergibt sich, dass  $\kappa = \frac{1}{|\vec{x}|}$  bzw.  $\kappa = \frac{2}{|\vec{x}|}$ .

Die Heaviside Funktion ist wie folgt definiert:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi \leq 0 \\ 1 & \text{if } \phi > 0 \end{cases}$$

Dann sieht die Diracsche Delta-Funktion so aus:

$$\hat{\delta}(\vec{x}) = \nabla H(\phi(\vec{x})) \cdot \vec{N}$$

Die Delta-Funktion ist überall Null außer auf dem Interface  $\partial\Omega$ , d.h. wenn  $\phi = 0$ .

Damit kann man das Volumenintegral einer Funktion  $f$  über das innere Gebiet  $\Omega^-$  wie folgt ausrechnen:

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})(1 - H(\phi(\vec{x})))d\vec{x}$$

Und das Oberflächenintegral einer Funktion  $f$  über die Grenze  $\partial\Omega$ :

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})\hat{\delta}(\vec{x})d\vec{x}$$

## 2.5 Vorzeichenbehaftete Abstandsfunktionen

Eine Abstandsfunktion ist definiert als

$$d(\vec{x}) = \min(|\vec{x} - \vec{x}_I|) \quad \forall \vec{x}_I \in \partial\Omega$$

Falls  $\vec{x} \in \partial\Omega$ , dann ist  $d(\vec{x}) = 0$ . Ansonsten sucht man den Punkt auf  $\partial\Omega$ , der am nächsten bei  $\vec{x}$  liegt und nennt diesen Punkt  $\vec{x}_C$ . Dann ist  $d(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{x}_C|$ . Für jeden Punkt  $\vec{y}$  auf der Verbindungslinie von  $\vec{x}$  und  $\vec{x}_C$  ist  $\vec{x}_C$  auch der zu  $\vec{y}$  am nächsten gelegene Punkt. Der Weg von  $\vec{x}$  nach  $\vec{x}_C$  ist der Weg des steilsten Abstiegs. Wenn man  $-\nabla d$  an einem beliebigen Punkt auf der Verbindungslinie von  $\vec{x}$  nach  $\vec{x}_C$  ausrechnet, erhält man einen Vektor, der von  $\vec{x}$  nach  $\vec{x}_C$  zeigt. Da  $d$  der euklidische Abstand ist, gilt  $|\nabla d| = 1$ , falls  $\vec{x}_C$  eindeutig bestimmt ist.

Eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion ist eine implizite Funktion  $\phi$  mit  $|\phi(\vec{x})| = d(\vec{x})$  für alle  $\vec{x}$ . Das heißt,  $\phi(\vec{x}) = d(\vec{x}) = 0$  für alle  $\vec{x} \in \partial\Omega$ ,  $\phi(\vec{x}) = -d(\vec{x})$  für alle  $\vec{x} \in \Omega^-$  und  $\phi(\vec{x}) = d(\vec{x})$  für alle  $\vec{x} \in \Omega^+$ . Es gilt:  $|\nabla\phi| = 1$ . Abstandsfunktionen haben eine Knickstelle auf dem Interface, wo sich mit  $d = 0$  ein lokales Minimum befindet, weshalb es schwierig ist, die Ableitungen auf oder in der Nähe des Interfaces zu berechnen. Vorzeichenbehaftete Abstandsfunktionen hingegen sind monoton bei dem Interface. Für einen gegebenen Punkt  $\vec{x}$  und mit  $\phi(\vec{x})$  als der vorzeichenbehaftete Abstand zu dem nächsten Punkt auf dem Interface können wir den nächsten Punkt wie folgt berechnen:  $\vec{x}_C = \vec{x} - \phi(\vec{x})\vec{N}$ , wobei  $\vec{N}$  die lokale Normale im Punkt  $\vec{x}$  ist.

Eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion für  $\partial\Omega = \{-1, 1\}$  ist  $\phi(x) = |x| - 1$ . Die Funktion  $\phi(x) = |x| - 1$  führt zu dem gleichen Rand  $\partial\Omega$ , dem gleichen inneren Gebiet  $\Omega^-$  und dem gleichen äußeren Gebiet  $\Omega^+$  wie die implizite Funktion  $\phi(x) = x^2 - 1$ . Jedoch gilt für  $\phi(x) = |x| - 1$ , dass  $|\nabla\phi| = 1$  für alle  $x \neq 0$ . Bei  $x = 0$  hat die Funktion eine Knickstelle und die Ableitung ist nicht definiert. Im zweidimensionalen Raum ersetzt man  $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$  durch die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion  $\phi(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$  um den Einheitskreis  $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$  implizit darzustellen. Im dreidimensionalen Raum ersetzt man  $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  durch die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion  $\phi(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1$  um die Einheitskugel  $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$  implizit darzustellen. Es gilt:  $|\nabla\phi| = 1$  und es existiert eine mehrdimensionale Knickstelle bei  $x = 0$ . Wenn wir  $\phi(\vec{x})$  nur an endlich vielen kartesischen Gitterpunkten betrachten, dann verwischt die Knickstelle. Das bedeutet, dass in

der Nähe der Knickstelle  $|\nabla\phi| \neq 1$ .  $\phi$  ist also lokal keine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion mehr. Die Knickstelle befindet sich jedoch in der Regel nicht in der Nähe des Interfaces, welches das Gebiet ist, das uns wirklich interessiert.

## 2.6 Werkzeuge aus der Geometrie und Analysis

Da bei vorzeichenbehafteten Abstandsfunktionen fast überall  $|\nabla\phi| = 1$  gilt, vereinfachen sich viele Formeln:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \nabla\phi \\ \kappa &= \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} \\ \hat{\delta}(\vec{x}) &= \delta(\phi(\vec{x}))\end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] S. Osher, R. Fedkiw "Level set methods and dynamic implicit surfaces", Springer, 2003
- [2] S. Osher, N. Paragios, eds. "Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics", Springer, 2003