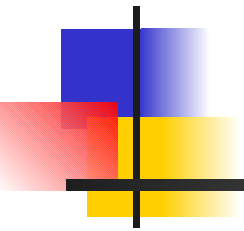
Seminar: Bildsegmentierung und Computer Vision.

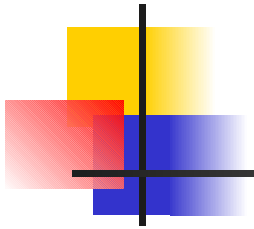


Bildentrauschung mit Variationsansätzen

Simone Striebel

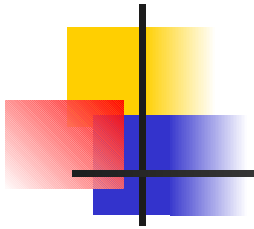
21.11.2005

Gliederung



- Einleitung
- Fast Level Set Transform (FLST)
- Minimierung der Totalvariation mit FLST
- Beispiele

Einleitung (I)



- Information in Bildern aufgrund von Aufnahme- oder Übermittlungsfehlern durch Rauschen gestört.
- Um das Bild weiterzuverwenden, benötigen wir Filter.
- Methoden zur Bildentrauschung:
  - Beruhen auf Glättung,
  - Eliminieren zwar Rauschen,
  - Zerstören aber auch markante Details des Bildes,
  - Z.B Ecken und Kanten.

Einleitung (II)

- Sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, auf der offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
- Bilder in der Regel höchstens stückweise stetig.
- Wichtige Details, wie z.B. Ecken, sind Unstetigkeits-bereiche.
- ➙ Entrauschungsalgorithmus erlaubt auch Unstetigkeiten als Ergebnis.
- Dann ist der Lösungsansatz von Rudin und Usher die Minimierung der Totalvariation

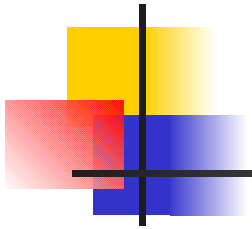
$$\int_\Omega |\nabla u| = \int_\Omega \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, d(x, y)$$

Einleitung (III)

- Problem von $\int_\Omega |\nabla u|$ ist $\left|\nabla u\right|$, da unter Umständen nicht überall definiert.
- Ausweg: Diskretisierung
- Wollen Algorithmus zur Minimierung der Totalvariation einführen,
  - → auf geometrischer Darstellung des Bildes beruht.
- Benötigen ein Hilfsmittel, um das Bild $u : \Omega \to \mathbb{R}$ auf geeignete Weise darzustellen.

→ Fast Level Set Transform (FLST).

Gliederung



- Einleitung
- Fast Level Set Transform (FLST)
- Minimierung der Totalvariation mit FLST
- Beispiele

Fast Level Set Transform (I)

- Bilddaten normalerweise auf einem diskreten Gitter definiert und Pixel können nur endliche Menge an Funktionswerten annehmen
  - ➙ sog. Grauwerte.
- Definitionen:
  - 'Unterer/Oberer Levelset':
    Man bezeichnet $X^{\lambda}=\{x:u(x)\geq\lambda\}$ bzw. $X_{\lambda}=\{x:u(x)\leq\lambda\}$ als den oberen bzw. unteren Levelset von λ
  - 'Shape':
    Als Shape bezeichnen wir eine zusammenhängende Fläche die keine Löcher enthält.

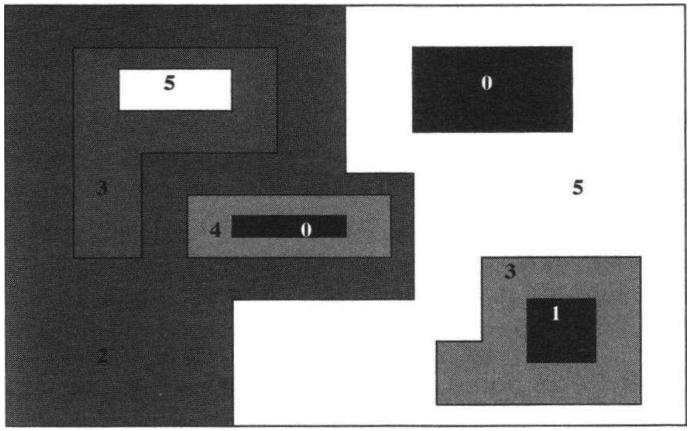
Fast Level Set Transform (II)

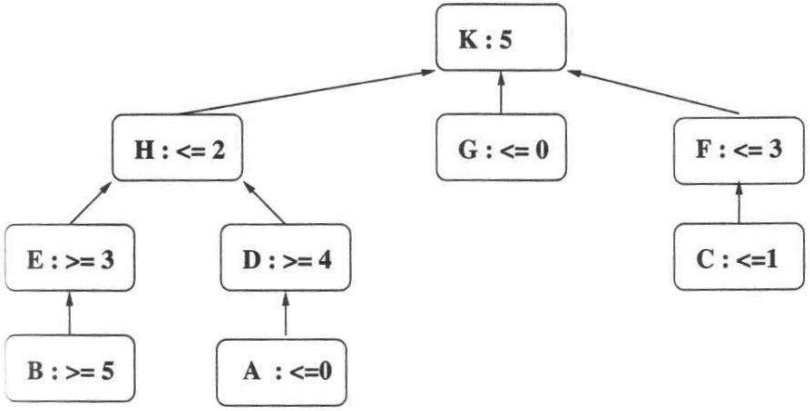
- FLST zerlegt ein Bild mithilfe von oberen und unteren Levelsets in seine Shapes
- Konstruiert eine Baumstruktur, um die Inklusionen der Shapes darzustellen.
- ➙ Vollständige Darstellung des Bildes erreicht durch:

$$u(x) = sup\{\lambda : x \in X^{\lambda}\} = inf\{\mu : x \in X_{\mu}\}$$

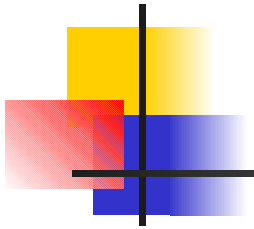
Fast Level Set Transform (III)

- Beispiel für Bild und zugehörigen FLST-Baum:





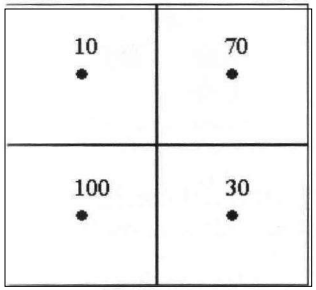
Fast Level Set Transform (IV)



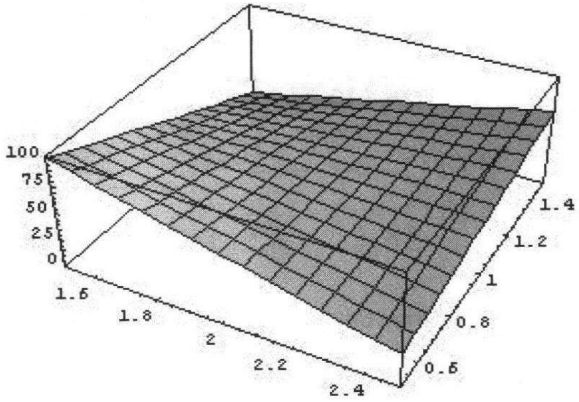
- Stellen den FLST nun für den Fall vor, dass das Bild als Bilineare Interpolation seiner Daten dargestellt wurde.
  - Bild als stetige Funktion modelliert.
  - Vorteile:
    - Höhenlinien glatter
    - Weniger empfindlich für Diskretisierung
    - Besserer Wert für die Länge der Höhenlinien
    - Singularitäten nur auf Gitterpunkten und auf Sattelpunkten
  - Nachteile:
    - Unendliche Anzahl an Höhenlinien
    - Müssen das Bild auf endliche Zahl von Höhenlinien abbilden

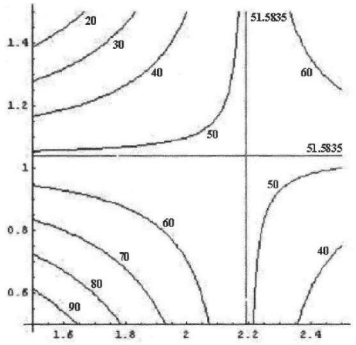
Fast Level Set Transform (V)

- Definition: 'Qpixel'
  Fläche die durch 4 im ursprüglichen Gitter enthaltene Punkte begrenzt wird:



- Diese benötigen wir zur Suche von Sattelpunkten:

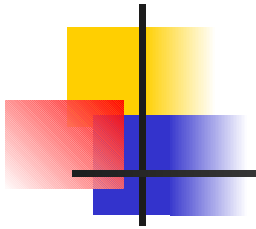




Fast Level Set Transform (VI)

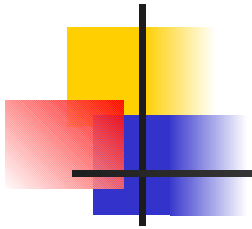
- FLST – Algorithmus arbeitet in zwei Schritten:
  - 1. Schritt:
    Extrahiert den ursprünglichen TBLL (Tree of Bilinear Levellines) aus dem Bild.
    - ► Gehört zu den Höhenlinien, die durch Pixelpunkte und Sattelpunkte gehen.
  - 2. Schritt:
    Nun kann der Baum für beliebige Anzahl von Höhenlinien daraus extrahiert werden.

Fast Level Set Transform (VII)



- Suchen diejenigen Qpixel die einen Sattelpunkt enthalten
- Ist der Fall wenn Maximum von zwei diagonal gegenüberliegenden Punkt echt kleiner als das Minimum der beiden anderen Punkte ist.
- Berechnen den zugehörigen Funktionswert.
- Definition 'Punkt':
  - Im Algorithmus ist ein Punkt entweder ein Pixelpunkt, oder ein Sattelpunkt.
- Definieren zu jedem Punkt P einen Shape S_P als kleinsten Shape der P enthält.

Fast Level Set Transform (VIII)

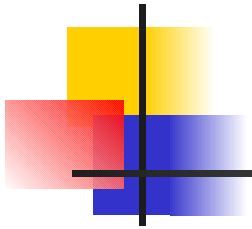


- Wir gehen alle Punkte P durch:
  - I) Initialisiere Punktmenge P mit $\emptyset$, und eine Menge N, die Nachbarpunkte enthalten soll, mit {P}.
  - II) Solange $N_\lambda \neq \emptyset$, N_λ die Punkte in N zum Level λ
    - entnehme N_λ von N und füge es zu P hinzu
    - gib zu N die Nachbarn von N_λ hinzu, welche nicht schon in P enthalten sind.

Fast Level Set Transform (IX)

- III)
  - Wenn Menge der Punkte in P kein Loch hat, und Punkte in N alle vom Level < λ oder > λ sind, wird neuer Shape gebildet zu dem die Punkte P gehören.
  - Andernfalls werden alle Punkte des Bildes die in P gespeichert sind auf den Level λ gesetzt und Ende .

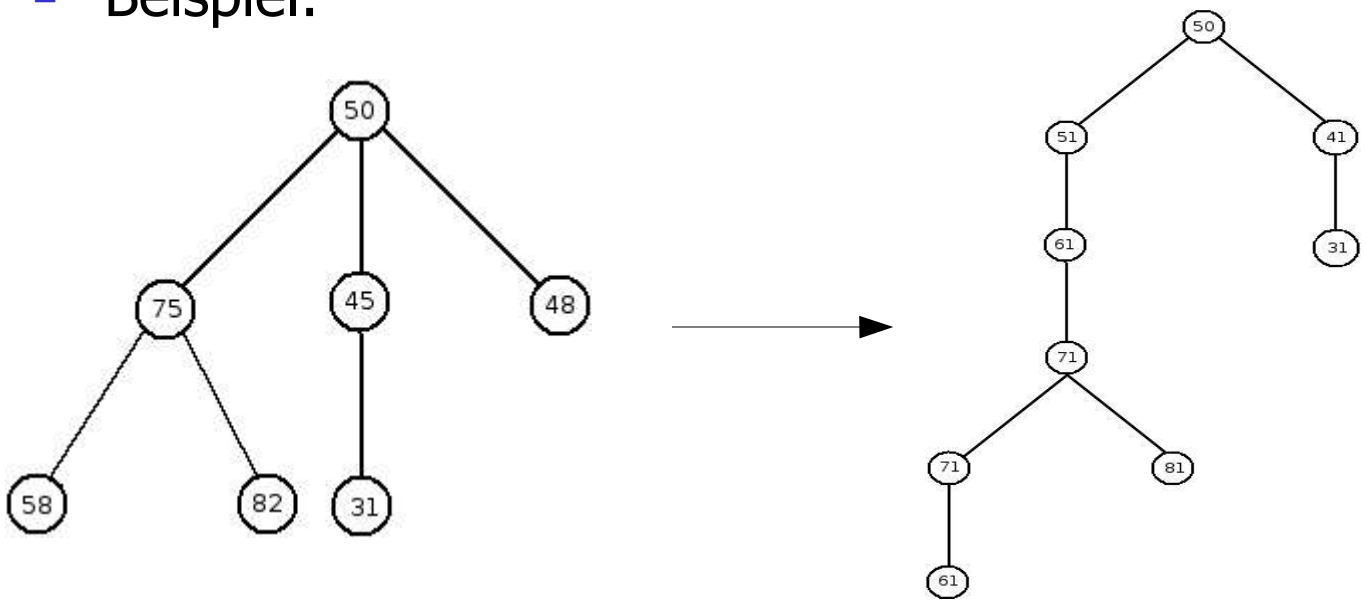
Fast Level Set Transform (X)



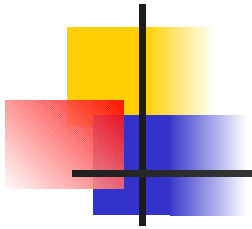
- IV) Jeder Punkt $Q \in P$
  - Sofern S_Q = NULL ist, kommt in den neuen Shape.
  - Andernfalls wandert man Baum nach oben, angefangen bei S_Q und bildet den resultierenden Shape als Kind.
- V) Setze λ auf den nächsten Level der Punkte aus N und gehe zurück zu Schritt II).

Fast Level Set Transform (XI)

- Erhalten damit den ursprünglichen TBLL
- Wollen ihn jetzt für beliebige Anzahl an Höhenlinien bilden.
- Beispiel:

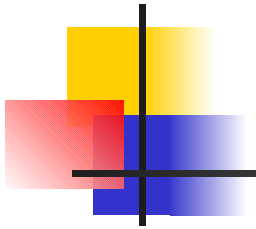


Gliederung



- Einleitung
- Fast Level Set Transform (FLST)
- Minimierung der Totalvariation mit FLST
- Beispiele

Minimierung der TV (I)



- Benutzen statt der zusammenhängenden Komponenten die Shapes, die uns der FLST geliefert hat.

  ➙ Damit wir keine Löcher haben.

- Wollen sowohl schwarze Bilder auf weissem Hintergrund als auch weisse Bilder auf schwarzem Hintergrund gleich behandeln
- Müssen Operator $T_t(u)$ konstruieren, indem wir alternativ obere oder untere Levelsets betrachten.

Minimierung der TV (II)

- Wir bezeichnen das Bild nun mit u, und die Shapes bezeichnen wir mit $E_{1,} E_{2,\ldots}, E_N = E_R$, wobei E_R die Wurzel des Baumes bezeichnet.
- Mit λ_i bezeichnen wir den Wert des Shapes E_i

Minimierung der TV (III)

- Definition: Die Totalvariation, die minimiert werden soll, wird durch

  $TV(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(E_\lambda)\,d\lambda$ definiert, wobei $P(E_\lambda)$ der Umfang von E_λ ist.

- Da wir mit Shapes arbeiten kann die Formel geschrieben werden als: $TV(u)=\sum_{i=1}^{N-1} P(E_i)|\lambda_i-\lambda_i^p|,$

- Wobei λ_i^p der Wert von E_i^p , und E_i^p der Elternshape von E_i ist.

Minimierung der TV (IV)

- Nun erstellt der Algorithmus eine Folge von Bildern $\{u^{(m)}\}$.
- $u^{(0)}=u$ und $u^{(m)}=T_t(u^{m-1})=(T_t)^m(u), m\geq 1.$
- Wobei T_t wie folgt definiert ist:
  Wir konstruieren für das Originalbild eine Folge $(u_0=u, u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})$ wobei N die Anzahl der Shapes ist, die der FLST geliefert hat. Wir setzen dann $T_t(u)=u_{N-1}$.
  Wenn u_{i-1} bekannt ist errechnet sich u_i durch:
  - $u_i(x)=inf\{u_{i-1}(x)+t\frac{P(E_i)}{|E_i|}, \lambda_i^p\}$,wenn $x\in E_i$ und $E_i(\leq\lambda_i)$
  - $u_i(x)=sup\{u_{i-1}(x)-t\frac{p(E_i)}{|E_i|}, \lambda_i^p\}$,wenn $x\in E_i$ und $E_i(\geq\lambda_i)$
  - $u_i(x)=u_{i-1}(x)$,wenn $x\notin E_i$

Minimierung der TV (V)

- Minimierungseigenschaft:
  Können zeigen, dass Totalvariation mit jedem Schritt abnimmt, wenn wir vorgegebenen Algorithmus verwenden.
- Es gilt:
  - Wenn E_i unterer Levelset: $\lambda_i \leq \lambda_i^p$
  - Wenn E_i oberer Levelset: $\lambda_i \geq \lambda_i^p$
  - $E_{1,} E_{2,\ldots} E_j$ die Endknoten
  - Nehmen an u_j bereits gebildet.
  - $\lambda_{i,j}$ und $\lambda_{i,j}^p$ die neuen Grauwerte im j-ten Schritt

Minimierung der TV (VI)

- Dann gilt:

$$TV(u_j)=\sum_{i=1}^{N-1} P(E_i)|\lambda_{i,j}-\lambda_{i,j}^p|=\sum_{i=1}^{j} P(E_i)|\lambda_{i,j}-\lambda_i^p|+\sum_{i=j+1}^{N-1} P(E_i)|\lambda_i-\lambda_i^p|.$$

- Da nur die Werte der Endknoten geändert wurden gilt:

$$\lambda_{i,j}^p=\lambda_i^p;\ 1\le i<N \quad \text{und} \quad \lambda_{i,j}=\lambda_i;\ j<i<N$$

- Die neuen Werte $\lambda_{i,j};\ 1\le i\le j$ entstehen durch:

$$inf\left\{\lambda_i+t\frac{P(E_i)}{|E_i|},\lambda_i^p\right\} \quad \text{oder} \quad sup\left\{\lambda_i-t\frac{P(E_i)}{|E_i|},\lambda_i^p\right\}$$

Minimierung der TV (VII)

- Allgemein:
  - Betrachten Shape E_i
  - Zugehöriger Grauwert wird das erste mal durch Konstruktion von u_i verändert.
  - Es gilt: $|\lambda_{i,i} - \lambda^p_{i,i}| < |\lambda_{i,i-1} - \lambda^p_{i,i-1}|$ da $\lambda^p_{i,i} = \lambda^p_{i,i-1}$ und $\lambda_{i,i}$ ergibt sich durch:

$$inf\left\{\lambda_{i,i-1} + t\frac{P(E_i)}{|E_i|}, \lambda^p_{i,i-1}\right\} \quad \text{oder} \quad sup\left\{\lambda_{i,i-1} - t\frac{P(E_i)}{|E_i|}, \lambda^p_{i,i-1}\right\}$$

Minimierung der TV (VIII)

- Grauwert des Shapes E_i durch weitere Konstruktion wie folgt verändert:
- Zwei Fälle beim Bilden von $u_k, i<k<N$:
  - $E_i \cap E_k = \emptyset \Rightarrow \lambda_{i,k-1} = \lambda_{i,k}$ und $\lambda^p_{i,k-1} = \lambda^p_{i,k}$
  - $E_i \subset E_k \Rightarrow$

$$\lambda_{i,k} = inf\left\{\lambda_{i,k-1} + t\frac{P(E_k)}{|E_k|}, \lambda^p_{i,k-1}\right\} \text{ oder } sup\left\{\lambda_{i,k-1} - t\frac{P(E_k)}{|E_k|}, \lambda^p_{i,k-1}\right\}$$

Da Elternshape von E_i auch in E_k wird $\lambda^p_{i,k-1}$ auf selbe Weise verändert wie $\lambda_{i,k-1}$.

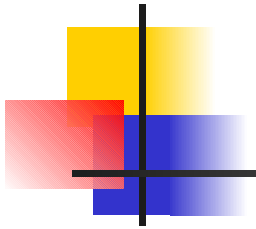
- $\longrightarrow$ $|\lambda_{i,k} - \lambda^p_{i,k}| = |\lambda_{i,k-1} - \lambda^p_{i,k-1}|$

Minimierung der TV (IX)

- Haben also folgende Eigenschaft:
  - $|\lambda_{i,k-1} - \lambda^p_{i,k-1}| \leq |\lambda_{i,k} - \lambda^p_{i,k}|$
- Daraus schliessen wir:

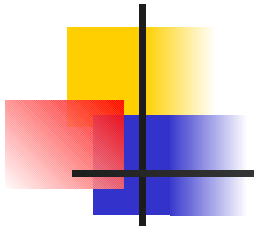
$$TV(T_t(u)) = TV(u_{N-1}) \leq TV(u).$$

Minimierung der TV (X)



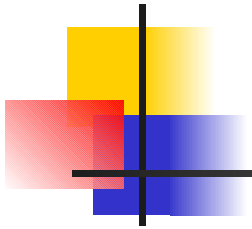
- Entrauschungseffekt:
  - C eine Teilmenge des Bildes , mit zu grosser Krümmung → diese Teilmenge verschwindet.
  - Kanten von gutdefinierten grossen Objekten/Flächen bleiben erhalten.
  - Rauschen befällt in der Regel nur einzelne Pixel oder extrem kleine unregelmässige Regionen
    - → diese beiden Eigenschaften sorgen dafür, dass das Rauschen verschwindet, aber das Bild als ganzes erhalten bleibt.

Minimierung der TV (XI)



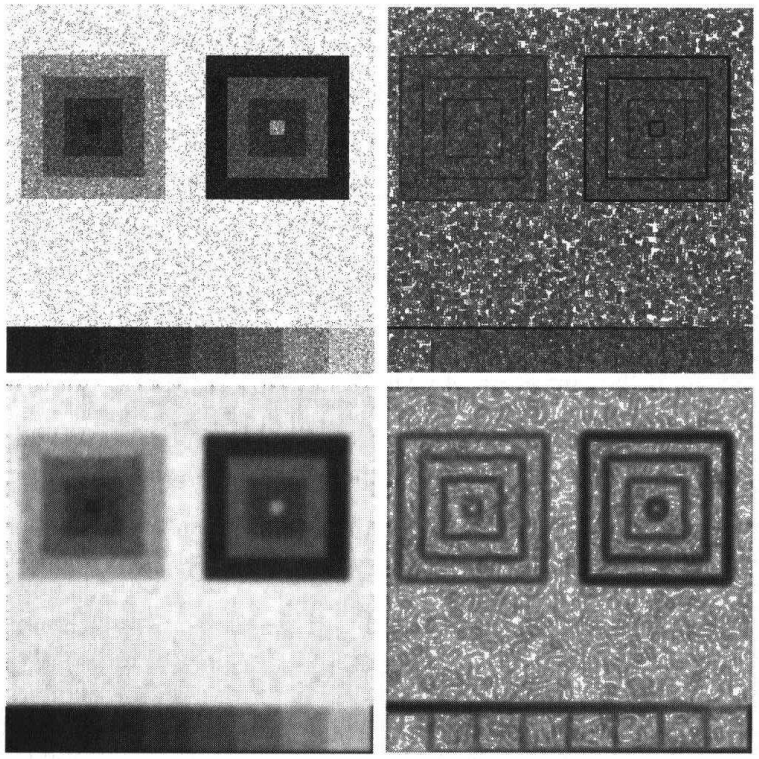
- Probleme bei Farbbildern:
  - Farbbilder bestehen in der Regel aus mehreren Farbkanälen, die übereinandergelegt werden.
  - Wendet man Algorithmus auf jeden Kanal einzeln an, kann es passieren dass sogenannte 'falsche Farben' auftreten.
  - Man kann das unter anderem verhindern, indem man die Farbkanäle geeignet wählt.
    - → kein triviales Problem.

Gliederung



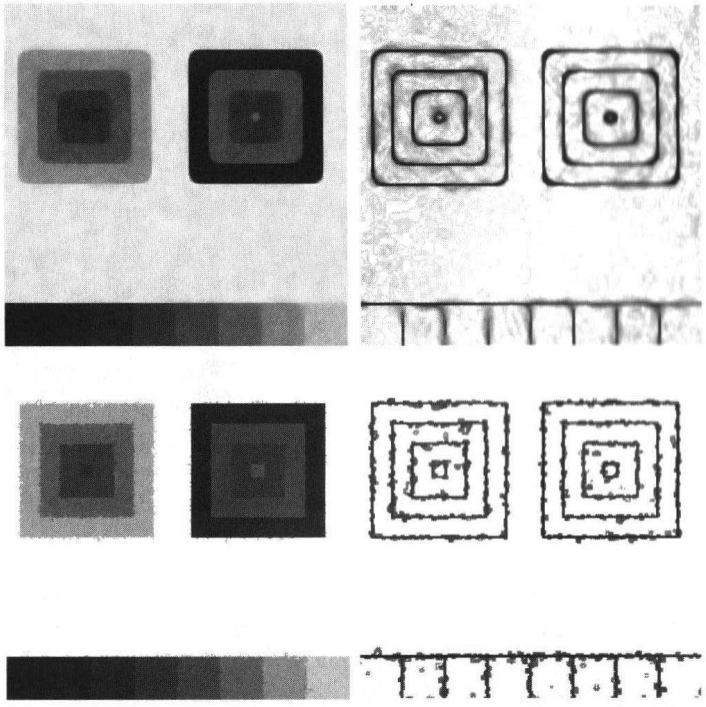
- Einleitung
- Fast Level Set Transform (FLST)
- Minimierung der Totalvariation mit FLST
- Beispiele

Beispiele (I)



- Verrauschtes Bild (das Original)
- Mit Wärmeleitungs-gleichung behandelt.
- Beachte die Dicke der Grenzen

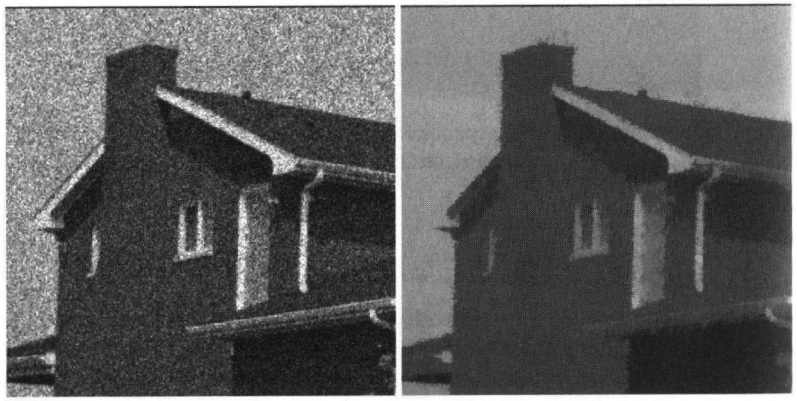
Beispiele (II)



- Ein sogenannter MCM-Algorithmus
- Abgerundete Ecken

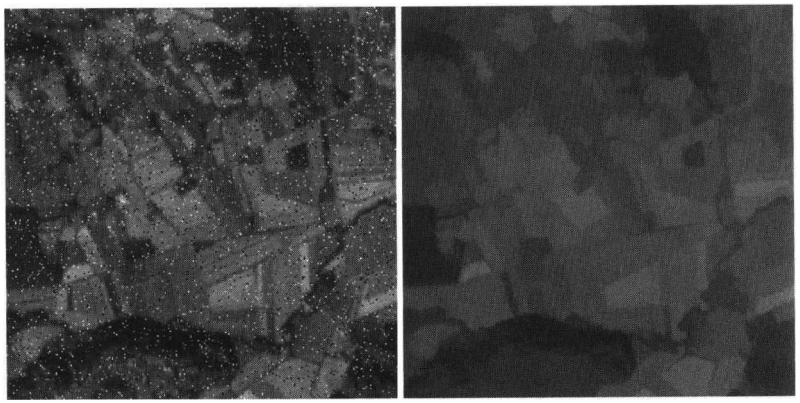
- Bild mit unserem Algorithmus bearbeitet.

Beispiele (III)



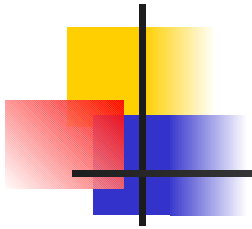
- Auf diesem Bild lag vorher ein Gauss' sches Rauschen

Beispiele (IV)

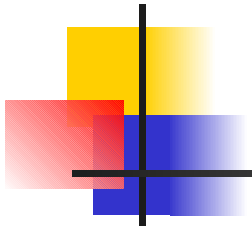


- Dieses Satellitenbild war mit 'Impulse-Noise' verunreinigt.

Literatur:



- S. Osher, N. Paragios, eds. „Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics“, Springer, 2003.



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit