# Einführung und geometrische Grundlagen

Melanie Guggolz

31. Oktober 2005

Vortrag zum Seminar
"Bildsegmentierung und Computer Vision"

# Übersicht

# Überblick

- Mit Bildsegmentierung bezeichnet man die Zerlegung der Bildebene in sinnvolle Teilbereiche.
- Zum Beispiel könnte man versuchen, in Videosequenzen von Verkehrsszenen Fußgänger und Autos vom Hintergrund zu trennen.
- Im Forschungsbereich Computer Vision geht es darum, Computern das Sehen beizubringen.

# Level Set Methoden

- Der Kerngedanke der sogenannten Level Set Methoden ist es, eine Kontur implizit als Nulllinie eines Höhenprofils darzustellen.
- Dadurch kann die eingebettete Kontur im Laufe der Evolution des Höhenprofils topologische Veränderungen durchführen.
- Zum Beispiel kann sich eine geschlossene Anfangskurve durch Trennung und Neuverschmelzung in zwei oder mehr Kurven verwandeln.
- Für die Bildsegmentierung hat das den Vorteil, dass der Benutzer nicht angeben muss, wieviele Objekte im Bild sind.

# Level Set Methoden

- Bei einem gegebenen Interface im $\mathbb{R}^n$ von der Dimension $\mathbb{R}^{n-1}$, das eine offenes Gebiet $\Omega$ begrenzt, will man die anschließende Bewegung unter einem Geschwindigkeitsfeld $v$ analysieren und berechnen.
- Dafür definiert man sich eine glatte Funktion $\phi(x, t)$.
- Das Interface ist die Menge, wo $\phi(x, t) = 0$ mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- Die Funktion $\phi$ hat folgende Eigenschaften:

$$\phi(x, t) < 0 \quad x \in \Omega$$

$$\phi(x, t) > 0 \quad x \notin \bar{\Omega}$$

$$\phi(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

# Level Set Methoden

- Die Bewegung wird durch die Verbindung der Werte von $\phi$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $v$ analysiert.
- Die elementare Gleichung lautet

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \cdot \nabla \phi = 0$$

- $v$ ist die gewünschte Geschwindigkeit auf dem Interface und sonst beliebig.

# Beispiele

- Mumford und Shah Modell:

$$\inf_{u,\Gamma} F^{MS}(u,\Gamma) = \int_{\Omega} (u-u_0)^2 dx + \nu \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 \, dx + \mu \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)$$

- $u_0$ ist das ursprügliche Bild, $u$ eine sückweise glatte Approximation davon.

# Beispiele

- Mumford und Shah Modell:

$$\inf_{u,\Gamma} F^{MS}(u,\Gamma) = \int_\Omega (u-u_0)^2 dx + \nu \int_{\Omega\setminus\Gamma} |\nabla u|^2\, dx + \mu \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)$$

- $u_0$ ist das ursprügliche Bild, $u$ eine sückweise glatte Approximation davon.
- Minimierung der totalen Variation nach Rudin-Osher-Fatemi

$$\inf_u G^{TV}(u) = \int_\Omega (u-u_0)^2 dx + \mu \int_\Omega |\nabla u|$$

# Beispiele

- Von einem Bild $f$ will man die wichtigste Information gewinnen.
- Dabei wird ein Bild $u$ gesucht, das eine Vereinfachung von $f$ ist, mit homogenen Bereichen und scharfen Konturen.
- Meistens wird folgende Beziehung angenommen: $f = u + v$, wobei v das Rauschen darstellt.
- Meistens wird nur $u$ gespeichert, manchmal ist $v$ jedoch wichtig, z.B. wenn v ein Muster darstellt.

# Übersicht

# Interface

- Der Zahlenstrahl wird durch die Punkte $x = -1$ und $x = 1$ in drei verschiedene Teile geteilt.
- Wie bezeichnen $\Omega^- = (-1, 1)$ als die innere Menge und $\Omega^+ = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ als die äußere Menge.
- Die Grenze zwischen der inneren und äußeren Menge besteht aus zwei Punkten $\partial\Omega = \{-1, 1\}$ und wird Interface genannt.
- Im Eindimensionalen sind das innere und äußere Gebiet eindimensionale Objekte. Die Punkte, die das Interface bilden, sind nulldimensional.
- Allgemeiner im $\mathbb{R}^n$ sind Unterbereiche n-dimensional, während das Interface die Dimension $n - 1$ hat, d.h. das Interface hat Codimension eins.

# Explizite und implizite Darstellung

- Explizite Interfacedarstellung: $\partial\Omega = \{-1, 1\}$
- Implizite Interfacedarstellung: die Schnittmenge von $\phi(x) = x^2 - 1$ mit der x-Achse
- Im $\mathbb{R}^n$, ist die implizite Funktion $\phi(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definiert, und der Schnitt hat die Dimension $n - 1$.

# Explizite und implizite Darstellung

- Explizite Interfacedarstellung: $\partial\Omega = \{-1, 1\}$
- Implizite Interfacedarstellung: die Schnittmenge von $\phi(x) = x^2 - 1$ mit der x-Achse
- Im $\mathbb{R}^n$, ist die implizite Funktion $\phi(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definiert, und der Schnitt hat die Dimension $n - 1$.
- Für jede Funktion $\hat{\phi}(\vec{x})$ und eine beliebigen Menge $\{\vec{x} \mid \hat{\phi}(\vec{x}) = a\}$ für einen Skalar $a \in \mathbb{R}$ können wir $\phi(\vec{x}) = \hat{\phi}(\vec{x}) - a$ definieren, so dass die Menge $\{\vec{x} \mid \phi(\vec{x}) = 0\}$ von $\phi$ identisch ist zu der Menge $\{\vec{x} \mid \hat{\phi}(\vec{x}) = a\}$ von $\hat{\phi}$.

# Interface

- Im Zweidimensionalen ist unser Interface eine geschlossene Kurve.
- Die explizite Interfacedefinition muss alle Punkte auf einer Kurve festlegen.
- Als ein Beispiel betrachte $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$
- Das Interface, das durch die $\phi(\vec{x}) = 0$-Höhenlinie definiert wird, ist der Einheitskreis.
- Das innere Gebiet ist die offene Einheitskreisscheibe $\Omega^- = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < 1\}$ und das äußere Gebiet ist $\Omega^+ = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| > 1\}$.
- Explizite Interfacedarstellung: $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$

# Parametrisierung

- Bei allgemeinen Kurven kann es schwierig sein, eine explizite Interfacedefinition zu geben.
- Dann muss man die Kurve mit einer Vektorfunktion $\vec{x}(s)$ parametrisieren, bei der der Parameter s in $[s_o, s_f]$ liegt.
- Die Bedingung, das die Kurve geschlossen ist, impliziert, dass $\vec{x}(s_o) = \vec{x}(s_f)$.

# Parametrisierung

- Bei der impliziten Darstellung diskretisiert man eine Teilemenge $D \subset \mathbb{R}^2$ durch eine endliche Anzahl an Punkten.
- Problem: Allgemeiner im $\mathbb{R}^n$ muss eine Diskretisierung einer expliziten Darstellung nur eine $(n-1)$-dimensionale Menge auflösen, während eine Diskretisierung einer impliziten Darstellung eine $n$-dimensionale Menge auflösen muss.

# Parametrisierung

- Bei der impliziten Darstellung diskretisiert man eine Teilemenge $D \subset \mathbb{R}^2$ durch eine endliche Anzahl an Punkten.
- Problem: Allgemeiner im $\mathbb{R}^n$ muss eine Diskretisierung einer expliziten Darstellung nur eine $(n-1)$-dimensionale Menge auflösen, während eine Diskretisierung einer impliziten Darstellung eine $n$-dimensionale Menge auflösen muss.
- Lösung: Alle Punkte $\vec{x}$ werden sehr nahe an das Interface gelegt und der Rest von D bleibt unaufgelöst, da nur die $\phi(\vec{x}) = 0$-Höhenlinie wichtig ist.
- Durch Interpolation mit Splines kann man die Punkte, die nicht durch die Diskretisierung dargestellt werden, approximieren.

# Beispiel

- Im Dreidimensionalen ist das Interface eine Oberfläche, die den $\mathbb{R}^3$ in getrennte, nichtleere Unterräume zerlegt.
- Beispiel: $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
- Das Interface ist die Oberfläche der Einheitskugel, d.h. $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$.
- Das innere Gebiet ist die offene Einheitskugel $\Omega^- = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < 1\}$ und das äußere Gebiet ist $\Omega^+ = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| > 1\}$.

# Parametrisierung

- Im Dreidimensionalen kann es recht schwierig sein, die explizite Darstellung zu diskretisieren.
- Man muss eine Anzahl von Punkten auf der zweidimensionalen Oberfläche auswählen und ihre Verbindung untereinander speichern, da sonst selbst beliebte Algorithmen inakurate Oberflächen erzeugen, z.B. Oberflächen mit Löchern.
- Die Verbindung untereinander kann sich bei dynamischen Oberflächen verändern, d.h. Oberflächen können verschmelzen oder sich trennen.
- Bei impliziten Darstellungen muss die Verbindung untereinander für die Diskretisierung nicht bestimmt werden.

# Punkte innerhalb und außerhalb des Interfaces

- Bei impliziten Darstellungen gilt: $\vec{x}_o$ liegt innerhalb des Interfaces, falls $\phi(\vec{x}_o) < 0$, außerhalb des Interfaces, falls $\phi(\vec{x}_o) > 0$ und auf dem Interface, falls $\phi(\vec{x}_o) = 0$.

# Punkte innerhalb und außerhalb des Interfaces

- Bei impliziten Darstellungen gilt: $\vec{x}_o$ liegt innerhalb des Interfaces, falls $\phi(\vec{x}_o) < 0$, außerhalb des Interfaces, falls $\phi(\vec{x}_o) > 0$ und auf dem Interface, falls $\phi(\vec{x}_o) = 0$.
- Bei expliziten Darstellungen kann man von dem in Frage kommenden Punkt einen Strahl zu einem entfernten Punkt legen, von dem man weiß, dass er außerhalb liegt.
- Wenn der Strahl das Interface eine gerade Anzahl mal schneidet, dann liegt der Punkt außerhalb des Interfaces, sonst innerhalb.

# Vereinigung/Schnitt

- Falls $\phi_1$ und $\phi_2$ zwei verschiedene implizite Funktionen sind, dann ist durch $\phi(\vec{x}) = \min(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$ eine implizite Funktion gegeben, welche die Vereinigung der inneren Gebiete von $\phi_1$ und $\phi_2$ darstellt.
- Entsprechend ist durch $\phi(\vec{x}) = \max(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$ eine implizite Funktion gegeben, welche den Schnitt der inneren Gebiete von $\phi_1$ und $\phi_2$ darstellt.
- Das Komplement von $\phi_1(\vec{x})$ kann durch $\phi(\vec{x}) = -\phi_1(\vec{x})$ definiert werden.

# Normale

- Gradient von $\phi$:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{1}$$

# Normale

- Gradient von $\phi$:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{1}$$

- Normale:

$$\vec{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \tag{2}$$

# Normale

- Gradient von $\phi$:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{1}$$

- Normale:

$$\vec{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \tag{2}$$

- Die Ableitungen können wie folgt approximiert werden:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$$

# Krümmung

- Die durchschnittliche Krümmung des Interfaces ist definiert durch

$$\kappa = \nabla \cdot \vec{N} = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z} \tag{3}$$

  mit $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$.
- $\kappa > 0$ in konvexen Gebieten und $\kappa < 0$ in konkaven Gebieten.
- Durch Substitution von (2) in (3) erhält man

$$\kappa = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) = (\phi_x^2 \phi_{yy} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{xx} + \phi_x^2 \phi_{zz} - 2\phi_x \phi_z \phi_{xz} + \phi_z^2 \phi_{xx} + \phi_y^2 \phi_{zz} - 2\phi_y \phi_z \phi_{yz} + \phi_z^2 \phi_{yy}) / |\nabla \phi|^3 \tag{4}$$

# Heaviside Funktion

- Heaviside Funktion:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & if\, \phi \leq 0 \\ 1 & if\, \phi > 0 \end{cases}$$

- Diracsche Delta-Funktion:

$$\hat{\delta}(\vec{x}) = \nabla H(\phi(\vec{x})) \cdot \vec{N}$$

- Die Delta-Funktion ist überall Null außer auf dem Interface $\partial\Omega$, d.h. wenn $\phi = 0$.

# Integrale

- Das Volumenintegral einer Funktion $f$ über das innere Gebiet $\Omega^-$ ist definiert durch

$$\int_\Omega f(\vec{x})(1 - H(\phi(\vec{x})))d\vec{x}$$

- Das Oberflächenintegral einer Funktion $f$ über die Grenze $\partial\Omega$ ist definiert durch

$$\int_\Omega f(\vec{x})\hat{\delta}(\vec{x})d\vec{x}$$

# Übersicht

# Definition

- Eine Abstandsfunktion ist definiert als

$$d(\vec{x}) = min(|\vec{x} - \vec{x}_I|) \ \ \forall \ \vec{x}_I \in \partial\Omega$$

- Falls $\vec{x} \in \partial\Omega$, dann ist $d(\vec{x}) = 0$. Ansonsten sucht man den Punkt auf $\partial\Omega$, der am nächsten bei $\vec{x}$ liegt und nennt diesen Punkt $\vec{x}_C$. Dann ist $d(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{x}_C|$.
- Für jeden Punkt $\vec{y}$ auf der Verbindungslinie von $\vec{x}$ und $\vec{x}_C$ ist $\vec{x}_C$ auch der zu $\vec{y}$ am nächsten gelegene Punkt.

# Ableitung

- Der Weg von $\vec{x}$ nach $\vec{x}_C$ ist der Weg des steilsten Abstiegs.
- Wenn man $-\nabla d$ an einem beliebigen Punkt auf der Verbindungslinie von $\vec{x}$ nach $\vec{x}_C$ ausrechnet, erhält man einen Vektor, der von $\vec{x}$ nach $\vec{x}_C$ zeigt.
- Da $d$ der euklidische Abstand ist, gilt $|\nabla d| = 1$, falls $\vec{x}_C$ eindeutig bestimmt ist.

# Definition

- Eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion ist eine implizite Funktion $\phi$ mit $|\phi(\vec{x})| = d(\vec{x})$ für alle $\vec{x}$.
- Das heißt, $\phi(\vec{x}) = d(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \partial\Omega$, $\phi(\vec{x}) = -d(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \Omega^-$ und $\phi(\vec{x}) = d(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \Omega^+$.
- Es gilt: $|\nabla\phi| = 1$.
- Abstandsfunktionen haben eine Knickstelle auf dem Interface, wo sich mit $d = 0$ ein lokales Minimum befindet, weshalb es schwierig ist, die Ableitungen auf oder in der Nähe des Interfaces zu berechnen.
- Vorzeichenbehaftete Abstandsfunktionen hingegen sind monoton bei dem Interface.

# Definition

- Für einen gegebenen Punkt $\vec{x}$ und mit $\phi(\vec{x})$ als der vorzeichenbehaftete Abstand zu dem nächsten Punkt auf dem Interface können wir den nächsten Punkt wie folgt berechnen: $\vec{x}_C = \vec{x} - \phi(\vec{x})\vec{N}$, wobei $\vec{N}$ die lokale Normale im Punkt $\vec{x}$ ist.

# Punkte

- Eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion für $\partial\Omega = \{-1, 1\}$ ist $\phi(x) = |x| - 1$.
- Die Funktion $\phi(x) = |x| - 1$ führt zu dem gleichen Rand $\partial\Omega$, dem gleichen inneren Gebiet $\Omega^-$ und dem gleichen äußeren Gebiet $\Omega^+$ wie die implizite Funktion $\phi(x) = x^2 - 1$.
- Jedoch gilt für $\phi(x) = |x| - 1$, dass $|\nabla\phi| = 1$ für alle $x \neq 0$
- Bei $x = 0$ hat die Funktion eine Knickstelle und die Ableitung ist nicht definiert.

# Kurven und Oberflächen

- Im zweidimensionalem Raum ersetzt man $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$ durch die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion $\phi(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ um den Einheitskreis $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ implizit darzustellen.
- Im dreidimensionalem Raum ersetzt man $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ durch die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion $\phi(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1$ um die Einheitskugel $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ implizit darzustellen.
- Es gilt: $|\nabla\phi| = 1$ und es existiert eine mehrdimensionale Knickstelle bei $x = 0$.

# Numerische Betrachtung

- Wenn wir $\phi(\vec{x})$ nur an endlich vielen kartesischen Gitterpunkten betrachten, dann verwischt die Knickstelle.
- Das bedeutet, dass in der Nähe der Knickstelle $|\nabla\phi| \neq 1$.
- $\phi$ ist also lokal keine vorzeichenbehaftete Abstandfunktion mehr.
- Die Knickstelle befindet sich jedoch in der Regel nicht in der Nähe des Interfaces, welches das Gebiet ist, das uns wirklich interessiert.

# Vereinfachungen

Da bei vorzeichenbehafteten Abstandsfunktionen fast überall $|\nabla\phi| = 1$ gilt, vereinfachen sich viele Formeln:

- $\vec{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \nabla\phi$
- $\kappa = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$

# Literatur


- S. Osher, R.Fedkiv "Level set methods and dynamic implicit surfaces", Springer, 2003
- S. Osher, N. Paragios, eds. "Geometric level set methods in imageng, vision, and graphics", Springer, 2003

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!