

Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension

Ausarbeitung zum Seminarvortrag vom 07. November 2006 im Rahmen des
Seminars 'Fraktale Geometrie und ihre Anwendungen'

Tobias Krämer

WS 2006/07

Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkungen	1
1	Einführung	3
1.1	Allgemeines zu den Begriffen Maß und Dimension	3
1.2	Maß	3
1.3	Dimension	5
1.4	Fraktale und Maße bzw. Dimensionen	5
2	Das Hausdorff-Maß	9
2.1	Definition und Beispiele	9
2.2	Eigenschaften des Hausdorff-Maß	12
3	Die Hausdorff-Dimension	15
3.1	Definition und Beispiel	15
3.2	Eigenschaften der Hausdorff-Dimension	17
3.3	Alternative Definitionen bzw. Erweiterungen	17
4	Beispiele	19
4.1	Cantorstaub	19
4.2	Cantormenge	20

Kapitel 0

Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt sollen kurz einige nicht sehr geläufige Bezeichnungen und Definitionen vorgestellt werden, die später im Text auftauchen werden. Auf eine ausführliche Erläuterung der Begriffe wird in dieser Arbeit jedoch verzichtet. Ausführende Literatur wird jedoch angegeben.

Vorweg sei noch bemerkt, dass wir in dieser Arbeit und bei unseren Betrachtungen immer vom n -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^n ausgehen und bezeichnen mit $|\cdot|$ den bekannten euklidischen Abstand bzw. die euklidische Metrik in \mathbb{R}^n , also $|x - y| = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|)^{\frac{1}{2}}$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ Elemente aus \mathbb{R}^n sind.

Wir erklären nun zuerst, was wir unter einer Ähnlichkeitstransformation verstehen wollen:

Definition 0.0.1 Eine **Ähnlichkeitstransformation** S mit Skalierungsfaktor $c > 0$ ist eine Abbildung $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ für die gilt:

$$|S(x) - S(y)| = c|x - y|, \text{ wobei } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Ähnlichkeitstransformation bildet Mengen in geometrisch ähnliche ab. Alle Längen werden dabei mit dem Faktor c gestreckt.

Unter dem Begriff einer *Hölderfunktion* wollen wir folgendes verstehen:

Definition 0.0.2 Eine **Hölderfunktion mit Exponent** α ist eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ für die gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \text{ wobei } x, y \in X \text{ und } c \geq 0$$

eine Konstante. X und Y sind hierbei beliebige n - bzw. m -dimensionale euklidische Räume.

Wählt man $\alpha = 1$ erhält man die bekannteren 'Lipschitz-Funktionen'.

Wir wollen noch fassen, was wir mathematisch unter einer *Kurve* bzw. *Fläche* (in \mathbb{R}^3) verstehen.

Definition 0.0.3 *Unter einer **Kurve** Γ in \mathbb{R}^n versteht man die zu einem **Weg** $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gehörige Punktmenge $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$. γ sei hierbei stetig differenzierbar.*

Die **Länge** ist gegeben durch

$$\text{Länge}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt .$$

Ähnlich definiert man eine Fläche im \mathbb{R}^3 :

Definition 0.0.4 *Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ nicht-leer, kompakt und Jordan-meßbar. Jordan-meßbar bedeutet dabei, dass $\int_K 1 dx$ Riemann-integrierbar ist.*

*Unter einer **Fläche** Φ mit Parameterbereich K versteht man dann die Einschränkung $\Phi|_K$ einer C^1 -Abbildung $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf K . M ist eine K enthaltende offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Das Bild von Φ wird dann als **Flächenstück** bezeichnet.*

Der **Flächeninhalt** ist gegeben durch

$$\text{Flächeninhalt}(\Phi) = \int_K |\Phi_u \times \Phi_v| d(u, v) .$$

$|\Phi_u \times \Phi_v|$ ist hier das Kreuzprodukt von Φ_u und Φ_v

An dieser Stelle verweisen wir auf das 'Lehrbuch der Analysis - Teil 2' von Harro Heusser [Heu]. Dort werden die Begriffe Kurve und Fläche und speziell auch der Zusammenhang zwischen Kurve und Kurvenlänge bzw. Fläche und Flächeninhalt ausführlich behandelt.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Allgemeines zu den Begriffen Maß und Dimension

Bei den Begriffen Maß und Dimension handelt es sich allgemein um Möglichkeiten Dinge miteinander zu vergleichen. Kann man den Begriff des Maß etwa als 'Vergleichsgröße zur Größen- und Mengenbestimmung von Gegenständen, Längen, Rauminhalten, Gewichten, ...' definieren, so ist das beim Begriff der Dimension nicht so einfach in Worte zu fassen. Man kann sie als ein Synonym für Ausdehnung bzw. Ausmaß ansehen. Uns soll hierbei genügen, dass es sich ebenfalls um eine 'Vergleichsgröße' handelt.

1.2 Maß

Mathematisch gibt es den Begriff des Maß ebenfalls.

Bevor wir zu diesem kommen, erklären wir zuvor, was wir unter den *Borelmengen* verstehen wollen.

Definition 1.2.1 (*Borelmengen in \mathbb{R}^n*)

Unter den **Borelmengen in \mathbb{R}^n** verstehen wir alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , sowie jede andere Teilmenge des \mathbb{R}^n , die durch abzählbare Vereinigung oder abzählbaren Durchschnitt dieser Mengen entsteht.

Nachdem wir die Borelmengen in \mathbb{R}^n kennengelernt haben, kommen wir zur

Definition 1.2.2 (*Maß*)

Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ heißt **Maß** auf \mathbb{R}^n , wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(3) $\{A_i\}$ eine abzählbare Folge von Mengen, dann gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(4) Und

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

wenn die $\{A_i\}$ paarweise disjunkte Borelmengen sind.

Wer sich bereits etwas mit Maßtheorie beschäftigt hat, wird erkennen, dass es sich bei dieser Definition genau genommen eigentlich um die Definition eines äußeren Maßes auf dem \mathbb{R}^n handelt, welches zusätzlich borelmeßbar ist. Hierbei weichen wir also von den üblichen in der Maßtheorie verbreiteten Bezeichnungen ab. Borelmeßbar bedeutet hierbei, dass die Eigenschaft (4) erfüllt ist. In unserem Kontext wollen wir, wenn wir von einem Maß sprechen im Folgenden dennoch immer die obige Definition verstehen.

Wir wollen uns einige Maße ansehen:

Beispiel 1.2.3 (Verschiedene Maße)

Im folgenden definiert man $\forall A \subset \mathbb{R}^n$:

- **Zählmaß.**

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Punkte in } A, & \text{falls } |A| < \infty \\ \infty & , \text{ andernfalls.} \end{cases}$$

- **Punktmaß.** Sei $a \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt.

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & a \notin A \\ 1, & a \in A. \end{cases}$$

- **Lebesgue-Maß.**

Sei $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ und

$$\text{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

das n -dimensionale Volumen eines Rechtecks A .

$$\mathcal{L}^n(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) : B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

ist dann das n -dimensionale Lebesgue-Maß von $B \subset \mathbb{R}^n$. Die A_i seien analog zu A definiert.

1.3 Dimension

Der Begriff der Dimension ist mathematisch nicht so einfach. Dies liegt mitunter daran, dass es verschiedene Definitionen von Dimensionen gibt. Diese sind jeweils auf ihre Bereiche angepasst und entsprechend definiert. Der bekannteste mathematische Dimensionsbegriff ist wohl der der Dimension eines Vektorraumes. Diese ist als Anzahl der Vektoren einer Basis eines Vektorraums definiert.

Im Bereich der Fraktale gibt es z.B. die Selbstähnlichkeitsdimension, die ein Gradmesser für die Selbstähnlichkeit eines Fraktals ist.

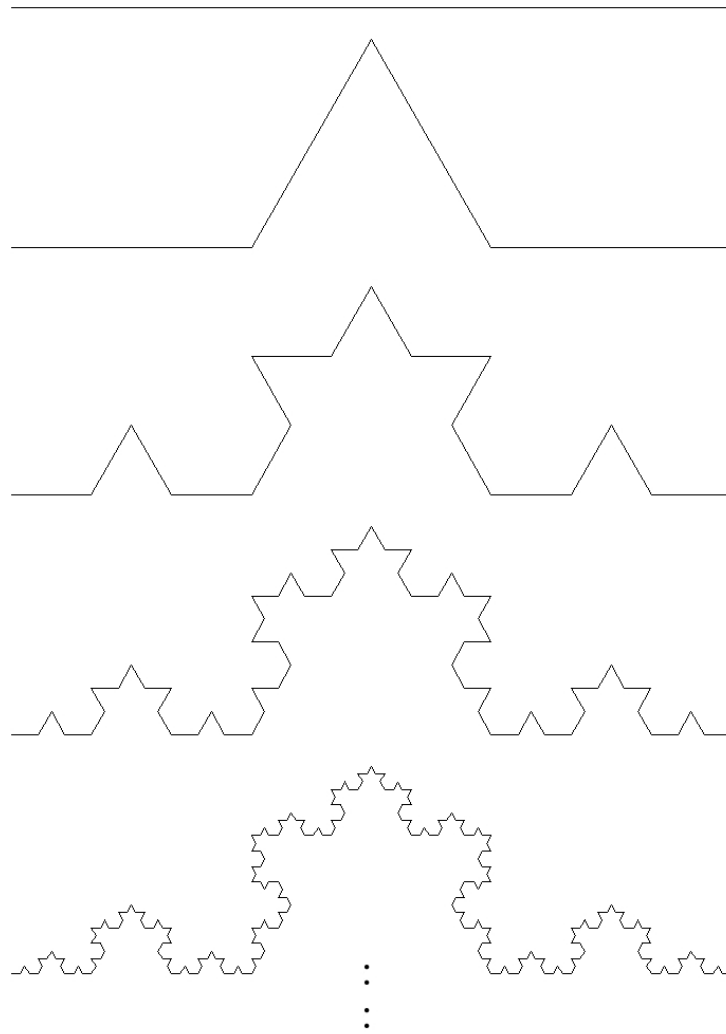
1.4 Fraktale und Maße bzw. Dimensionen

Bei Fraktalen ist es oftmals schwierig, sie miteinander zu vergleichen bzw. typische Kenngrößen zu finden. Dies liegt mitunter daran, dass sie sich oftmals, wie wir noch sehen werden, den bisher bekannten 'üblichen' Vergleichsmethoden entziehen. Man ist daher auf der Suche nach anderen, 'neuen' Vergleichsmöglichkeiten.

Ein erster Ansatz sie zu vergleichen war/ist sicher, dass man ihnen einen Inhalt bzw. eine Dimension zuweisen möchte wie man ihn aus der bisherigen Geometrie kennt. Beispielsweise hat ein Quadrat mit Seitenlänge 2 ja den (Flächen-)Inhalt 4 und die Dimension 2.

Möchte man einen solchen in gewisser Weise 'aussagekräftigen' Inhalt bzw. eine solche Dimension für Fraktale ermitteln, stößt man mit den 'bisherigen' Herangehensweisen an gewisse Grenzen bzw. tut sich schwer, solche aussagekräftigen Werte zu erhalten.

Dazu wollen wir uns die 'von Koch'-Kurve, auch Schneeflockenkurve genannt, genauer ansehen. Unter ihr verstehen wir das folgende Fraktal:



'Entstehung der Schneeflockenkurve'

Die 'von Koch'-Kurve entsteht also, indem man in jedem Schritt sämtliche geraden Stücke in drei Teile teilt, den mittleren Teil durch ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge des entfernten Stücks ersetzt, dabei aber die Grundseite des Dreiecks wieder entfernt. Der Grenzübergang liefert uns das Fraktal.

Möchte man diesem Fraktal eine Länge zuordnen, so sieht man schnell, dass es unendliche Länge hat. Möchte man ihm einen Flächeninhalt zuweisen, so ist dieser Null. In beiden Fällen erhält man also keinen positiven endlichen Wert. D.h. auch weder Dimension 1 noch Dimension 2 können die Dimension der Menge richtig wiedergeben. Intuitiv kann man hierbei den Gedanken einer nicht-ganzzahligen Dimension erhalten.

Abschließend stellt sich also die Frage, ob es nicht doch möglich ist, auch einer solchen Menge einen Inhalt oder zumindest eine nicht-ganzzahlige Dimension, die sie besser beschreiben als die üblichen ganzzahligen Raum-Dimensionen, zuweisen zu können.

Eine Antwort kann hierbei das Hausdorff-Maß bzw. die Hausdorff-Dimension sein.

Kapitel 2

Das Hausdorff-Maß

2.1 Definition und Beispiele

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren uns den **Durchmesser einer Menge** U durch

$$|U| := \sup \{ |x - y| : x, y \in U \}.$$

Weiter sei $F \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und $\{U_i\}$ eine Folge abzählbarer Mengen mit

$$|U_i| \leq \delta \quad \text{und} \quad F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Wir bezeichnen $\{U_i\}$ als **δ -Überdeckung von F** .

Wir definieren nun

Definition 2.1.1

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } F \right\}.$$

Hierbei sei $\delta > 0$ und $s \geq 0$.

Einige δ -Überdeckungen für eine gegebene Menge F :



Man betrachtet also sämtliche δ -Überdeckungen von F und summiert die s -ten Potenzen der Durchmesser deren Mengen auf und bildet abschließend das Infimum über diese Summen.

Lässt man δ kleiner werden, so nimmt die Anzahl möglicher δ -Überdeckungen ab. Gleichzeitig wächst \mathcal{H}_δ^s und für $\delta \rightarrow 0$ existiert der Grenzwert $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Wir können daher folgende Definition vornehmen:

Definition 2.1.2 (*s*-dimensionales Hausdorff-Maß)

$$\mathcal{H}^s(F) = \liminf_{\delta \searrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } F \right\}.$$

$\mathcal{H}^s(F)$ heißt *s*-dimensionales Hausdorff-Maß von F .

Wir zeigen, dass es sich hierbei um ein Maß handelt:

Beweis.

- (i) In der Menge aller δ -Überdeckungen der leeren Menge sind auch die Überdeckungen enthalten für die $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = 0$. Somit ist $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ und da dies $\forall \delta > 0$ gilt, ist auch $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
- (ii) Ist F eine Obermenge von E , so ist jede δ -Überdeckung von F auch eine δ -Überdeckung von E . Somit gilt auch $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Mit dem Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ erhält man dann also aus $E \subset F$, dass $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ gilt.
- (iii) Bevor wir zeigen, dass für eine Folge $\{F_i\}$ von Mengen aus dem \mathbb{R}^n gilt, dass $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$, zeigen wir dies zuerst für \mathcal{H}_δ^s .

Sei also nun $\{F_i\}$ eine Folge von Teilmengen des \mathbb{R}^n . Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Weiter sei $\{C_j^i\}$ eine δ -Überdeckung von F_i mit der Eigenschaft, dass $\forall i \in \mathbb{N} \sum_{j=1}^{\infty} |C_j^i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. $\{C_j^i\}_{i,j=1}^{\infty}$ ist dann eine δ -Überdeckung von $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Es gilt daher

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s : \{U_k\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |C_j^i|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies $\forall \varepsilon > 0$ gilt, erhalten

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_i).$$

Nimmt δ ab, so nimmt $\mathcal{H}_\delta^s(F_i)$ zu, und es gilt

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ liefert uns dann

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Für eine Folge $\{F_i\}$ von Mengen aus dem \mathbb{R}^n gilt also

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Um den Beweis abschließen zu können, müssen wir noch zeigen, daß \mathcal{H}^s ein Borelmaß ist, sprich Punkt (4) aus der Definition eines Maß erfüllt ist.

Um dies zu zeigen verwenden wir das 'Kriterium von Caratheodory'. Dieses besagt, dass es um zu zeigen, dass \mathcal{H}^s ein Borelmaß in \mathbb{R}^n ist, es zu zeigen reicht, dass $\forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Abstand $\text{dist}(A, B) = \inf \{|x - y| : x \in A, y \in B\}$ gilt $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. (Den Beweis für das 'Kriterium von Caratheodory' wollen wir nicht führen. Dem interessierten Leser sei jedoch das Buch von P. Mattila [Mat] empfohlen.)

- (iv) Wir zeigen nun, dass das 'Kriterium von Caratheodory' erfüllt ist. Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Abstand. Wir wählen $\delta > 0$ mit $0 < \delta < \frac{\text{dist}(A, B)}{4}$.

$\{C_k\}$ sei eine δ -Überdeckung. Wir definieren uns die Mengen \mathcal{A} und \mathcal{B} folgendermaßen:

$\mathcal{A} := \{C_j : C_j \cap A \neq \emptyset\}$ und $\mathcal{B} := \{C_j : C_j \cap B \neq \emptyset\}$. A wird also von den Mengen aus \mathcal{A} überdeckt und B von denen aus \mathcal{B} . Somit gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |C_j|^s \geq \sum_{C_j \in \mathcal{A}} |C_j|^s + \sum_{C_j \in \mathcal{B}} |C_j|^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

Es gilt weiter

$$\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B), \text{ wobei } 0 < \delta < \frac{\text{dist}(A, B)}{4}.$$

Der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ liefert uns

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \quad \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$$

mit $\text{dist}(A, B) > 0$.

Die umgekehrte Ungleichung erhält man leicht aus (ii).

Zusammengefasst haben wir also Gleichheit wie sie im 'Kriterium von Caratheodory' gefordert ist. \mathcal{H}^s ist also ein Borelmaß.

\mathcal{H}^s ist somit ein Maß. □

Wir betrachten einige Spezialfälle für gewisse Werte von s (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(F) &= \text{Anzahl der Punkte in } F \\ \mathcal{H}^1(F) &= \text{Länge einer Kurve } F \text{ in } \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{H}^2(F) &= \frac{4}{\pi} (\text{Flächeninhalt eines Flächenstücks } F) \end{aligned}$$

Allgemeiner kann man für Teilmengen des \mathbb{R}^n sogar zeigen:

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F), \text{ wenn } F \subset \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist $\text{vol}^n(F)$ das n -dimensionale Lebesgue-Maß von F und c_n das Volumen der n -dim. Kugel mit Durchmesser 1.

2.2 Eigenschaften des Hausdorff-Maß

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften des Hausdorff-Maß näher betrachten:

Satz 2.2.1 (Skalierungseigenschaft) Sei S eine Ähnlichkeitstransformation mit Skalierungsfaktor $\lambda > 0$. Für $F \subset \mathbb{R}^n$ gilt dann:

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Beweis. Ist $\{U_i\}$ eine δ -Überdeckung von F , dann ist $\{S(U_i)\}$ eine $\lambda\delta$ -Überdeckung von $S(F)$. Wir argumentieren wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta\lambda}^s(S(F)) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : A_i \text{ ist } \lambda\delta\text{-Überdeckung von } S(F) \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \end{aligned}$$

und auch

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F).$$

Mit dem Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\mathcal{H}^s(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Wendet man diese Aussage auf $S(F)$ an und verwendet als Ähnlichkeitstransformation S^{-1} mit Skalierungsfaktor $\frac{1}{\lambda}$ erhalten wir die umgekehrte Ungleichung und insgesamt die Gleichheit. \square

Satz 2.2.2 Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ und $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Hölderabbildung mit Exponent α . Dann gilt für jedes $s \geq 0$:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

Beweis. $\{U_i\}$ sei eine δ -Überdeckung von F . Dann gilt:

$$|f(F \cap U_i)| = c |F \cap U_i|^\alpha \leq c |U_i|^\alpha.$$

$\{f(F \cap U_i)\}$ ist dann eine ε -Überdeckung von $f(F)$ mit $\varepsilon := c\delta^\alpha$. Daher gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

und somit

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_{\delta}^s(F).$$

Mit $\delta \rightarrow 0$ folgt auch $\varepsilon \rightarrow 0$ und das liefert die Behauptung. \square

Abschließend bemerken wir noch, dass **Hausdorff-Maße translations- und rotationsinvariant** sind. Dies ergibt sich bereits aus der Definition.

Kapitel 3

Die Hausdorff-Dimension

3.1 Definition und Beispiel

Sei $t > s$, $\{U_i\}$ eine δ -Überdeckung von $F \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Also

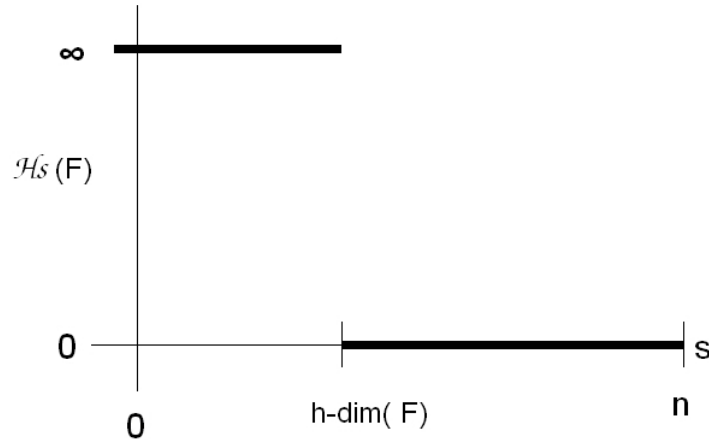
$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) < \infty &\Rightarrow \mathcal{H}^t(F) = 0, t > s \text{ und} \\ \mathcal{H}^t(F) > 0 &\Rightarrow \mathcal{H}^s(F) = \infty, t > s. \end{aligned}$$

Das Hausdorff-Maß einer Menge ändert sich also bei wachsendem s . Genauer gibt es eine Stelle s_0 an der das Hausdorff-Maß einer Menge von ∞ auf 0 springt.

Anschaulicher:



Diese Stelle s_0 bezeichnen wir als *Hausdorff-Dimension* einer Menge $F \subset \mathbb{R}^n$.

Formal erhalten wir folgende

Definition 3.1.1 *Hausdorff-Dimension*

Den Wert $\dim_H F := \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$

nennen wir die *Hausdorff-Dimension von* $F \subset \mathbb{R}^n$.

Für $s = \dim_H A$ ist nur selten sofort eine Aussage möglich. Es können alle drei Fälle $0, 0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty, +\infty$ eintreten.

Umgekehrt folgt aber aus $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, dass $\dim_H A = s$.

Wir halten unsere vorherigen Überlegungen als Satz fest:

Satz 3.1.2 Für $F \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0, & s > \dim_H(F). \end{cases}$$

Betrachten wir ein

Beispiel 3.1.3 Sei F eine flache Scheibe mit Radius 1 in \mathbb{R}^3 .

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(F) &= \text{Länge}(F) = \infty, \\ 0 < \mathcal{H}^2(F) &= (4/\pi) \text{Fläche}(F) < \infty, \\ \mathcal{H}^3(F) &= (6/\pi) \text{vol}(F) = 0. \end{aligned}$$

Also ist die $\dim_H F = 2$ und $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ für $s < 2$ und $\mathcal{H}^s(F) = 0$ für $s > 2$.

3.2 Eigenschaften der Hausdorff-Dimension

Die Hausdorff-Dimension hat unter anderem folgende Eigenschaften:

Monotonie: Sei $E \subset F$. Dann ist $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Beweis. Da für jedes s gilt, dass $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$, wenn $E \subset F$, ist die Aussage klar. \square

Stabilität gegenüber der abzählbaren Vereinigung von Mengen: Sei $\{F_i\}$ eine Folge von Mengen, dann gilt: $\dim_H(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$.

Beweis. Wegen der Monotonieeigenschaft gilt sicherlich

$$\forall i \dim_H(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}.$$

Andererseits: Sei $s > \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$. Dann ist $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$ und somit

$\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) (\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)) = 0$. Damit gilt die umgekehrte Ungleichung und insgesamt die Gleichheit. \square

Abzählbare Mengen: Sei F abzählbar. Dann ist $\dim_H F = 0$.

Beweis. Sei F_i ein einzelner Punkt. Dann ist $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ und $\dim_H F_i = 0$. Aufgrund der Stabilität gegenüber abzählbaren Vereinigungen folgt dann, dass $\dim_H(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$. \square

Offene Mengen: Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\dim_H F = n$.

Beweis. F enthält aufgrund des Zusammenhangs zwischen dem Hausdorff- und dem Lebesgueschen Maß eine Kugel mit positivem n -dimensionalem Volumen. Daher ist $\dim_H F \geq n$. Umgekehrt liegt F in abzählbar vielen Kugeln. Daher ist $\dim_H F \leq n$ wegen der Stabilität und der Monotonie. Insgesamt folgt also $\dim_H F = n$. \square

3.3 Alternative Definitionen bzw. Erweiterungen

Bemerkung 3.3.1 Anstelle der eingeführten Definition ist es auch möglich die Hausdorff-Dimension anders zu definieren:

Sei

$$\mathcal{B}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum |B_i|^s : \{B_i\} \delta\text{-Überdeckung von } F \text{ durch Kugeln} \right\}.$$

Dann erhalten wir ein Maß

$$\mathcal{B}^s(F) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{B}_\delta^s(F)$$

und eine 'Dimension', an welcher $\mathcal{B}^s(F)$ von ∞ auf 0 springt.

Analog sind statt Kugeln auch offene, geschlossene, kompakte, 'andere' Mengen möglich. Die Maß- und Dimensionswerte stimmen dabei mit unserer bisherigen Definition des Hausdorff-Maß und der Hausdorff-Dimension überein.

Wir lassen den Beweis an dieser Stelle aus.

Bemerkung 3.3.2 Anstelle von $|U_i|^s$ kann man in der Definition des Hausdorff-Maß auch andere monoton wachsende, stetige, nicht-negative Funktionen in $|U_i|$ verwenden. Häufig erhält man 'feinere' Informationen über die Eigenschaften einer Menge. Mögliche Funktionen sind beispielsweise: $|U_i|^2 \log \log |U_i|^{-1}$ für $n \geq 3$ und $|U_i|^2 \log \log \log |U_i|^{-1}$ für $n = 2$.

'Feinere Informationen' bedeutet hierbei, dass es Mengen $F \subset \mathbb{R}^n$ gibt, für die man bei Verwendung von $|U_i|^s$ und $s = \dim_H F$ den Wert 0 oder ∞ erhält, bei Verwendung einer anderen, der oben beschriebenen Funktionen in $|U_i|$, möglicherweise jedoch einen positiven endlichen Wert.

Mehr zu diesem Thema findet sich beispielsweise im Buch von Falconer [Fal].

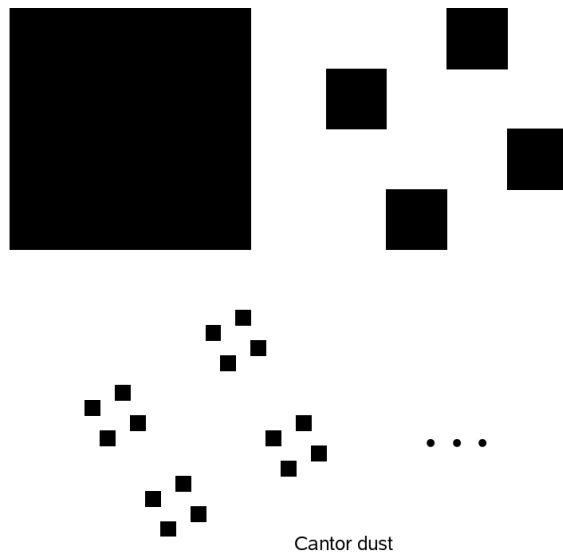
Kapitel 4

Beispiele

Wir betrachten konkret zwei Beispiele und wollen im ersten Fall die Hausdorff-Dimension exakt berechnen und im zweiten Fall immerhin eine Möglichkeit aufzeigen um eine Idee einer Dimension zu erhalten.

4.1 Cantorstaub

Beispiel 4.1.1 *Der Cantorstaub*



Den Cantorstaub F erhält man, indem man in jedem Konstruktionsschritt jedes Quadrat in 16 Teile unterteilt und jeweils nur jedes dritte äußere Quadrat stehenläßt. Der Grenzübergang liefert das gewünschte Fraktal F .

Diese Menge hat $\dim_H F = 1$, denn $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

Beweis zu Bsp. 1. Wir betrachten zuerst E_k , d. h. die k -te Konstruktionsstufe von F . Wir stellen fest, dass E_k aus 4^k Quadraten mit Seitenlänge 4^{-k} und Durchmesser $4^{-k}\sqrt{2}$ besteht. Wir können diese Quadrate als eine δ -Überdeckung von F heranziehen, wobei $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$ ist. Man erhält dadurch die Abschätzung

$$\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}.$$

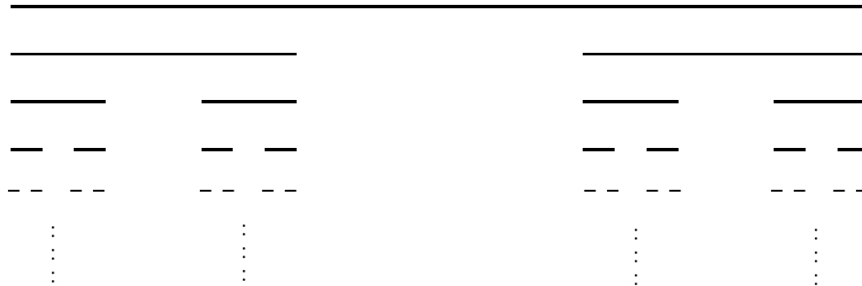
Mit $k \rightarrow \infty$ folgt auch $\delta \rightarrow 0$ und damit $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$. Wir haben also eine obere Abschätzung gefunden. Eine untere Abschätzung können wir wie folgt erhalten: Wir wollen unter $proj$ die orthogonale Projektion auf die x -Achse verstehen. Durch $proj$ werden Abstände nicht vergrößert, d.h. es gilt $|proj(x) - proj(y)| \leq |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ und $proj$ ist eine Lipschitzstetige Abbildung. Die orthogonale Projektion von F $proj(F)$ ist dann gerade $[0, 1]$. Mit Satz 2.2.2 erhalten wir

$$1 = \text{Länge}([0, 1]) = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(proj(F)) \leq \mathcal{H}^1(F).$$

□

4.2 Cantormenge

Beispiel 4.2.1 Cantormenge



Middle third cantor set

Die Cantormenge F erhält man, indem man in jedem Konstruktionsschritt, die verbleibenden Stücke dreiteilt und jeweils das mittlere Stück entfernt. Der Grenzübergang liefert wiederum das gewünschte Fraktal F .

Diese Menge hat $\dim_H F = \log(2)/\log(3)$ und $1/2 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Beweis zu Bsp. 2. Wir wollen diese Aussage nicht exakt beweisen, jedoch eine Möglichkeit aufzeigen, um an die Dimension eines Fraktals zu gelangen. Dies kann folgendermaßen gelingen:

F kann in zwei Teile zerlegt werden.

$$F_L = F \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ und } F_R = F \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Es gilt dann $F = F_L \cup F_R$. F_L und F_R sind hierbei geometrisch ähnlich zu F jedoch mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ skaliert. Nach *Satz 2.2.1* wissen wir, dass $\forall s > 0$

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)$$

gilt. Nehmen wir nun an, dass an der Stelle $s = \dim_H F$ $\mathcal{H}^s(F)$ positiv und endlich ist, erhält man durch Division mit $\mathcal{H}^s(F)$

$$1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s \text{ bzw. } s = \log(2) / \log(3).$$

□

Den exakten Beweis wollen wir an dieser Stelle auslassen. Es sei jedoch gesagt, dass man tatsächlich zeigen kann, dass unsere Annahme in diesem Falle erfüllt ist.

Abschließend bemerken wir noch, dass die *Methode der Projektion* wie in *Bsp 1* angewendet nur bei sehr wenigen Spezialfällen von Fraktalen anwendbar ist und daher nicht als allgemeine Herangehensweise geeignet ist.

Im Falle von selbstähnlichen Fraktalen kann man hingegen mit Hilfe der *Skalierungseigenschaft* wie in *Bsp 2* angewendet oftmals schnell eine Idee der Dimension eines Fraktals erhalten.

Literaturverzeichnis

- [1] [Fal] K.Falconer. Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. *2nd* ed, Wiley, 2003.
- [2] [Mat] P. Mattila. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press, 1999.
- [3] [Heu] H. Heuser. Lehrbuch der Analysis - Teil 2. 13., durchgesehene Auflage. Teubner, 2004.
- [4] [Rog] C.A. Rogers. Hausdorff measures. Cambridge University Press, 1998.