Seminarvortrag
Schnitte von Fraktalen

Matthias Schmid
matthias.schmid@uni-ulm.de

Universität Ulm

9. Februar 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Einordnung

Im Hauptseminar *Fraktale* im Wintersemester 2006/07 an der Universität Ulm haben wir gesehen, wie der Dimensionsbegriff für Fraktale gebildet werden kann. Aufbauend auf den Vortrag *Projektionen und Produkte von Fraktalen* werden hier nun *Schnitte von Fraktalen*, das heißt Schnitte von fraktalen Mengen und deren Dimension behandelt. Es handelt sich um die Ausarbeitung zum Vortrag, der am 12. Dezember 2006 gehalten wurde.

1.2 Vorwort

Der Schnitt zweier fraktaler Mengen ist oft wieder ein Fraktal, im Allgemeinen lässt sich jedoch nichts über dessen Dimension aussagen.

Beispiel Sei F abgeschlossen und F_c kongruente Kopie von F.
Nun ist $\dim_H(F \cap F_c) = \dim_H(F)$ wenn F und F_c kongruent sind, dagegen ist $\dim_H(F \cap F_c) = 0$ wenn F und F_c disjunkt sind.
Wenn F_c eine kongruente Kopie in „typischer“Lage zu F ist, lässt sich also etwas Allgemeines aussagen.

Beispiel Wir betrachten den Schnitt einer „staubartigen“ Menge E mit verschiedenen kongruenten Kopien $\sigma(F)$ einer Kurve F (siehe Abb. 1.2). Wir sind also in der Dimension dieser Schnittmenge $E \cap \sigma(F)$ für „typische“ σ interessiert.
Bevor wir eine Schnittformel für die Dimension einführen benötigen wir noch einige Definitionen.

1.3 Definitionen

Rotation Unter einer *Rotation* verstehen wir die Multiplikation einer Menge mit einer orthogonalen Matrix A mit $\det A = 1$.

Translation Eine *Translation* T_y bezeichnet die Verschiebung einer Menge um einen Vektor y, d.h.:

$$T_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ mit } x \mapsto x + y$$

Bewegung Unter einer *Bewegung* σ im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir die Komposition einer Rotation mit einer Translation.
Das heißt eine Bewegung ist eine Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wobei $x \mapsto Ax + y$ mit A orthogonal und $\det A = 1$. Die Menge aller solcher Bewegungen bezeichen wir mit $\mathcal{B}$.

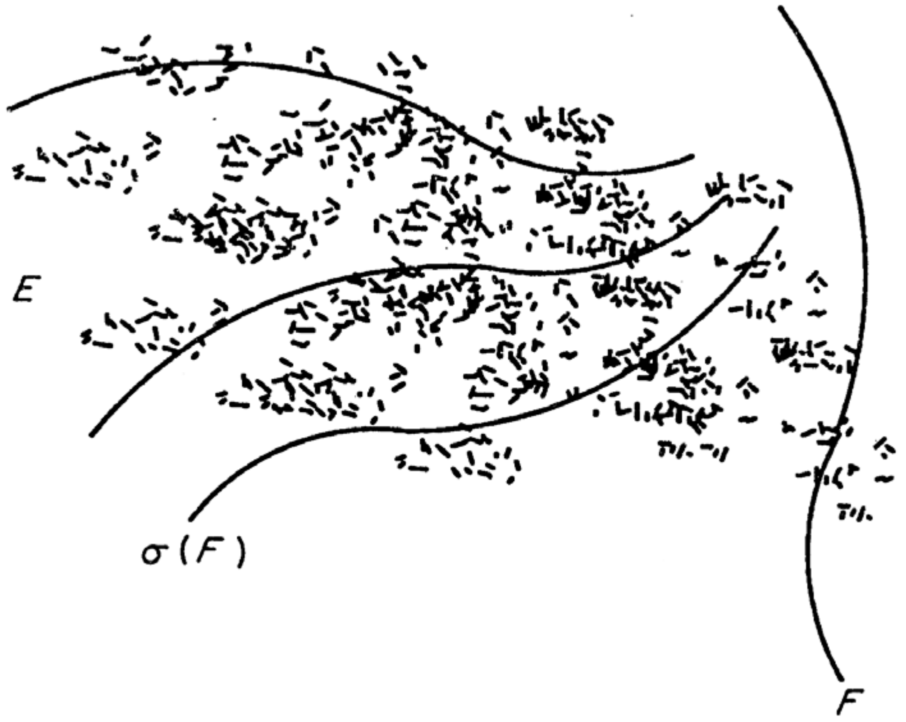

Abbildung 1: Illustration des Schnitts einer staubartigen Menge E mit einer Kurve F

Orthogonale Abbildung Eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heiße *orthogonale Abbildung*, falls sie den Abstand zwischen zwei Punkten bewahrt, d.h.:

$$|g(x) - g(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Es sind also nur Rotationen und Spiegelungen erlaubt. Die *orthogonale Gruppe* $O(n)$ besteht aus allen linearen Abbildungen g.

Isometrie Die Komposition einer orthogonalen Abbildung und einer Translation heiße *Isometrie*.
Eine Isometrie ist also eine Abbildung $\tau_z \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wobei $z \in \mathbb{R}^n$ und $g \in O(n)$. Die *Gruppe der Isometrien* $I(n)$ besteht aus allen isometrischen Abbildungen $f = \tau_z \circ g$.

1.3.1 Maße von Bewegungen

Eine Bewegung σ in $\mathbb{R}^2$ überführt jede Menge E in eine kongruente Kopie $\sigma(E)$ von E. Dabei nicht enthalten ist die Spiegelung. Diese Bewegung kann parametrisiert werden mit 3 Koordinaten

$$(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi)$$

Der Ursprung wird mit einer Rotation wird um den Winkel θ gedreht und anschließend mit einer Translation auf (x, y) verschoben.
Zur Verallgemeinerung in den $\mathbb{R}^n$ benötigen wir noch die Anzahl der Drehwinkel im $\mathbb{R}^n$.

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es beispielsweise 3 Drehwinkel:
Jede Menge lässt sich jeweils um einen beliebigen Punkt auf einer der 3 Ebenen $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_3)$ drehen. Welcher Punkt dabei ausgewählt wird, ist egal:
Sei x der Punkt, um den die Menge M gedreht werden soll. Durch Translation von M um $-x$, Rotation von M um den Ursprung und anschließender Translation um x kann M um jeden Punkt auf einer Ebene rotiert werden.
Im $\mathbb{R}^n$ gibt es somit $n * (n-1)/2$ Drehwinkel.
Jeder Bewegung im $\mathbb{R}^n$ kann also ein eindeutiger Wert

$$(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

zugeordnet werden. Diese Abbildung nennen wir

$$\mathcal{J} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

Auf der Menge $\mathcal{B}$ der Bewegungen kann wie folgt ein natürliches Maß definiert werden:

$$\mu(A) := \lambda(\mathcal{J}(A))$$

so dass $\forall A \in \mathcal{B} : \mathcal{J}(A)$ Borel-messbar.

1.3.2 Bild eines Maßes

Man kann Maße von einem metrischen Raum X auf einen anderen Raum Y abbilden.
Das *Bild eines Maßes* μ unter einer Abbildung $f : X \to Y$ ist definiert durch:

$$f_\sharp\mu(A) := \mu(f^{-1}A)$$

für $A \subset Y$. $f_\sharp\mu$ ist also ein Maß auf Y. Damit ist A $f_\sharp\mu$-messbar genau dann, wenn $f^{-1}(A)$ μ-messbar ist.
Wenn μ ein Borelmaß und f eine Borel-messbare Funktion sind, ist $f_\sharp\mu$ ein Borelmaß.

2 Schnittformeln für Fraktale

2.1 Motivation

Beispiel

Der Schnitt zweier Ebenen $E, F \in \mathbb{R}^2$ im $\mathbb{R}^3$

- besteht aus einer Ebene, falls $E = F$
- ist leer, falls $E || F$ oder
- besteht aus einer Geraden, sonst.

Der letzte Fall tritt am häufigsten auf, insbesondere ist die Menge der Bewegungen, für die er gilt, keine Nullmenge.
Man kann eine Dimensionsformel formulieren:

$$\dim(E \cap \sigma(F)) = \max\{0, \dim E + \dim F - n\}$$

Im Beispiel mit den 2 Ebenen gilt: $\dim(E \cap \sigma(F)) = 2 + 2 - 3 = 1$
Kann man solch eine Formel auch für allgemeinere Mengen angeben?
Wenn man die Hausdorff-Dimension verwendet, könnte man auf eine Dimensionsformel wie

$$\dim_H(E \cap f(F)) = max\{0, \dim_H E + \dim_H F - n\}$$

hoffen, gegeben E und F sind Borelmengen aus $\mathbb{R}^n$.
Diese gilt allerdings nur unter bestimmen Voraussetzungen.
Im Rahmen dieser Ausarbeitung wird der ersten Teil der Ungleichung ($\leq$) mit $f = \tau_z$ gezeigt, d.h. die Menge der Translationen im $\mathbb{R}^n$ und der zweite Teil der Ungleichung ($\geq$) mit $f = (\tau_z \circ g)$, d.h. die Menge der Isometrien im $\mathbb{R}^n$.

2.2 Sätze

Satz 2.1. *Seien E und F Borelmengen aus $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\dim_H(E \cap (F + x)) \leq \max\{0, \dim_H(E \times F) - n\} \tag{1}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir zeigen den Satz für den Fall $n = 1$:
Sei L_c eine Gerade in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit der Gleichung $L_c : y = x - c$. Ein Punkt auf L_c liegt genau dann in $(E \times F)$ wenn er in $E \cap (F + c)$ liegt. Für jedes c entsteht also aus $(E \times F) \cap L_c$ durch orthogonale Projektion auf die x-Achse die Menge $E \cap (F + c)$.
Sei proj : $L_c \to \mathbb{R}$ die orthogonale Projektion auf die x-Achse.
Für zwei Punkte $p, q \in L_c$ gilt:

$$|p - q| = \sqrt{2(p_x - q_x)^2} = \sqrt{2} \cdot |p_x - q_x| = \sqrt{2} \cdot |\text{proj}(p) - \text{proj}(q)|$$

demnach gilt ebenso:

$$|\text{proj}(p) - \text{proj}(q)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |p - q|$$

Damit ist gezeigt, dass proj bilipschitz ist. Somit gilt:

$$\mathcal{H}^s(\text{proj}(M)) \leq L^s_{proj}\mathcal{H}^s(M) = L^s_{proj}\mathcal{H}^s(\text{proj}^{-1}(\text{proj}(M))) \leq L^s_{proj}L^s_{proj^{-1}}\mathcal{H}^s(\text{proj}(M))$$

Und damit: $\dim_H(\text{proj}(M)) = \dim_H(M)$.

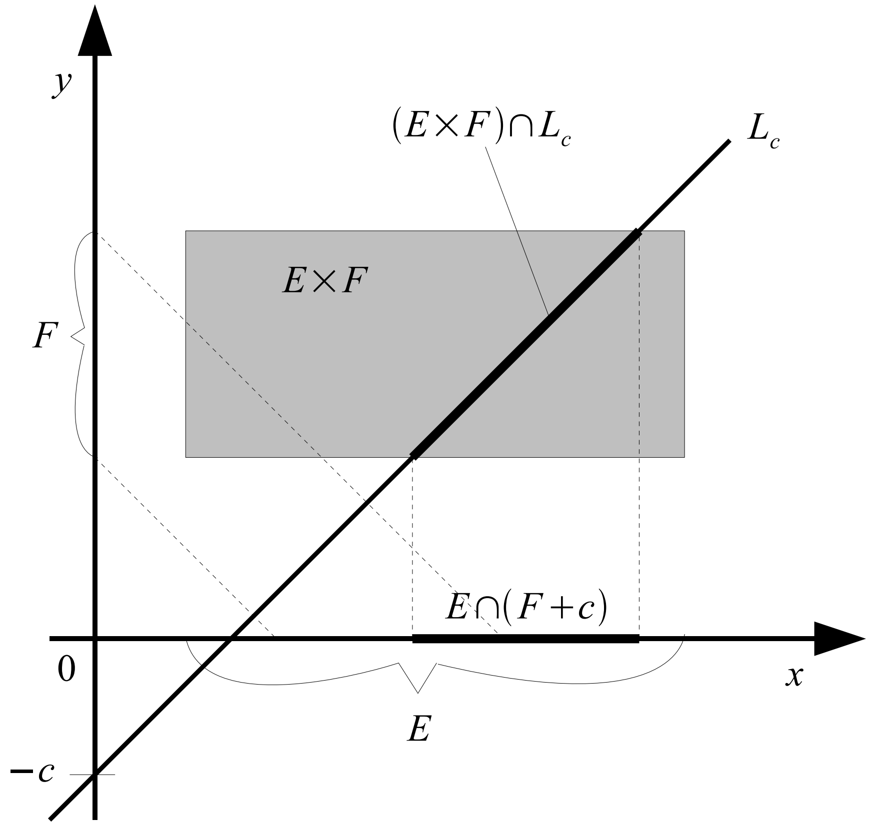

Abbildung 2: Illustration zum Beweis von Satz 2.1

Wir setzen $M = (E \times F) \cap L_c$ ein:

$$\dim_H(E \cap (F + c)) = \dim_H(E \times F) \cap L_c) \tag{2}$$

Aus dem Korollar 7.10 des Vortrags *Projektionen und Produkte von Fraktalen* wissen wir, dass

> $\dim_H(G \cap L_x) \leq \max\{0, \dim_H G - 1\}$
> für fast alle x und G Borelmenge aus $\mathbb{R}^2$.

Setzen wir $G = (E \times F)$ ein:

$$\dim_H(E \times F) \cap L_x) \leq \max\{0, \dim_H(E \times F) - 1\}$$

Nun drehen wir L_x um $45°$ und erhalten:

$$\dim_H((E \times F) \cap L_c) \leq \max\{0, \dim_H(E \times F) - 1\}$$

Eingesetzt in Gleichung (2) ergibt sich die Behauptung:

$$\dim_H(E \cap (F + c)) \leq \max\{0, \dim_H(E \times F) - 1\}$$

Der Fall $n > 1$ kann analog gezeigt werden. $\square$

Verallgemeinerung
Aus dem Korollar 7.4 des Vortrags *Projektionen und Produkte von Fraktalen* ist bekannt:

$\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F$
falls $\dim_H(E) = \overline{\dim}_B(E)$.

Eingesetzt in Satz 2.1 ergibt sich:

$$\dim_H(E \cap (F + x)) \leq \max\{0, \dim_H E + \dim_H F - n\} \tag{3}$$

Im zweiten Satz folgt der andere Teil der Ungleichung.

Satz 2.2. *Seien $E, F \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Borelmengen, sei $I(n)$ die Gruppe der Isometrien auf $\mathbb{R}^n$, sei $\dim_H E > (n+1)/2$ oder $\dim_H F > (n+1)/2$. Dann gilt:*

$$\dim_H(E \cap f(F)) \geq \dim_H E + \dim_H F - n \tag{4}$$

für f in einer Teilmenge von $I(n)$ mit positivem μ-Maß.

Beweisidee. Wie in der Definition der Isometrie sei $f = (\tau_z \circ g)$.
Für den Beweis verwenden wir potentialtheoretische Methoden um die Hausdorff-Dimension abzuschätzen.
Aus Satz 4.2 des Vortrags *Techniken zur Berechnung der Dimension* ist bekannt:

Sei M eine Borelmenge aus $\mathbb{R}^n$.
Wenn $\mathcal{H}^s(M) > 0$, dann existiert eine Massenverteilung μ auf M mit $I_t(\mu) < \infty$ für alle $t < s$.

Seien $s < \dim_H E$ und $t < \dim_H F$, dann gibt es Massenverteilungen μ auf E und ν auf F mit

$$I_s(\mu) < \infty \text{ und } I_t(\nu) < \infty \tag{5}$$

Man kann ein Schnittmaß auf $E \cap (\tau_z \circ g)F$ angeben:

$$\mu \cap (\tau_z \circ g)_\sharp \nu^1.$$

Dann bildet man das Integral über die Energie dieses Schnittmaß wie folgt:

$$\int_O \int_{\mathbb{R}^n} I_{s+t-n}(\mu \cap (\tau_z \circ g)_\sharp \nu)\, dz\, dg$$

Damit kann man zeigen[2]:

$$\int_O \int_{\mathbb{R}^n} I_{s+t-n}(\mu \cap (\tau_z \circ g)_\sharp \nu)\, dz\, dg \leq c \cdot I_s(\mu) I_t(\nu)$$

d.h. das Integral über die Energie des Schnittmaßes ist endlich.

[1] [Mat95] S. 171
[2] [Mat95] Lemma 13.10

Damit ist auch die Energie des Schnittmaßes $I_{s+t-n}(\mu \cap (\tau_z \circ g)_\sharp \nu)\, dz\, dg$ endlich, sofern $I_s(\mu)$ und $I_t(\nu)$ endlich sind.
Dies gilt, wie wir bereits bei (5) gesehen haben.

Weiter wissen wir aus Satz 4.1 des Vortrags *Techniken zur Berechnung der Dimension*:

> Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Gibt es eine Massenverteilung μ auf M mit $I_s(\mu) < \infty$, so gilt: $\mathcal{H}^s(M) = \infty$ und $\dim_H(M) \geq s$

In unserem Fall mit $M = (E \cap f(F))$ gilt damit:

$$\dim_H(E \cap f(F)) \geq s + t - n$$

und

$$\dim_H(E \cap f(F)) \geq \dim_H E + \dim_H F - n$$

was zu zeigen war. $\square$

3 Beispiel

3.1 Schnitt zweier Cantormengen

Sei C die Mitteldrittel-Cantormenge. Wie aus dem Vortrag *Projektionen und Produkte von Fraktalen* bekannt gilt:

$$\dim_H(C \times C) = \dim_H(C) + \dim_H(C) = 2 \cdot \log 2 / \log 3$$

Dann gilt mit Satz 2.1 für fast alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\dim_H(C \cap (C + x)) &\leq \max\{0, \dim_H(C \times C) - 1\} \\ &= 2 \cdot \log 2 / \log 3 - 1 \approx 0,262\end{aligned}$$

und mit Satz 2.2 gilt:

$$\dim_H(C \cap (C + x)) \geq \dim_H C + \dim_H C - 1$$

für eine Anzahl von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Lesbegue-Maß.
Daraus folgt:

$$\dim_H(C \cap (C + x)) = 2 \cdot \dim_H C - 1 \approx 0,262$$

ebenfalls für eine Anzahl von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Lesbegue-Maß.

4 Referenzen

Literatur

[Fal90] Kenneth Falconer: *Fractal Geometry.* John Wiley and Sons Ltd, 2nd edition, 1990.

[Mat95] P. Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidian space.* Cambridge University Press, 1995.