

Zufällige Fraktale

Klaus Scheufele

February 27, 2007

1 Einleitung

Why is geometry often described as 'cold' and 'dry'? One reason lies in its inability to describe the shape of a cloud, a mountain, a coastline, or a tree. Clouds are not spheres, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line. The existence of these patterns challenges us to study those forms that Euclid leaves aside as being 'formless', to investigate the morphology of the 'amorphous'.

Benoit B. Mandelbrot ¹

In der Natur findet man viele räumliche Strukturen, deren Aussehen nicht durch einfache geometrische Formen beschrieben werden kann. Eine Möglichkeit das Aussehen dieser Strukturen mathematisch zu erfassen besteht in der Verwendung zufälliger Fraktale. In dieser Zusammenfassung werde ich einige wichtige Eigenschaften und Sätze zufälliger Fraktale näher erläutern.

2 Beispiele von zufälligen Fraktalen

Die Konstruktion vieler nicht zufälligen Fraktale kann so verändert werden, dass zufällige Fraktale gebildet werden. So auch bei der nicht zufälligen 'middle third Cantor' Menge. Diese Menge wird gebildet, indem man eine zu Beginn gegebene Linie (Menge von Punkten) in drei gleich große Liniensegmente zerteilt und das mittlere Drittel aus der Menge herausnimmt. Die in der Menge verbliebenen Liniensegmente werden dann wiederum zerteilt und das mittlere Drittel entfernt. Die bei der Konstruktion entstehenden Mengen werden E_k genannt, wobei E_k die k -te Zerteilungsstufe (Approximationsstufe) bezeichnet. Wenn man dieses Konstruktionsprinzip wiederholt, erhält man die Cantor Menge, die nur noch isolierte Punkte, den sogenannten Cantor-Staub, enthält. Bei jeder Zerteilung und Herausnehmen nähert sich die Menge immer mehr an die Cantor Menge an.

¹[BMnd182]

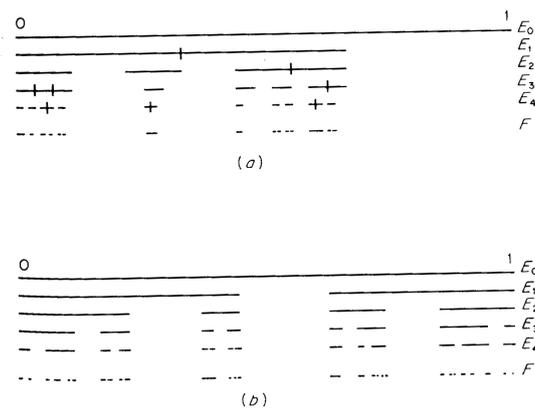


Figure 1: Zufällige Cantor Menge

Das Konstruktionsprinzip der Cantor Menge kann man nun auf verschiedene Art randomisieren und so das deterministische Aussehen verhindern.

- Ein Liniensegment wird in drei gleichgroße Teile aufgeteilt und zufällig Segmente ausgewählt, die entfernt werden.
- Ein Liniensegment wird in drei Segmente mit zufälliger Größe aufgeteilt und das mittlere Segment wird entfernt.

Die Abbildung 1 zeigt diese zwei verschiedenen Konstruktionsprinzipien. So wurden bei der Menge a.) zufällig Liniensegmente entfernt. Bei b.) wurden bei der Konstruktion die Längen der Liniensegmente zufällig gewählt.

Ein anderes Beispiel für ein Fraktal, das leicht in ein zufällige Fraktal umgewandelt werden kann, ist die Koch Kurve. Bei der Konstruktion dieses Fraktals beginnt man wie bei der Cantor Menge mit einer Linie (Mengen von Punkten), die in Liniensegment drei gleichgroße Liniensegmente unterteilt wird. Das mittlere Segment wird nun nicht entfernt, sondern durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt wird. Die entstehende Menge besteht dann aus verbundenen Liniensegmenten. Die Liniensegmente werfen dann wiederum unterteilt und jeweils das mittlere Drittel durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt. Das Dreieck liegt dabei immer auf der Gleichen Seite. Die Menge strebt bei wiederholter Anwendung dieses Konstruktionsprinzips gegen die Koch Kurve.

Die Koch Kurve kann in eine zufällige Koch Kurve überführt werden, indem man bei der Konstruktion zufällig eine Seite auswählt auf der das gleichseitige Dreieck liegen soll. So entsteht eine zufällige Koch Kurve Abbildung 2, die sich trotz der Ähnlichkeit bei der Konstruktion stark von der nicht zufälligen Koch Kurve unterscheidet.

3 Selbstähnlichkeit

Obwohl sich die Formen der Natur nicht leicht beschreiben lassen, erkennt man gewisse Regelmäßigkeiten. So ähneln sich die Zweige eines Baumes und die Blütenblätter einer

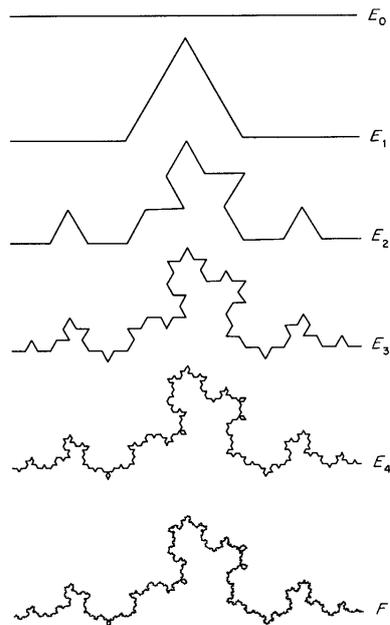


Figure 2: Zufällige Koch Kurve

Blume. Die Eigenschaft, dass einzelne Teile sich ähneln, wird bei nicht zufälligen Fraktalen Selbstähnlichkeit genannt. So sind Vergrößerungen von Teilen des Fraktals identisch zu dem gesamten Fraktal. Selbstähnlichkeit scheint ein fundamentales Aufbauprinzip der Natur zu sein. Aber die Art von Selbstähnlichkeit in der Natur ist anders als die Selbstähnlichkeit bei deterministischen Fraktalen. Um die zufälligen Abweichungen zu erfassen, definiert man die statistische Selbstähnlichkeit. Ein Fraktal ist statistisch selbstähnlich, wenn Vergrößerungen von Teilen der Menge die gleiche Zufallsverteilung haben wie das gesamte Fraktal. Die zufälligen Fraktale besitzen diese Eigenschaft der statistischen Selbstähnlichkeit.

4 Eine zufällige Cantor Menge

Um den nächsten Satz über zufälligen Fraktalen zu verstehen, betrachten wir im Folgenden die Konstruktion einer zufälligen Cantor Menge, Abbildung 3, genauer. Die Analyse lässt sich aber auf andere zufällige Fraktale verallgemeinern.

Die Konstruktion des Fraktals ähnelt der Konstruktion der nicht zufälligen Cantor Menge, mit Ausnahme, dass die Längen der Intervalle, in die ein Liniensegment zerteilt wird, auf jeder Ebene zufällig gewählt wird.

Wir definieren das Fraktal als $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, wobei $[0, 1] = E_0 \supset E_1 \supset \dots$ eine fallender Folge von abgeschlossenen Mengen ist, die das Fraktal mit jeder Iteration besser approximieren. Die Menge E_k ist in 2^k abgeschlossene Intervalle geteilt, wobei im Schritt $(k + 1)$ jeweils ein Intervall in ein linkes Intervall I_L und ein rechtes Intervall

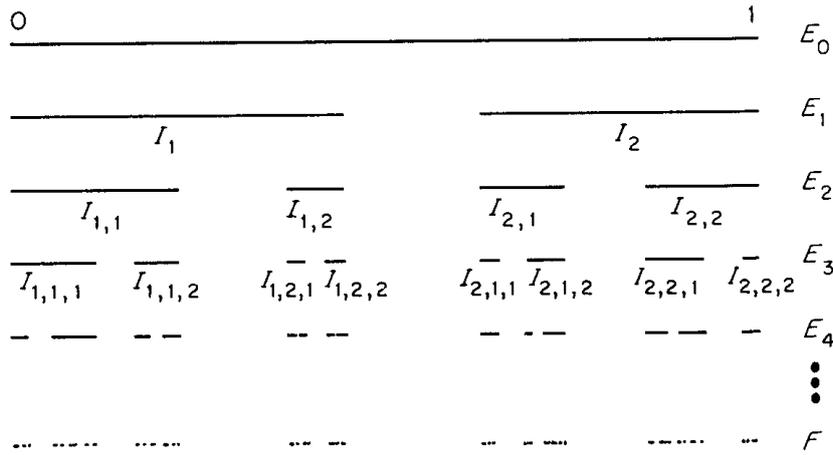


Figure 3: Zufällige Cantor Menge

I_R zerlegt wird. Die Länge von I_L und I_R werden zufällig gewählt, mit der Bedingung dass $|I_L|/|I|$ und $|I_R|/|I|$ unabhängig sind. Die Längen der Intervalle sind dabei in jedem Schritt gleichverteilt. Diese zufällige Cantor Menge F erfüllt die statistische Selbstähnlichkeitsbedingung, da die Verteilung von $F \cap I$ für ein beliebiges Intervall I , die selbe ist wie von F , aber mit dem Faktor $|I|$ skaliert.

Wir definieren die Zufallsvariablen $C_{i_1, \dots, i_k} = |I_{i_1, \dots, i_k}|/|I_{i_1, \dots, i_{k-1}}|$ und setzen voraus, dass $a \leq C_{i_1, \dots, i_k} \leq b$ für alle i_1, \dots, i_k mit a, b Konstanten mit $0 < a \leq b < \frac{1}{2}$.

Der Wahrscheinlichkeitsraum der Zufallsvariablen C_{i_1, \dots, i_k} sei (Ω, F, P) mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß P und F eine σ -Algebra die alle Teilmengen von Ω enthält. Sei die Grundmenge Ω die Klasse von fallenden Folgen der Menge $[0, 1] = E_0 \supset E_1 \supset \dots$, da das Intervall I_{i_1, \dots, i_k} in E_k das linke Intervalle $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ und das rechte Intervall $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ der nächsten Approximationsstufe E_{k+1} enthält.

Wegen der statistischen Selbstähnlichkeit setzen wir voraus, dass $C_{i_1, \dots, i_k, 1}$ und $C_1 = |I_1|$ sowie $C_{i_1, \dots, i_k, 2}$ und $C_2 = |I_2|$ die selbe Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. Daraus folgt, dass $\dim_H F$ eine Zufallsvariable ist, die in Abhängigkeit von C_{i_1, \dots, i_k} beschrieben werden kann.

5 Theorem 5.1

Theorem 5.1. *Mit der Wahrscheinlichkeit 1 hat die oben beschriebene Cantor Menge die Hausdorff Dimension $\dim_H F = s$, wobei s die Lösung der Gleichung $E(C_1^s + C_2^s) = 1$ ist.*

Beweis. $\mathbb{E}(C_1^s + C_2^s)$ ist stetig und streng monoton fallend in s . Daraus folgt, dass eine eindeutige Lösung für s existiert.

Um zu beweisen, dass s die Hausdorff Dimension ist, müssen wir einige Eigenschaften dieser Konstruktion genauer betrachten:

Wir betrachten den Erwartungswert zweier beliebiger Intervalle $I_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1}^s$ und $I_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2}^s$, wobei F_k eine σ -Algebra sei, die das Wissen über die Intervalle I_{i_1, i_2, \dots, i_k} enthält. — da nochmal nachschauen —

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|I_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1}|^s + |I_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2}|^s | F_k) \\ &= \mathbb{E}(C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1}^s + C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2}^s) |I_{i_1, i_2, \dots, i_k}|^s \\ &= \mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) |I_{i_1, i_2, \dots, i_k}|^s \end{aligned} \quad (1)$$

Wenn man nun den Erwartungswert über alle Intervalle in E_{k+1} bildet, erhält man:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s | F_k\right) = \sum_{I \in E_k} |I|^s \mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) \quad (2)$$

Der Erwartungswert über alle F_k ist:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{I \in E_k} |I|^s\right) \mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) \quad (3)$$

Da laut dem Theorem $\mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) = 1$ ist, folgt:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s | F_k\right) = \sum_{I \in E_k} |I|^s \quad (4)$$

Wir schätzen nun die Hausdorff Dimension nach oben und unten ab, dazu definieren wir uns eine Folge von Zufallsvariablen X_k :

$$X_k = \sum_{I_k \in E_k} |I|^s \quad (5)$$

Aus den oben gezeigten Eigenschaften von E_k folgt, dass X_k ein Martingal ist, bei dem der Erwartungswert einer Beobachtung gleich dem Wert der vorherigen Beobachtung ist. Ein Martingal konvergiert für $k \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 zu einer Zufallsvariablen X .

$$X_k = \sum_{I_k \in E_k} |I|^s \leq X < \infty \quad (6)$$

Die Größe der Intervalle ist $\delta = |I| \leq 2^{-k} \forall I \in E_k$. Das Hausdorff-Maß, das sich über die Größe an δ -Überdeckungen definiert, ist dann $H_\delta^s(F) \leq X_k < \infty$, wenn $k \geq -\log \delta / \log 2$. Daraus folgt, dass das Hausdorff-Maß $H^s(F) < \infty$ für $\delta \rightarrow 0$ ist und die Hausdorff Dimension somit $\dim_H F \leq s$ ist.

Wir schätzen nun die Hausdorff Dimension nach unten über die s Energie ab.

s-Energie 1. Sei F eine Teilmenge von \mathbb{R}^n . Wenn es eine Masseverteilung μ auf F gibt mit s -Energie $I_s(\mu) < \infty$, dann ist $H^s(F) = \infty$ und $\dim_H F \geq s$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

$$I_s(\mu) = \int \int \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x - y|^s} \quad (7)$$

Dazu definieren wir uns eine Masse-Verteilung:

$$\mu(I) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \sum |J|^s : J \in E_j \wedge J \subset I \right\} \quad (8)$$

Wenn $I \in E_k$, dann gilt:

$$\mathbb{E}(\mu(I)|F_k) = |I|^s \quad (9)$$

Nun betrachten wir den Abstand zwischen zwei Elementen $x, y \in F$. Es existiert ein größtes k mit E_k als k -te Approximationsstufe, so dass gilt x und y gehören zum selben Intervall. Dieses Intervall I bezeichnen wir als $x \wedge y$. Weiterhin gilt, dass in der nächsten Approximationsstufe E_{k+1} , x und y in 2 verschiedenen Intervallen I_L und I_R sind und der Abstand zwischen x und y ist:

$$\begin{aligned} |I| &\geq |I_L| + |I_R| \geq |I| - 2 \cdot \max(I_L, I_R) \\ &= |I|(1 - 2 \cdot \max(C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1} + C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2})) \\ &\geq |I|(1 - 2b) =: d \end{aligned} \quad (10)$$

Für ein festes t mit $0 < t \leq s$ ist die s -Energie:

$$\begin{aligned} &\int \int_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \\ &= 2 \int_{x \in I_L} \int_{y \in I_R} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} \mu(I_L) \mu(I_R) \end{aligned}$$

Wenn $I \in E_k$ dann gilt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int \int_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\right) |F_{k+1}) \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} \mathbb{E}(\mu(I_L)|F_{k+1}) \mathbb{E}(\mu(I_R)|F_{k+1}) \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} |I_L|^s |I_R|^s \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{2s-t} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert über alle F_k ist:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int \int_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\right) \\ &\leq 2d^{-t} \mathbb{E}(|I|^{2s-t}) \end{aligned}$$

Die Summe über alle $I \in E_k$ ist:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\sum_{I \in E_k} \int \int_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\right) \\ & \leq 2d^{-t} \mathbb{E}\left(\sum_{I \in E_k} |I|^{2s-t}\right) \\ & = 2d^{-t} \lambda^k \end{aligned}$$

mit $\lambda = \mathbb{E}(C_1^{2s-t} + C_2^{2s-t}) < 1$.

Summiert man dann schließlich über alle k auf und erhält die s -Energie des Fraktals:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\int_F \int_F |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\right) \\ & = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I \in E_k} \int \int_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\right) \\ & \leq 2d^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k < \infty \end{aligned}$$

Aus dem Theorem der s -Energie folgt, dass $\dim_H F \geq s \geq t$. Somit folgt, dass $\dim_H F = s$ ist. □

6 Theorem 6.1

Um das nächste Theorem herzuleiten, verallgemeinern wir nun die Konstruktion der zufälligen Cantormenge. Wir zerlegen die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} in m Teilmengen V , wobei V auch die Leere Menge \emptyset sein kann. N sei die Anzahl der Mengen V_1, \dots, V_k die nicht leer sind. Den Abschluss einer Menge V bezeichnen wir mit \bar{V} . Die k -te Approximationsstufe E_k erhält man, wenn man die abgeschlossenen Mengen $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ vereinigt, wobei $i_j = 1, \dots, m$.

Theorem 6.1. *Die zufällige Menge F , die so konstruiert wurde, ist mit Wahrscheinlichkeit q leer, mit $t = q$ die kleinste nicht negative Lösung der Polynom Gleichung.*

$$f(t) = \sum_{j=0}^m P(N = j)t^j = t \tag{11}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ hat die Menge F die Hausdorff und Box Dimension s mit

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^m C_j^s\right) = 1 \tag{12}$$

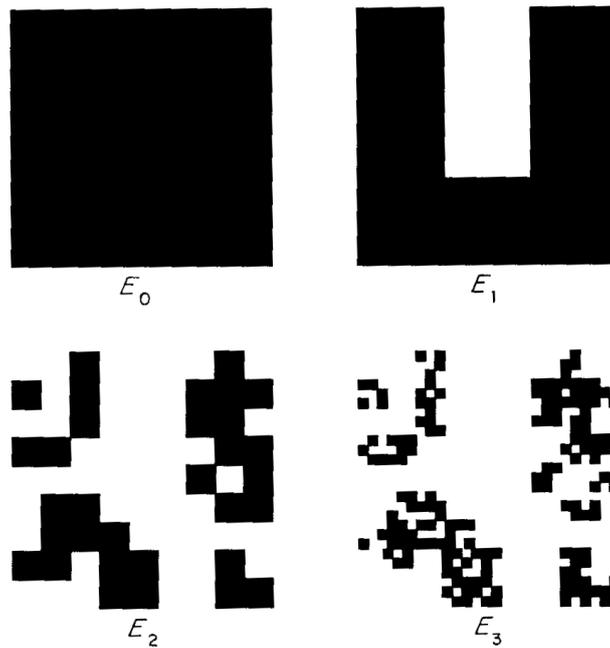


Figure 4: Das Quadrat wird in 9 Quadrate unterteilt, die man mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit behält.

7 Fractal percolation

Wir teilen ein Quadrat E_0 in 9 gleichgroße Quadrate, siehe Abbildung 4. Mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit behalten wir ein so erzeugtes Quadrat. Die anderen Quadrate werden entfernt. Die nicht entfernten Quadrate werden zusammen als Approximationsstufe E_1 bezeichnet. Wenn man dieses Konstruktionsverfahren immer wieder anwendet, nähert sich das Aussehen einem zufälligen Fraktal F an.

Wenn F die gegenüberliegenden Seiten des Quadrats E_0 verbindet, sagen wir, dass Percolation (Filtration) zwischen den Seiten von E_0 auftritt.

Proposition 7.1. *Sei $p \in [0, 1]$ gegeben und sei $t = q$ die kleinste positive Lösung der Gleichung*

$$t = (pt + 1 - p)^9 \tag{13}$$

Dann ist F_p mit Wahrscheinlichkeit q leer. Wenn $p \leq \frac{1}{9}$ ist $q = 1$. Wenn $\frac{1}{9} < p \leq 1$ dann ist $0 < q < 1$ und mit Wahrscheinlichkeit $1 - q$ ist $\dim_H F = \dim_B F = \log 9p / \log 3$.

Beweis: Sei N die Anzahl an Quadraten in E_1 . Dann folgt aus Theorem 2:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{j=0}^m P(N = j)t^j = t \\
 &= \sum_{j=0}^m \binom{9}{j} p^j (1-p)^{9-j} \cdot t^j \\
 &= \sum_{j=0}^m \binom{9}{j} (pt)^j \cdot (1-p)^{9-j} \\
 &= (pt + (1-p))^9
 \end{aligned}$$

Die Quadrate werden bei jeder Unterteilung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ skaliert $\Rightarrow C = \frac{1}{3}$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^N \frac{1}{3}^s\right) = 3^{-s}\mathbb{E}(N) = 3^{-s}9p$$

$$s = \frac{\log 9p}{\log 3}$$

□

Lemma 7.1. *Mit $\frac{1}{9} < p < \frac{1}{3}$ gilt mit Wahrscheinlichkeit 1, dass $F_p = \emptyset$ oder $\dim_H F_p = \log 9p / \log 3 < 1$ und F total unzusammenhängend.*

Beweis:

$$\dim_H F = \frac{\log(9p)}{3} < \frac{\log 3}{\log 3} = 1$$

Eine durchgezogene Linie hat eine Hausdorff Dimension größer als 1. Wenn die Dimension kleiner als 1 ist, ist die Linie unterbrochen und folglich F total unzusammenhängend. □

Lemma 7.2. *Sei $0,999 < p < 1$. Dann existiert eine positive Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Fraktal F_p die linken und rechten Seiten von E_0 verbindet.*

Beweis: Wenn die beiden angrenzenden Quadrate I_1 und I_2 in E_k 8 oder 9 Unterquadrate von E_{k+1} enthalten, dann sind I_1 und I_2 total zusammenhängend.

Ein Quadrat von E_k sei *voll*, wenn es 8 oder 9 Quadrate von E_{k+1} enthält. Ein Quadrat sei *2-voll* wenn es 8 oder 9 *volle* Quadrate enthält. Induktiv sagen wir, ein Quadrat von E_k ist *m-voll*, wenn es es entweder 8 oder 9 $(m-1)$ -*volle* Quadrate enthält. Wenn nun E_0 *m-voll* ist, dann werden die gegenüberliegenden Seiten des Quadrats E_0 durch eine Folge von aneinander grenzenden Quadraten in E_m verbunden.

Wenn das Quadrat E_0 *m-voll* ist, dann gibt es hierfür 3 Fälle:

- E_1 enthält 9 Quadrate, die alle $(m-1)$ -*voll* sind



(a)



(b)

- E_1 enthält 9 Quadrate, von denen 8 $(m-1)$ -voll sind
- E_1 enthält 8 Quadrate, die alle $(m-1)$ -voll sind

Sei p_m die Wahrscheinlichkeit, dass E_0 m -voll ist, dann gilt für $m \geq 2$:

$$p_m = p^9 p_{m-1}^9 + p^9 9 p_{m-1}^8 (1 - p_{m-1}) + 9 p^8 (1 - p) p_{m-1}^8 = 9 p^8 p_{m-1}^8 - 8 p^9 p_{m-1}^9 \quad (14)$$

Für $m = 1$ gilt, $p_1 = p^9 + 9 p^8 (1 - p) = 9 p^8 - 8 p^9$. Aus den beiden Formeln erhält man eine iterative Funktion $p_m = f(p_{m-1})$ für $m \geq 1$, wobei $p_0 = 1$:

$$f(t) = 9 p^8 t^8 - 8 p^9 t^9 \quad (15)$$

Für $p = 0.999$ gilt dann:

$$f(t) = 8,9282515 t^8 - 7,9282874 t^9 \quad (16)$$

Es zeigt sich, dass $t_0 = 0.9999613$ ein Fixpunkt von f ist, für den gilt $0 < f(t) - t_0 \leq \frac{1}{2}(t - t_0)$, wenn $t_0 < t \leq 1$. Daraus folgt, dass p_m fallend ist und in t_0 konvergiert für $m \rightarrow \infty$. Es gibt also eine Wahrscheinlichkeit $t_0 > 0$, dass E_0 m -voll ist für alle m . Wenn das passiert, dann werden die gegenüberliegenden Seiten von E_0 für alle m durch eine Folge von Quadraten aus E_m verbunden. Daher gibt es eine positive Wahrscheinlichkeit, dass Percolation auftritt. □

Theorem 7.1. *Es gibt eine kritische Zahl p_c mit $0,333 < p_c < 0,999$ so dass gilt, wenn $0 < p < p_c$ dann ist F_p mit Wahrscheinlichkeit 1 total unzusammenhängend, aber wenn $p_c < p < 1$ dann gibt es eine positive Wahrscheinlichkeit, dass F_p die linken und rechten Seiten von E_0 verbindet.*

Beweis: Angenommen p sei eine positive Wahrscheinlichkeit, dass F nicht total unzusammenhängend ist. Dann gibt es 2 Punkte in F , die mit einem Pfad verbunden werden können. Aufgrund der statistischen Selbstähnlichkeit der Konstruktion des Fraktals F folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass E_0 von links nach rechts verbunden werden kann auch positiv.

Falls F_p total unzusammenhängend mit Wahrscheinlichkeit 1 ist, dann gilt das auch für alle $F_{p'}$ mit $p' < p$. Da es eine Zahl gibt, bei der die Wahrscheinlichkeit positiv ist, dass E_0 nicht total unzusammenhängend ist, gibt es eine kritische Zahl $p_c = \sup_p p$. □

References

- [KFalc97] *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications* Kenneth Falconer, 1997
- [PJS04] *Chaos and fractals. New frontiers of science. 2nd ed.* H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Springer 2004.
- [BMnd182] *The Fractal Geometry of Nature* Benoit B. Mandelbrot, 1982