Verschiedene Begriffe der Dimension

Marion Bendig

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei der Betrachtung von Fraktalen spielt der Begriff der Dimension eine wichtige Rolle. Hierfür gibt es zahlreiche Definitionen, die z.T. aber nur für bestimmte Arten von Mengen anwendbar sind. In dieser Hauptseminar-Ausarbeitung befasse ich mich mit verschiedenen häufig gebrauchten Dimensionen. Zunächst werde ich die für das Verständnis wichtigen Grundlagen der Maßtheorie zusammenfassen und auf das Hausdorffsche Maß sowie die Hausdorffsche Dimension eingehen. Dies wird beides sehr knapp und ggf. unvollständig geschehen, da es nicht Inhalt meines Themas ist. Nach einer kurzen Klärung des Begriffes "fraktale Dimension" werde ich dann auf eine Auswahl von Dimensionsdefinitionen eingehen, deren Eigenschaften diskutieren und diese vergleichen.

2 Grundlagen

2.1 Maßtheorie

Zum Verständnis des Begriffes der fraktalen Dimension genügt es, Maße auf Untermengen des $\mathbb{R}^n$ zu betrachten.
Ein Maß beschreibt die Größe einer Menge und wird mit μ bezeichnet. Es ist definiert als positive Zahl, die jeder Untermenge des $\mathbb{R}^n$ zugeordnet ist, mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die leere Menge hat das Maß 0.
(2) Wenn A eine Teilmenge von B ist, dann ist das Maß von B mindestens so groß wie das Maß von A.
(3) Wenn eine Menge die Vereinigung von (nicht notwendiger Weise disjunkten) Teilmengen ist, so ist die Summe der Teilmengen-Maße mindestens so groß wie das Maß der Gesamtmenge. Es gilt Gleichheit, wenn die Teilmengen disjunkte Borelmengen sind.
Außerdem gilt für Borelmengen A und B, dass $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
Die Menge, auf die sich ein Maß bezieht, wird Träger genannt. Formell wird der Träger definiert als kleinste abgeschlossene Menge X, für die gilt, dass $\mathbb{R}^n \setminus X$ das Maß 0 hat.
Ein Maß μ auf einer beschränkten Untermenge A des $\mathbb{R}^n$ wird Masseverteilung genannt, wenn gilt: $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Das Maß $\mu(A)$ kann dann als Masse der Menge A verstanden werden.

2.2 Hausdorffsches Maß und Dimension

Sei U eine nicht-leere Untermenge des $\mathbb{R}^n$, dann ist das Diameter $|U|$ (d.h. der Durchmesser) definiert als größte Entfernung zwischen zwei Punkten in U. Eine δ-Überdeckung einer Menge F ist eine abzählbare oder endliche Menge von Mengen, die ein Diameter von höchstens δ besitzen und F überdecken. Das Infimum von $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ über alle δ-Überdeckungen $\{U_i\}$ von F für irgendeine nicht-negative Zahl s ist $\mathcal{H}^s_\delta(F)$. Je kleiner nun δ gewählt wird, umso geringer wird die Anzahl der erlaubten Überdeckungen von F und umso größer wird $\mathcal{H}^s_\delta(F)$. Das s-dimensionale Hausdorff-Maß wird definiert als $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Dieser Grenzwert existiert für jede Teilmenge F des $\mathbb{R}^n$, ist aber normalerweise 0 oder ∞.
Wird nun $\mathcal{H}^s(F)$ in Abhängigkeit von s als Graph aufgetragen, sieht man, dass es ein s gibt, für das $\mathcal{H}^s(F)$ von ∞ auf 0 springt. Dieses s wird die Hausdorff-Dimension $dim_H(F)$ genannt und ist für jede Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ definiert. Es gilt also:

$$dim_H(F) = inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

3 Fraktale Dimension

3.1 Begriffsklärung

Warum wird von einer fraktalen, also gebrochenen, Dimension gesprochen? Das Hausdorffsche Maß ist eine Verallgemeinerung der Begriffe Länge, Fläche und Volumen. Skaliert man eine Kurve mit dem Faktor λ, so wird die Kurvenlänge mit λ multipliziert. Wird eine Fläche mit λ skaliert, multipliziert man mit λ^2, ein Volumen wird durch Multiplikation mit dem Faktor λ^3 skaliert. Der Exponent des Skalierungsfaktors Lambda entspricht also der Dimension. Bei Fraktalen ist die Gleichung $Ma\ss_{skaliert} = Ma\ss_{alt} \cdot \lambda^{dim}$ nicht für ganzzahlige Dimension dim lösbar. Es muss eine gebrochene (fraktale) Dimension eingeführt werden, wie z.B. die Hausdorff-Dimension, die diese Skalierungseigenschaft erhält.

3.2 Teilerdimension

Wie bei der Hausdorff-Dimension taucht auch bei den meisten anderen Definitionen für Dimensionen das δ als Skalierung des Maßstabs auf: Eine Menge wird so gemessen, dass Unregelmäßigkeiten, die kleiner als δ sind, ignoriert werden, d.h. je kleiner das δ ist, umso genauer wird die Menge approximiert. Nun wird beobachtet, wie sich die Messgröße verhält, wenn δ gegen 0 strebt.

Betrachtet man z.B. eine Kurve F, so kann der Maßstab $M_\delta(F)$ die Anzahl der Schritte der Länge δ sein, mit denen F „abgeschritten“ wird. Um eine Dimension von F zu bestimmen, kann eine ähnliche Gleichung wie oben aufgestellt und für $\delta \to 0$ betrachtet werden: Seien c und s Konstanten, s ist die Teilerdimension, c die s-dimensionale Länge von F. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & c \sim M_\delta(F) \cdot \delta^s \\ \Leftrightarrow \quad & M_\delta(F) \sim c \cdot \delta^{-s} \\ \Rightarrow \quad & \log M_\delta(F) \simeq \log c - s \cdot \log \delta, \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile besagt, dass die Differenz beider Seiten mit δ gegen 0 strebt. Damit gilt für s:

$$s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Der Term $\frac{\log c}{-\log \delta}$ verschwindet für $\delta \to 0$, da c konstant ist und $\lim_{\delta \to 0} \log \delta = \infty$.
Es kann sein, dass für den Maßstab $M_\delta(F)$ keine exakte Formel existiert. Dann wird der Wert für s durch eine obere und eine untere Grenze angenähert.
Trägt man $\log M_\delta(F)$ gegen $\log \delta$ als Graph auf, kann s als minus dem Wert der Steigung abgeschätzt werden. Dies ist besonders für rechnerische und experimentelle Zwecke nützlich. Für Beispiele aus der Wirklichkeit muss man mit einem endlichen Intervall für δ rechnen, Theorie und Praxis gehen hier auseinander, wenn δ zu klein wird.

3.3 Eigenschaften einer Dimension

Die vorangegangenen Überlegungen sind vereinfacht und treffen nicht zwingend auf alle möglichen Definitionen von Dimensionen zu. Es ist sogar so, dass bei verschiedenen Definitionen verschiedene Werte für die Dimension einer Menge herauskommen können und dass unterschiedliche Dimensionen teilweise sehr unterschiedliche Eigenschaften haben. Es gibt eine Anzahl von Eigenschaften, die für eine Dimension wünschenswert sind (und die auf die Hausdorff-Dimension zutreffen):

(1) *Monotonie:* $E \subset F \Rightarrow dim(E) \leq dim(F)$
(2) *Stabilität:* $dim(E \cup F) = max\big(dim(E), dim(F)\big)$
(3) *Stabilität gegenüber abzählbarer Vereinigung:* $dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} dim(F_i)$ (4) *Geometrische Invarianz:* $dim(f(F)) = dim(F)$, wenn f eine affine Transformation im $\mathbb{R}^n$ (z.B. Translation, Rotation, Ähnlichkeit oder Gleichheit) ist
(5) *Lipschitz-Invarianz:* $dim(f(F)) = dim(F)$, wenn f ein Bi-Lipschitz-Transformation ist, d.h., wenn für $f : X \to Y$ gilt:
$c_1 \cdot |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 \cdot |x - y| \quad f\ddot{u}r\ x, y \in X,$
$0 < c_1 \leq c_2 < \infty$
(6) *Abzählbare Mengen:* $dim(F) = 0$, wenn F abzählbar oder endlich ist.
(7) *Offene Mengen:* F ist offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n \Rightarrow dim(F) = n$
(8) *Glatte Mannigfaltigkeiten:* $dim(F) = m$, wenn F eine glatte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit(z.B. Kurve, Oberfläche usw.) ist.

Die Eigenschaft der Monotonie trifft auf alle im Folgenden hier genannten Dimensions-Definitionen zu, Stabilität auf die meisten. Die Eigenschaften (3) und (6) treffen nicht auf alle üblichen Definitionen zu, wohl aber (4) und (5). Eigenschaft (7) und (8) stellen sicher, dass die Definition einer Dimension eine Erweiterung der klassischen Definition ist.

4 Boxdimension

4.1 Definition

Sei F eine nicht-leere, beschränkte Untermenge des $\mathbb{R}^n$. Die untere und obere Boxdimension sind definiert als

$$\underline{dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Wenn beide übereinstimmen und der Grenzwert existiert, ist

$$dim_B(F) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

die Boxdimension von F. $N_\delta(F)$ kann dabei eine der folgenden Anzahlen sein:

- die kleinste Anzahl von geschlossenen Kugeln mit Radius δ, die F überdecken
- die kleinste Anzahl von Würfeln mit Seitenlänge δ, die F überdecken
- die Anzahl von Würfeln eines δ-Gitters, die sich mit F überschneiden
- die kleinste Anzahl von Mengen mit einem Diameter von höchstens δ, die F überdecken
- die größte Anzahl von disjunkten Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkt in F

All diese Definitionen sind äquivalent. Die Beschränkung auf nicht-leere, beschränkte Mengen verhindert Probleme mit dem Logarithmus („$\log 0$“ oder „$\log \infty$“). Ein Würfel bzw. eine Kugel ist jeweils in der entsprechenden Dimension definiert, z.B. ein Quadrat oder ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ oder ein Intervall im $\mathbb{R}^1$.
Anschaulich kann die Boxdimension als die logarithmische Geschwindigkeit betrachtet werden, mit der $N_\delta(F)$ sich vergrößert, wenn δ gegen 0 strebt. Es ist also der Gradient des Graphen, wenn man $\log N_\delta(F)$ gegen $-\log \delta$ aufträgt.

4.2 Beweis der Äquivalenz

Die Äquivalenz der fünf Definitionen für die Boxdimension ist nicht in jedem Fall sofort zu sehen und soll jetzt gezeigt werden. Sei $N_\delta(F)$ die kleinste Anzahl von Mengen mit einem Diameter von höchstens δ, die F überdecken. $N'_\delta(F)$ sei zunächst die Anzahl von Würfeln eines δ-Gitters, die sich mit F überschneiden. Diese Würfel sind zugleich Mengen mit einem Diameter von $\delta\sqrt{n}$, die F überdecken. Damit gilt:

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F)$$

D.h. entweder ist dies schon die minimale Anzahl von solchen Mengen oder man könnte eine andere Überdeckung mit Maximal-Diameter $\delta\sqrt{n}$ erzeugen, die noch weniger Mengen braucht. Wenn $\delta\sqrt{n} < 1$, dann ist

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} = \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta},$$

und im Grenzwert

$$\underline{dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

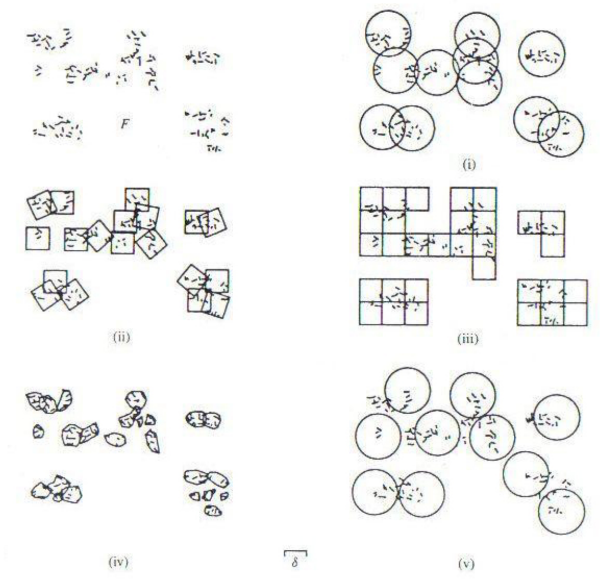

Abbildung 1: Verschiedene Definitionen der Boxdimension über (i) die kleinste Anzahl von geschlossenen Kugeln mit Radius δ, die F überdecken, (ii) die kleinste Anzahl von Würfeln mit Seitenlänge δ, die F überdecken, (iii) die Anzahl von Würfeln eines δ-Gitters, die sich mit F überschneiden, (iv) die kleinste Anzahl von Mengen mit einem Diameter von höchstens δ, die F überdecken und (v) die größte Anzahl von disjunkten Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkt in F

und

$$\overline{dim}_B(F) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Auf der anderen Seite kann man die umgekehrte Ungleichung herstellen, indem man sich klarmacht, dass jede Menge mit einem Diameter von höchstens δ in 3^n Gitterwürfeln mit Seitenlänge δ enthalten ist, nämlich jeweils einem Würfel, der einen Punkt der Menge F enthält und den angrenzenden Würfeln. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
& N'_\delta(F) \leq 3^n \cdot N_\delta(F) \\
\Rightarrow\quad & \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log 3^n \cdot N_\delta(F)}{-\log\delta} \\
und\quad & \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log 3^n \cdot N_\delta(F)}{-\log\delta} \\
\Rightarrow\quad & \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{dim}_B(F) \\
und\quad & \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \overline{dim}_B(F).
\end{aligned}$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Definitionen gezeigt.
Die Äquivalenz der Diameter-Definition mit der Definition, die die Anzahl beliebiger Würfel, die F überdecken, betrachtet, kann auf dieselbe Art gezeigt werden, da jeder Würfel mit Seitenlänge δ ein Diameter von $\delta\sqrt{n}$ hat und jede Menge mit einem Diameter von höchstens δ in einem Würfel enthalten ist, der eine Seitenlänge von δ hat. Dasselbe gilt für die Überdeckung durch Kugeln mit Radius δ, eine solche Kugel hat ein Diameter von $2\cdot\delta$ und eine Menge mit einem Diameter von höchstens δ ist in einer Kugel mit Radius $\delta/2$ enthalten.
Als Letztes ist die auf dem ersten Blick erstaunliche Äquivalenz dieser Definitionen mit der letzten oben aufgeführten zu zeigen. Sei $N'_\delta(F)$ die größte Anzahl von disjunkten Kugeln $B_1, \ldots, B_{N'_\delta(F)}$ mit Radius δ, deren Mittelpunkte in F liegen. Ein Punkt $x \in F$ muss innerhalb eines Umkreises von höchstens δ von einem der B_i liegen. Wäre dies nicht der Fall, so könnte die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius δ zu der Menge der disjunkten Kugeln hinzugefügt werden, was der Maximalität von $N'_\delta(F)$ widerspräche. Man erhält also eine vollständige Überdeckung von F, wenn man den Radius der Kugeln $B_1, \ldots, B_{N'_\delta(F)}$ verdoppelt. Damit erhält man ein Diameter von 4δ und es folgt

$$N_{4\delta}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Seien nun $U_1 \ldots U_k$ Mengen mit einem Diameter $\leq \delta$, die F überdecken. Die U_j müssen damit auch die Mittelpunkt der B_i überdecken, was bedeutet, dass jedes B_i mindestens ein U_j enthält. Da die Kugeln disjunkt sind, gibt es mindestens so viele U_j wie B_i:

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F).$$

Wie oben kann man von diesen beiden Formeln den Logarithmus nehmen und den Grenzwert für $\delta \to 0$ betrachten und kommt damit wiederum auf die Gleichheit beider Definitionen für die Boxdimension, d.h. man erhält denselben Wert, wenn man $N'_\delta(F)$ für $N_\delta(F)$ in die Definition einsetzt.

4.3 Minkowski-Dimension

Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq \delta\ f\ddot{u}r\ y \in F\}$ die δ-Nachbarschaft von F. Dann gilt:

$$\underline{dim}_B(F) = n - \overline{lim}_{\delta\to 0} \frac{\log vol^n(F_\delta)}{\log\delta}$$

und

$$\overline{dim}_B(F) = n - \underline{lim}_{\delta\to 0} \frac{\log vol^n(F_\delta)}{\log\delta}$$

Es wird also betrachtet, wie schnell das n-dimensionale Volumen der δ-Nachbarschaft von F schrumpft, wenn δ gegen 0 geht. Ist F ein Punkt im $\mathbb{R}^n$, so ist F_δ eine Kugel mit $vol^3(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$. Ist $F \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Strecke der Länge l, dann ist $vol^3(F_\delta) \sim \pi l \delta^2$, da F durch einen Zylinder angenähert werden kann. Wenn $F \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Flächeninhalt a ist, so kann das Volumen mit der Formel Grundfläche mal Höhe angenähert werden: $vol^3(f_\delta) \sim 2a\delta$. In jedem der drei Beispiel-Fälle ist $vol^3(f_\delta) \sim c\delta^{3-s}$ mit $s = dim(F)$. Der Koeffizient c wird Minkowski-Inhalt von F genannt und ist ein Maß für die Länge, die Fläche oder das Volumen der Menge, je nach Dimension.
Der s-dimensionale Inhalt von F ist definiert als der positive endliche Grenzwert von $\frac{vol^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}}$ für $\delta \to 0$, falls dieser exisitert. Durch Umformung erhält man:

$$\begin{aligned}
& \frac{vol^n(F_\delta)}{\delta^{n-s}} = c \\
\Leftrightarrow\quad & \log vol^n(F_\delta) - (n-s)\log\delta = \log c \\
\Leftrightarrow\quad & s = \frac{\log c}{\log\delta} + n - \frac{\log vol^n(F_\delta)}{\log\delta} \\
\Rightarrow\quad & \lim_{\delta\to 0} s = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log c}{\log\delta} + \lim_{\delta\to 0} n - \lim_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{\log\delta} \\
\Leftrightarrow\quad & s = n - \lim_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{\log\delta},
\end{aligned}$$

mit $vol^n(F_\delta) > 0$, $c > 0$ und $\delta > 0$. Wenn der Grenzwert nicht existiert, kann es trotzdem möglich sein, einen oberen und unteren Grenzwert zu bestimmen. Der oben definierte Zusammenhang von s (bzw. dem obere und unteren Grenzwert) mit der (oberen und unteren) Boxdimension lässt sich folgendermaßen beweisen:

Wenn $F \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $N_\delta(F)$ Kugeln mit Radius $\delta < 1$ überdeckt werden kann, dann kann F_δ mit der gleichen Anzahl von Kugeln überdeckt werden, die dieselben Mittelpunkt und einen Radius von 2δ haben. Wenn c_n das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist, gilt also:

$$vol^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n,$$

d.h. das Volumen von F_δ ist höchstens so groß wie das Gesamtvolumen dieser $N_\delta(F)$ Kugeln. Mit dieser Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \frac{\log N_\delta(F) + \log 2^n c_n + n\log\delta}{-\log\delta} \\
\Rightarrow\quad & \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \\
& \qquad + \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log 2^n c_n}{-\log\delta} + \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{n\log\delta}{-\log\delta} \\
und\quad & \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \\
& \qquad + \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log 2^n c_n}{-\log\delta} + \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{n\log\delta}{-\log\delta} \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \overline{dim}_B(F) - n \\
und\quad & \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \leq \underline{dim}_B(F) - n
\end{aligned}$$

Die entgegengesetzte Ungleichheit erhält man, indem man $N_\delta(F)$ disjunkte Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkten in F betrachtet und deren Volumen aufaddiert. Diese Summe ist höchstens so groß wie das n-dimensionale Volumen von F:

$$\begin{aligned}
& N_\delta(F) c_n \delta^n \leq vol^n(F_\delta) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} + \frac{\log c_n}{-\log\delta} + \frac{n\log\delta}{-\log\delta} \leq \frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \\
\Rightarrow\quad & \overline{dim}_B(F) - n \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \\
und\quad & \underline{dim}_B(F) - n \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \overline{dim}_B(F) = n + \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \\
und\quad & \underline{dim}_B(F) = n + \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{-\log\delta} \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{dim}_B(F) = n - \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{\log\delta} \\
und\quad & \underline{dim}_B(F) = n - \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log vol^n(F_\delta)}{\log\delta} \qquad q.e.d.
\end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit dieser Gleichung wird die Boxdimension auch Minkowski-Dimension oder Minkowski-Bouligand-Dimension genannt.

4.4 Vergleich mit der Hausdorffschen Dimension

Es gibt viele Fälle, in denen die Boxdimension mit der Hausdorff-Dimension übereinstimmt. Im Allgemeinen gilt aber

$$dim_H(F) \leq \underline{dim}_B(F) \leq \overline{dim}_B(F) \qquad \forall F \subset \mathbb{R}^n,$$

denn wenn F mit $N_\delta(F)$ Mengen mit einem Diameter von δ überdeckt werden kann, dann ist

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s : \{U_i\}\ \delta - \ddot{U}berdeckungen\ von\ F\right\}$$
$$\leq N_\delta(F)\delta^s$$

und mit $1 < \mathcal{H}^s = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(F)$ und δ klein genug:

$$\begin{aligned}
& \log N_\delta(F) + s\log\delta > 0 \\
\Rightarrow\quad & s \leq \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.
\end{aligned}$$

Ähnlich wie bei der Hausdorffschen Dimension lässt sich die Boxdimension durch einen Graphen veranschaulichen, indem man $N_\delta(F)\delta^s$ gegen s aufträgt. Für $s < dim_B(F)$ geht dieser Wert gegen ∞, für $s > dim_B(F)$ gegen 0 (jeweils für kleine δ), der Graph macht also bei $dim_B(F)$ einen Sprung. Der Unterschied zwischen Boxdimension und Hausdorffdimension wird klar, wenn man die Definitionen von $N_\delta(F)\delta^s$ und $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ direkt vergleicht:

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{\sum_i \delta^s : \{U_i\}\ (endl.)\ \delta - \ddot{U}berdeckung\ von\ F\right\}$$
$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^s : \{U_i\}\ \delta - \ddot{U}berdeckung\ von\ F\right\}.$$

Für die Berechnung der Hausdorff-Dimension werden verschiedene Durchmesser $|U_i|$ betrachtet, für die Boxdimension immer dasselbe δ. Die Boxdimension gibt einen Indikator dafür, wie effizient eine Menge von kleinen Mengen gleicher Größe überdeckt werden kann, die Hausdorff-Dimension benutzt kleine Überdeckungsmengen unterschiedlicher Größe. Das hat zur Folge, dass die Boxdimension einfacher zu berechnen ist.

4.5 Eigenschaften und Probleme

Die folgenden Eigenschaften der Boxdimension gleichen denen der Hausdorff-Dimension:
(1)Eine glatte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit $F \subset \mathbb{R}^n$ hat Boxdimension $dim_B(F) = m$.
(2)$\overline{dim}_B$ und $\underline{dim}_B$ sind monoton.
(3)$\overline{dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{dim}_B(E), \overline{dim}_B(F)\}$, d.h. $\overline{dim}_B$ ist endlich stabil. Dies gilt nicht für $\underline{dim}_B$.
(4)$\overline{dim}_B$ und $\underline{dim}_B$ sind Bi-Lipschitz-invariant.

Die folgende Eigenschaft scheint auf den ersten Blick erfreulich, hat aber Nachteile zur Folge:

$$\overline{dim}_B(\overline{F}) = \overline{dim}_B(F)$$

und

$$\underline{dim}_B(\overline{F}) = \underline{dim}_B(F),$$

wobei $\overline{F}$ der Abschluss von F ist, d.h. die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die F enthält.
Der Beweis verwendet die Kugel-Definition der Boxdimension: Seien $B_1 \dots B_k$ geschlossene Kugeln mit Radius δ. Wenn die geschlossene Menge $\bigcup_{i=1}^k B_i$ F enthält, enthält sie auch $\overline{F}$. Also entspricht die kleinste Anzahl von Kugeln mit Radius δ, die F überdecken, der kleinsten Anzahl von Kugeln mit demselben Radius, die die evtl. größere Menge $\overline{F}$ überdeckt und damit ist die (obere und untere) Boxdimension dieser beiden Mengen gleich.
Eine direkte Folge dieser Gleichheit ist, dass $\overline{dim}_B(F) = \underline{dim}_B(F) = n$, wenn F eine dichte Untermenge eines offenen

Intervalls des $\mathbb{R}^n$ ist. Abzählbare Mengen können damit eine Boxdimension haben, die $\neq 0$ ist. Wenn F z.B. die abzählbare Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 ist, dann ist $\overline{F} = [0,1]$, so dass $\overline{dim}_B(F) = \underline{dim}_B(F) = 1$. Außerdem hat die abzählbare Vereinigung der Mengen, die jeweils nur eine rationale Zahl enthalten, die Boxdimension 1, obwohl jede einzelne dieser Mengen die Dimension 0 hat. Es kann also passieren, dass $dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \neq \sup_i\{dim_B(F_i)\}$.
Diese Probleme können vermieden werden, wenn man nur abgeschlossene Mengen betrachtet, aber es bleiben trotzdem Schwierigkeiten erhalten. Z.B. hat die kompakte Menge $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\}$ Boxdimension $\frac{1}{2}$, obwohl alle Elemente der Menge bis auf die 0 einzeln stehen.
Trotz dieser Nachteile ist die Boxdimension in der Theorie oft nützlich, besonders in ihrem Zusammenhang mit der Hausdorffschen Dimension.

4.6 Modifikation

Die Boxdimension kann so modifiziert werden, dass die eben aufgeführten Probleme vermieden und alle Eigenschaften erfüllt werden, die im Abschnitt 3.3 genannt wurden. Dadurch wird aber die Berechnung verkompliziert.
Sei F eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Die modifizierte (obere und untere) Boxdimension ist definiert als

$$\overline{dim}_{MB}(F) = \inf_{\{F_i\}} \Big\{ \sup_i \{\overline{dim}_B(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\} \Big\}$$

und

$$\underline{dim}_{MB}(F) = \inf_{\{F_i\}} \Big\{ \sup_i \{\underline{dim}_B(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\} \Big\},$$

wobei $\{F_i\}$ die abzählbaren Überdeckungen von F sind. Man zerlegt also F in eine abzählbare Anzahl von Teilmengen $F_1, F_2, \ldots$, so dass die größte Teilmenge eine möglichst kleine Boxdimension hat. Es gilt:

$$\underline{dim}_{MB}(F) \leq \underline{dim}_B(F)$$

und

$$\overline{dim}_{MB}(F) \leq \overline{dim}_B(F).$$

Wenn F abzählbar ist, dann ist $\underline{dim}_{MB}(F) = \overline{dim}_{MB}(F) = 0$, indem man die F_i als Mengen mit jeweils einem einzigen Punkt wählt.
Für jedes $F \subset \mathbb{R}^n$ gelten die Beziehungen

$$0 \leq dim_H(F) \leq \underline{dim}_{MB}(F) \leq \overline{dim}_{MB}(F) \leq \overline{dim}_B(F) \leq n.$$

Für kompakte Megen kann man allein durch Betrachtung der Boxdimension nachprüfen, ob diese mit der modifizierten Boxdimension übereinstimmt:
Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wenn gilt, dass für alle offenen Mengen V, die F schneiden, $\overline{dim}_B(F \cap V) = \overline{dim}_B(F)$, dann ist $\overline{dim}_B(F) = \overline{dim}_{MB}(F)$. Dasselbe gilt für die untere Boxdimension.
Für den Beweis wird Baires Kategorie-Theorem verwendet, das besagt, dass für $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i abgeschlossen $\forall i$, ein Index i und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $F \cap V \subset F_i$. Für dieses i ist $\overline{dim}_B(F_i) = \overline{dim}_B(F)$. Mit $\overline{dim}_B(\overline{F}) = \overline{dim}_B(F)$ kann die Definition der modifizierten Boxdimension umgeschrieben werden:

$$\overline{dim}_{MB}(F) =$$

$$\inf_{\{F_i\}} \Big\{ \sup_i \{\overline{dim}_B(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,\ F_i \ abgeschlossene\ Mengen\} \Big\}$$

$$\geq \overline{dim}_B(F).$$

Die entgegengesetzte Ungleichung wurde oben schon festgestellt, so dass $\overline{dim}_B(F) = \overline{dim}_{MB}(F)$ folgt. Auf dieselbe Weise beweist man die Gleichheit der unteren Dimensionen.

5 Packmaß und Packdimension

Für den Nutzen der Boxdimension kann es ein Nachteil sein, dass diese nicht unter der Verwendung eines Maßes definiert wird, auch nicht in der modifizierten Version. Es ist aber möglich, die Ideen der Boxdimension entsprechend weiterzuführen. Dafür betrachtet man eine dichte Packung aus disjunkten Kugeln mit verschiedenen kleinen Radien.
Sei $s \geq 0$, $\delta \geq 0$ und $\{B_i\}$ seien Mengen disjunkter Kugeln mit Radien $\leq \delta$ und Mittelpunkten in F. Es wird definiert:

$$\mathcal{P}_\delta^s(F) = \sup \Big\{ \sum_i |B_i|^s \Big\}.$$

$\mathcal{P}_\delta^s(F)$ verkleinert sich mit δ, es existiert der Grenzwert $\mathcal{P}_0^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{P}_\delta^s(F)$. Da $\mathcal{P}_0^s(F)$ kein Maß ist, wird die Definition abgeändert zu

$$\mathcal{P}^s(F) = \inf \Big\{ \sum_i \mathcal{P}_0^s(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Big\},$$

was ein Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist und s-dimensionales Packmaß genannt wird. Die Packdimension wird dann definiert als

$$dim_P(F) = \sup \{s : \mathcal{P}^s(F) = \infty\} = \inf \{s : \mathcal{P}^s(F) = 0\}.$$

Durch das zugrundeliegende Maß ist diese Dimension automatisch monoton. Es gilt sogar für alle abzählbaren Mengen von Mengen $\{F_i\}$, dass

$$dim_P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) = \sup_i \{dim_P(F_i)\},$$

da, wenn $s > dim_P(F_i)\ \ \forall i$, folgt, dass $\mathcal{P}^s(\bigcup_i F_i) \leq \sum_i \mathcal{P}^s(F_i) = 0$, was $dim_P(\bigcup_i F_i) \leq s$ impliziert.
Betrachtet man die Beziehung der Packdimension mit den anderen Definitionen für Dimensionen, stellt sich folgender Zusammenhang heraus:

$$dim_H(F) \leq \underline{dim}_{MB}(F) \leq \overline{dim}_{MB}(F) = dim_P(F) \leq \overline{dim}_B(F)$$

Zunächst muss man beweisen, dass $dim_P(F) \leq \overline{dim}_B(F)$: Für $dim_P(F) = 0$ ist dies klar. Sonst wähle t und s so, dass $0 < t < s < dim_P(F)$. Dann ist $\mathcal{P}^s(F) = \infty$ und damit $\mathcal{P}_0^s(F) = \infty$. Sei nun $0 < \delta \leq 1$ gegeben, dann gibt es disjunkte Kugeln $\{B_i\}$ mit Radien $\leq \delta$ und Mittelpunkten in F, so dass $1 < \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s$. Abgenommen, für jedes k gäbe es genau n_k Kugeln, für die $2^{-k-1} < |B_i| \leq 2^{-k}$ gilt, dann wäre $1 < \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}$. Es muss ein k geben mit $n_k > 2_{kt}(1 - 2^{t-s})$, ansonsten wäre diese Summe höchstens $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kt-ks}(1 - 2^{t-s}) = 1$ (mit der geometrischen Reihe). Diese n_k Kugeln enthalten Kugeln mit Radius $2^{-k-2} \leq \delta$, deren Mittelpunkte in F liegen. Wenn nun $N_\delta(F)$ die größte Anzahl disjunkter Kugeln mit Radius in δ und Mittelpunkten in F ist, dann ist demzufolge $N_{2^{-k-2}}(F) \cdot (2^{-k-2})^t \geq n_k \cdot (2^{-k-2})^t > 2^{-2t} \cdot (1 - 2^{t-s})$, wobei $2^{-k-2} < \delta$. Hieraus folgt, dass $\overline{lim}_{\delta\to 0} N_\delta(F)\delta^t > 0$, so dass $\overline{dim}_B(F) \geq t$ mit der Definition der Boxdimension, die disjunkte Kugeln verwendet. Dies gilt für jedes t mit $0 < t < dim_P(F)$, und damit folgt die Behauptung.
Mit dieser Ungleichung lässt sich nun auch die Gleichheit von Packdimension und oberer modifizierter Boxdimension beweisen: Aus $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ folgt zusammen mit $dim_P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) =$

$\sup_i \{dim_P(F_i)\}$, dass $dim_P(F) \leq \sup_i \{dim_P(F_i)\} \leq \sup_i \{dim_B(F_i)\}$. Mit der Definition der oberen modifizierten Boxdimension erhält man nun $dim_P(F) \leq \overline{dim}_{MB}(F)$. Umgekehrt folgt aus $s > dim_P(F)$, dass $\mathcal{P}^s(F) = 0$, so dass mit der Definition des Packmaßes $F \subset \bigcup_i F_i$ für alle Mengen von Mengen F_i mit $\mathcal{P}_0^s(F_i) < \infty$ für jedes i. Für jedes i und für δ klein genug gilt nun, dass $\mathcal{P}_\delta^s(F_i) < \infty$. Mit der Definition von $\mathcal{P}_0^s(F)$ ist dann $N_\delta(F_i)\delta^s$ beschränkt, wenn $\delta \to 0$, wobei $N_\delta(F_i)$ die kleinste Anzahl disjunkter Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkten in F_i ist. Die entsprechende Definition der Boxdimension führt nun zu $dim_B F_i \leq s \; \forall i$ und mit der Definition der oberen modifizierten Boxdimension folgt dann $\overline{dim}_{MB}(F) \leq s$. Damit ist die Behauptung bewiesen.
Wenn $F \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist und $\overline{dim}_B(F \cap V) = \overline{dim}_B(F)$ für alle offenen Mengen V, die F schneiden, dann ist $dim_P(F) = \overline{dim}_B(F)$, was direkt aus der entsprechenden Feststellung für die modifizierte Boxdimension zusammen mit der eben bewiesenen Gleichheit folgt.
Die Packdimension ist schwieriger zu berechnen als die Boxdimension, aber hat sie wesentliche Beiträge zur geometrischen Maßtheorie für Fraktale geliefert und erweist sich insbesondere im Zusammenhang mit der Hausdorff-Dimension als nützlich.

6 Weitere Definitionen

6.1 Eine Variante der Hausdorffschen Dimension

Im Folgenden sei eine Kurve definiert als Bild eines Intervalls $[a, b]$ unter einer stetigen Bijektion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.
Es ist möglich, für Kurven eine Dimension zu definieren, die Abschnitte der Kurve selbst als Hüllmenge benutzt. Hierfür betrachtet man $\inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} |f([t_{i-1}, t_i])|^s \right\}$ über alle möglichen Aufteilungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, so dass alle Diameter $|f([t_{i-1}, t_i])| \leq \delta$ sind. Dann lässt man δ nach 0 streben und sucht den Wert für s, bei dem der Grenzwert von ∞ nach 0 springt. Dieser wird dann als Dimension der Kurve definiert.
Für selbstähnliche Kurven entspricht diese Definition der Hausdorff-Dimension, für andere Bespiele ist der Wert aber etwas höher.

6.2 Einseitige Dimension

Die einseitige Dimension bezieht sich auf Fraktale, die der Rand einer Menge sind. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ also eine Menge, F deren Rand und F_δ die δ-Nachbarschaft von F. Dann ist

$$dim_{OS}(F) = n - \lim_{\delta \to 0} \frac{\log vol^n(F_\delta \cap A)}{\log \delta}.$$

Diese Definition ist eine Abwandlung der Definition der Boxdimension, die den s-dimensionalen Inhalt einer Menge verwendet. Sie wird z.B. in der Oberflächen-Physik von Körpern verwendet.

6.3 Kritischer Exponent

Eine Cantormenge erhält man, indem von einem Intervall (z.B. $[0, 1]$) eine Reihe von Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ entfernt wird. Betrachtet man eine Menge, die auf solche Art entstanden ist, so kann man ihre Dimension so definieren, dass $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^s$ konvergiert, wenn $s < dim_{CE}(F)$ und divergiert, wenn $s > dim_{CE}(F)$. $dim_{CE}(F)$ wird dann kritischer Exponent der Reihe genannt und entspricht der oberen Boxdimension $\overline{dim}_B(F)$. Das Interessante an dieser Definition ist, dass sie nicht die Menge selbst, sondern ihr Komplement benutzt, also die Intervalle, die nicht dazugehören.

6.4 Dimensionsabdrücke

Als weiteres und letztes Beispiel einer Dimensions-Definition möchte ich den Dimensionsabdruck als Variation der Hausdorffschen Dimension vorstellen, der Überdeckungen mit Rechtecken verwendet. Es ist eine Art Fingerabdruck einer Menge, der sich selbst bei Mengen mit gleicher Hausdorff-Dimension unterscheidet. Ein Dimensionsabdruck unterscheidet sich insofern von den vorangegangenen Definitionen, als dass er nicht als einzelne Zahl, sondern als Menge von Zahlentupeln definiert ist. Hier sollen nur Untermengen einer Ebene betrachtet werden. In diesem Fall sind die Dimensionsabdrücke ebenfall planar.
Sei U ein Rechteck (die Seiten müssen nicht parallel zu den Koordinatenachsen sein) und seien $a(U) \geq b(U)$ die Seitenlängen von U. Für $s, t \geq 0$, $F \subset \mathbb{R}^2$ und $\{U_i\}$ Rechtecks-δ-Überdeckung von F sei

$$\mathcal{H}_\delta^{s,t}(F) = \inf \Big\{ \sum_i a(U_i)^s b(U_i)^t \Big\}.$$

Das Maß $\mathcal{H}^{s,t}(F)$ ist der Grenzwert von $\mathcal{H}_\delta^{s,t}$ für $\delta \to 0$. Der Dimensionsabdruck $print(F)$ von F ist dann die Menge der nicht-negativen Paare (s, t), für die $\mathcal{H}^{s,t}(F) > 0$ ist. Er ist monoton, abzählbar stabil und es gilt außerdem für einen Punkt (s, t) aus $print(F)$ und (s', t') mit $s' + t' \leq s + t$ und $t' \leq t$, dass $(s', t') \in print(F)$.

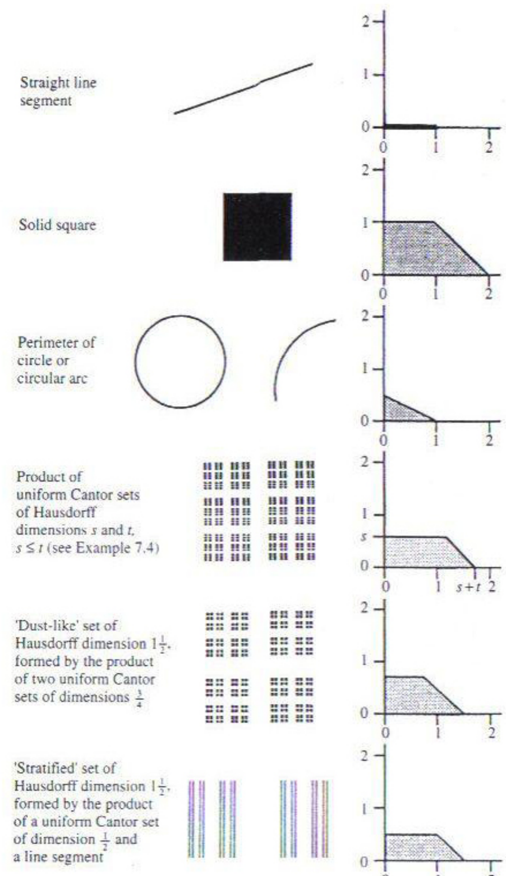

Abbildung 2: Die Dimensionabdrücke von einige planaren Mengen

Dimensionsabdrücke sind schwierig zu berechnen, können aber nützlich sein. Betrachtet man die Graphen von Dimensionsabdrücken, so sieht man, dass die Hausdorff-Dimension durch den rechten Schnittpunkt mit der x-Achse gegeben ist. Ein Nachteil von Dimensionsabdrücken ist, dass sie nicht Bi-Lipschitz-invariant sind. Dies kann man dadurch ändern, dass man $print(F)$ umdefiniert als Menge aller (s, t), für die gilt, dass $\mathcal{H}^{s,t}(F') > 0$ für alle Bi-Lipschitz-Bilder F' von F. Das würde aber die Berechnung wiederum weiter verkomplizieren. Auch die Definition von Dimensionabdrücken in Analogie zur Boxdimension, d.h. mit Überdeckungen von Rechtecken gleicher Größe, vereinfacht die Berechnung nicht.

7 Zusammenfassung und Bewertung

Neben der Hausdorffschen Dimension und ihren Variationen erweist sich insbesondere die Boxdimension in Theorie und Praxis als nützlich. Sie wurde wahrscheinlich zusammen mit der Hausdorffschen Dimension entwickelt, musste aber aufgrund von mathematischen Nachteilen schließlich hinter dieser zurückstehen. Der große Vorteil der Boxdimension ist die leichte Berechenbarkeit, bei den meisten anderen Definitionen gibt es hier Probleme. Bei der Betrachtung von fraktalen Dimensionen muss immer abgewogen werden zwischen rechnerischem Aufwand und gewünschten mathematischen Eigenschaften einer Definition. Außerdem kommen manche Definitionen für die betrachtete Menge, bzw. das betrachtete Fraktal oder das spezielle Anwendungsproblem meist gar nicht in Frage.

Literatur

K.Falconer: Fractal Geometry - Mathematical foundations and applications,2nd Edition, Wiley, 2003