

Seminar Fraktale

K. Falconer - Fractal geometry. Mathematical foundations and applications Kapitel 13 – Dynamische Systeme



Eingereicht von Dirk Simon

Betreuer: Prof. Dr. Palm

Inhaltsverzeichnis:

Abbildungsverzeichnis	3
I Motivation und Einführung zu Dynamischen Systemen	4
II Definitionen	4
<i>II.I Dynamische Systeme</i>	4
<i>II.II Attraktoren</i>	6
<i>II.III Chaos und chaotisch</i>	7
<i>II.IV Logistic map</i>	8
<i>II.V Stabile and un stabile Punkte</i>	11
III Beispiele Dynamischer Systeme mit Fraktalen	11
<i>III.I Die Baker Transformation</i>	12
<i>III.II Die Horseshoe transformation</i>	13
<i>III.III Die Hénon Transformation</i>	14
<i>III.IV Der Solenoid</i>	16
IV Anwendungen	18
<i>IV.I Continuous dynamical systems</i>	18
<i>IV.II Der Lorenz Attraktor</i>	20
<i>IV.III Der Rössler Attraktor</i>	22

Abbildungsverzeichnis

Bild 1: Bifurkationsdiagramm einer logistischen Abbildung	Seite 10
Bild 2: Anschauliches Beispiel im Mehrdimensionalen	Seite 11
Bilder 3: Anschauliche Beispiele zur Bäckertransformation	Seite 12
Bild 4: Die ersten 50 Iterationen der Bäcker-Transformation(...)	Seite 13
Bild 5: Ablauf einer Iteration in der Hufeisen-Abbildung	Seite 14
Bild 6: Hénon-Abbildung für die Parameter $a=1,4$ und $b=0,3$: hufeisenförmiges Gebilde	Seite 15
Bild 7: Die Veranschaulichung der Elementarabbildungen bei der Hénon-Abbildung	Seite 15
Bild 8: Erstellen des soliden Torus	Seite 16
Bild 9: Der Solenoid im Torus	Seite 16
Bild 10 : Beispiel für ein Kontinuierliches dynamisches System	Seite 18
Bild 11: Dreidimensionales Beispiel eines kontinuierlichen dynamischen Systems	Seite 19
Bild 12: Veranschaulichung des Modells der Thermalen Bewegungen	Seite 20
Bild 13: Beispiel eines Lorenz-Attraktors	Seite 21
Bild 14: Flugkurve eines Lorenz Systems für die Werte $\rho=28$, $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$	Seite 21
Bilder 15: Beispiele für die Lorenz Attraktoren in verschiedenen Zeitschritten	Seite 21
Bild 16: Beispiel einer Rössler Transformation	Seite 22

I Motivation und Einführung zu Dynamischen Systemen

Unter einem dynamischen System versteht man mathematische Modelle für zeitabhängige Zustände. Der Begriff des dynamischen Systems in heutiger Form geht auf den Mathematiker George David Birkhoff zurück. Dynamische Systeme finden im Alltag reichlich Anwendung und erlauben Einblicke nicht nur in vielen Bereichen der Mathematik, wie beispielsweise in die Zahlentheorie oder in die Stochastik, sondern auch in der Wirtschaft, Geographie, Maschinenbau, Physik oder Biologie. So betrachtet man Bewegungsabläufe eines Pendels oder die zeitliche Veränderung von Populationszahlen zweier konkurrierender Spezies im Räuber-Beute-Modell.¹ Aus diesem Grund ist das Interesse an dynamischen Systemen in letzter Zeit stark angestiegen. Hierzu beigetragen haben aber auch die Möglichkeiten. Vor allem der Einsatz von Computern hat es ermöglicht diese Modelle schnell und effizient zu nutzen und so theoretische Analysis mit numerischen Untersuchungen zu kombinieren.²

Unser Ziel ist es nun zu beschreiben welche Rolle Fraktale im Zusammenhang mit diesen dynamischen Systemen spielen.

II Definitionen

II.1 Formale Definition: Dynamisches System

Ein diskretes Dynamisches System ist ein iteratives Programm $\{f^k\}$. Hierbei interessieren wir uns für das Verhalten von $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ für große k und verschiedene Startpunkte $x \in D$, wobei D eine Teilmenge von \mathbb{R}^n ist

Rein formal gesehen wird ein dynamisches System gegeben durch eine Gruppenwirkung. Genauer gesagt ist ein dynamisches System ein Tripel (G, Ω, Φ) , wobei (G, \cdot, e) eine Gruppe, Ω eine nichtleere Menge und $\Phi: \Omega \times G \rightarrow \Omega$ eine Abbildung sei, so dass für alle $x \in \Omega$, $g, h \in G$ gilt:

1. $\Phi(x, e) = x$ und
2. $\Phi(\Phi(x, g), h) = \Phi(x, g * h)$

¹ Nach Wikipedia 27.01.07 http://de.wikipedia.org/wiki/Dynamisches_System

² Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, S.170

Erläuterung zur Definition:

Eigenschaft 1 aus der Definition nennt man die Identitätseigenschaft, d.h. ein Zustand verändert sich nicht nach 0 Zeiteinheiten und wird nach jedem weiteren Schritt wieder auf sich abgebildet.

Eigenschaft 2 gibt die Halbgruppeneigenschaft wieder. Man gelangt zunächst in s Zeiteinheiten von x nach $\Phi(x,s)$ und anschließend in t Zeiteinheiten von $\Phi(x,s)$ nach $\Phi(x, s+t)$. Alternativ zu 2 schreibt man auch $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$

Diskretes System – kontinuierliches System

Man unterscheidet zwischen kontinuierlicher oder diskreter Zeitentwicklung. Bei einem diskreten System interessiert man sich für die Zustandsänderungen bei einem Zeitsprung. Wenn man erlaubt das Zeitintervall gegen 0 gehen zu lassen, wird ein diskretes dynamisches System zu einem herkömmlichen Gleichungssystem.³

Bei einem kontinuierlichen dynamischen System wird für jede beliebige Zeitspanne die Zustandsänderung beschrieben. Deshalb werden zeitunabhängige Differentialgleichungen als kontinuierliche dynamische Systeme angesehen.⁴ Wichtigste Beispiele für kontinuierliche dynamische Systeme sind autonome gewöhnliche Differenzialgleichungen.⁵

Wir betrachten folglich bei einem diskreten dynamischen System das Verhalten der Folgen der Wiederholungen (bei gegebenem x ist dies das Verhalten von $\Phi(x,t)$ für $t \rightarrow \pm\infty$) bei verschiedenen Startpunkten, vorzugsweise natürlich für große k . Hierbei sind Grenzmengen sehr wichtig. Die wichtigsten davon sind die Fixpunkte und die periodischen Orbits. Gerade in nichtlinearen Systemen trifft man aber auch komplexe nichtperiodische Grenzmengen an. Diese werden auch in der Chaostheorie ausführlich untersucht.⁶

An folgendem Beispiel⁷ aus der Physik kann man sich das Prinzip eines dynamischen Systems noch mal verdeutlichen:

³ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5 S.184

⁴ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5 S.184

⁵ Nach Wikipedia, 27.01.07, http://de.wikipedia.org/wiki/Dynamisches_System

⁶ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, S.170

⁷ Nach Wikipedia, 27.01.07, http://de.wikipedia.org/wiki/Dynamisches_System

Sei M eine kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit, beispielsweise eine nicht-degenerierte Energiefläche im \mathbb{R}^n und $X:M \rightarrow TM$ ein glattes Vektorfeld über M . Dann existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen $\Phi(t): M \rightarrow M$, mit:

- $\Phi(0) = \text{id}_M$
- $\frac{d}{dt} \Phi(t) = X(\Phi(t))$
- $\Phi(t) \circ \Phi(s) = \Phi(s+t)$ für alle s, t aus \mathbb{R} .

Halten wir einen Punkt x aus M fest, dann beschreibt $\Phi(t, x)$ die Lösungskurve der Differentialgleichung X auf M zum Anfangswert x . Man nennt diese zum glatten Vektorfeld X korrespondierende 1-parametrische Gruppe den Fluss auf M . Schränkt man Parametrisierung auf \mathbb{R}_+ ein, dann erhalten wir eine dynamische Halbgruppe, betrachten wir die Zeit-1-Abbildung $\Psi = \Phi(1, *)$, dann erhalten wir ein diskretes dynamisches System mit $\Psi^{n+1} = \Psi \circ \Psi^n$

Laut Falconer kann beobachtet werden, dass solche dynamischen Systeme manchmal sehr willkürlich und zufällig erscheinen und trotzdem sich immer in der Nähe einer bestimmten Menge aufhalten. Da diese Menge auch ein Fraktal sein kann, werden diese so genannten fraktalen Attraktoren oder die seltsamen Attraktoren hier untersucht. Um das Verständnis dessen zu gewährleisten folgen nun einige nützliche Definitionen:

II.II Definition Attraktor

Ein Attraktor A ist eine unter der Zeitentwicklung eines dynamischen Systems invariante Untermenge eines Phasenraums. Dies bedeutet er hat die Eigenschaft, dass jeder Punkt dieser Untermenge A durch das dynamische System wieder auf einen Punkt in derselben abgebildet wird; hinzu kommt dass jeder Punkt auch Bildpunkt zumindest eines Punktes ist, kurz $S(t)A = A$. Die zweite Eigenschaft des Attraktors ist, dass er eine offene Umgebung besitzt, dessen Punkte sich im Laufe der Zeit immer mehr dem Attraktor nähern.

Die Menge aller Punkte des Phasenraums, die unter der Dynamik demselben Attraktor zustreben, heißt Attraktionsgebiet dieses Attraktors (basin of attractions). In den meisten Fällen interessiert man sich aber für den globalen Attraktor, der eine kompakte Menge ist die

den ganzen Phasenraum anzieht. Der globale Attraktor ist eindeutig und maximal, insofern er die größte kompakte Menge ist, die ein Attraktor ist.

Häufige Beispiele für Attraktoren sind:

- Fixpunkte: Das System nähert sich immer stärker einem bestimmten Endzustand an, in dem die Dynamik zum Erliegen kommt, es entsteht ein statisches System. Typisches Beispiel eines solchen Systems ist ein gedämpftes Pendel, das sich dem Ruhezustand im tiefsten Punkt annähert.⁸
- Grenzzyklen: Der Endzustand ist die Abfolge immer der gleichen Zustände, die periodisch durchlaufen werden. (Räuber-Beute-Beziehung)⁹

Diese Beispiele sind Attraktoren, die im Phasenraum eine ganzzahlige Dimension besitzen. Nach dem Entdecken der Existenz von Attraktoren mit komplizierterer Struktur wurden diese lange als Sonderfälle betrachtet bis man eine Definition dafür fand. Man nennt diesen Typ den seltsamen Attraktor.

Man spricht vom seltsamen Attraktor wenn das System im Endzustand ein nicht periodisches Verhalten zeigt, sich nicht in einer geschlossenen geometrischen Form beschreiben lässt und keine ganzzahlige Dimension besitzt. Die Rede ist von einem Fraktal. Besonders auffällig ist das chaotische Verhalten, welches die Folge ist, dass jede kleine Änderung des Anfangszustandes den gesamten Verlauf grundlegend verändert. Seltsame Attraktoren liefern die mathematische Grundlage zur Beschreibung chaotischer Vorgänge wie etwa turbulenten Strömungen.

Das Gegenteil eines Attraktors wird als Repellor bezeichnet.

II.III Definition chaotisch

Es kam bereits die Chaostheorie und das chaotische Verhalten des Systems zur Sprache. Falconer definiert chaotisch wie folgt:¹⁰

Ein Attraktor F ist genau dann chaotisch wenn folgende Bedingungen gelten:

⁸ Nach Wikipedia, 27.01.07, <http://de.wikipedia.org/wiki/Attraktor>

⁹ Nach Wikipedia, 27.01.07, <http://de.wikipedia.org/wiki/Attraktor>

¹⁰ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, S.171

- i) Der Orbit $\{f^k(x)\}$ ist dicht in F für einige $x \in F$
- ii) Die periodischen Abbildungspunkte von f auf F ($f^p(x)=x$ für beliebiges $p \in \mathbb{N}$) sind dicht in F
- iii) f hat sensitive dependence on initial conditions. Das bedeutet soviel wie, dass es für einen beliebigen Punkt x aus F Punkte aus einer sehr kleinen ε Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x geben kann, welche nach genügend vielen Iterationen von f nicht mehr nah zusammen liegen.

In Worten bedeutet dies, dass man beliebige Teilmengen aus F immer durch Punkte des Orbits approximiert werden können (i) dass es eine regulären Aufbau hat (ii) und dass das Verhalten von F nicht vorhersagbar ist (iii).

II.IV Logistic Map

Die logistische Abbildung (logistic map) ist eine polynomische Abbildung, häufig zitiert als urbildliches Beispiel wie komplexes, chaotisches Verhalten aus sehr einfachen nicht linearen dynamischen Gleichungen entstehen kann. Die Abbildung wurde in einem Seminar-Paper 1976 vom Biologen Robert Mai veröffentlicht.

Das logistische Modell wurde ursprünglich als demographisches Modell von Pierre François Verhulst eingeführt. Später wurde es auf Überschussproduktion der Bevölkerung an Biomasse in Bezug auf die Rasse bei gleichzeitiger Begrenzung von Faktoren wie Nahrungsmittel-Versorgungsmaterial oder Krankheit und so zwei verursachenden Effekten angewendet:

- Reproduktion bedeutet, dass die Bevölkerung mit einer Rate sich erhöht, die zur gegenwärtigen Bevölkerung proportional ist
- Verhungern bedeutet, dass die Bevölkerung mit einer Rate sich verringert, die zum Wert erreicht proportional ist, indem sie der theoretischen "Tragfähigkeit" der Umwelt abzüglich der gegenwärtigen Bevölkerung annimmt.¹¹

Mathematisch kann dieses wie folgt geschrieben werden:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

¹¹ Übersetzung nach http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map 29.01.07

wobei :

- x_n ist eine Zahl zwischen null und eins ist und die Bevölkerung im Jahr n bezeichnet, und folglich vertritt x_0 die Ausgangsbevölkerung (an Jahr 0),
- das r eine positive Zahl ist und stellt eine kombinierte Rate für Reproduktion und Verhungern dar.

Nun wird betrachtet wie sich das Verhalten einer logistischen Abbildung in Abhängigkeit von r entwickelt. Wenn man den Parameter r verändert, wird das folgende Verhalten beobachtet:

- Mit r zwischen 0 und 1, stirbt die Bevölkerung letztendlich, unabhängig von der Ausgangsbevölkerung.
- Mit r zwischen 1 und 2, stabilisiert die Bevölkerung schnell auf dem Wert r^{-1}/r , unabhängig von der Ausgangsbevölkerung.
- Mit r zwischen 2 und 3, stabilisiert die Bevölkerung letztendlich auch auf dem gleichen Wert r^{-1}/r , aber vorher oszilliert sie um diesen Wert für einige Weile. Die Konvergenzrate ist linear, außer für $r=3$, bei welchem sie drastisch langsam ist, sogar weniger als linear.
- Mit r zwischen 3 und $1+\sqrt{6}$ (ungefähr 3.45), kann die Bevölkerung zwischen zwei Werten für immer oszillieren. Diese zwei Werte sind von r abhängig.
- Mit r zwischen 3.45 und 3.54 (ungefähr), kann die Bevölkerung zwischen vier Werten für immer oszillieren.
- Mit r etwas größer als 3.54, oszilliert die Bevölkerung vermutlich zwischen 8 Werten, dann 16, 32, usw.. Die Längen der Parameterabstände, die die gleiche Zahl Oszilierungsbewegungen erbringen, verringern sich schnell; das Verhältnis zwischen den Längen von zwei aufeinander folgenden solchen Bifurkationintervallen nähert sich der Feigenbaumkonstanten $\delta= 4.669$. Dieses Verhalten ist ein Beispiel einer Perioden-Verdoppungskaskade.
- An ist $r = 3.57$ (ungefähr) am Ende der Perioden-Verdoppungskaskade kommt der Beginn des Chaos. Wir können keinerlei Oszilierungsbewegungen mehr sehen. Geringfügige Schwankungen der Ausgangsbevölkerung erbringen drastisch unterschiedliche Resultate im Verlauf der Zeit, dies ist eine Haupteigenschaft von Chaos.
- Die meisten Werte über 3.57 offenbaren ein chaotisches Verhalten, aber dort sind noch bestimmte lokale Werte von r , die scheinen ein nicht-chaotisches Verhalten zu zeigen; diese werden manchmal Inseln der Stabilität genannt. Zum Beispiel um 3.82

gibt es eine Menge von Parametern r , die Oszilierungsbewegung zwischen drei Werten zeigen, und für etwas höhere Werte von r Oszilierungsbewegung zwischen 6 Werten, dann 12 usw..

- Über $r = 4$ verlassen die Werte schließlich den Abstand $[0,1]$ und laufen für fast alle Ausgangswerte auseinander.

Ein Bifurkationsdiagramm fasst dieses zusammen. Die horizontale Mittellinie zeigt die Werte des Parameters r , während die vertikale Mittellinie die möglichen langfristigen Werte von x zeigt.

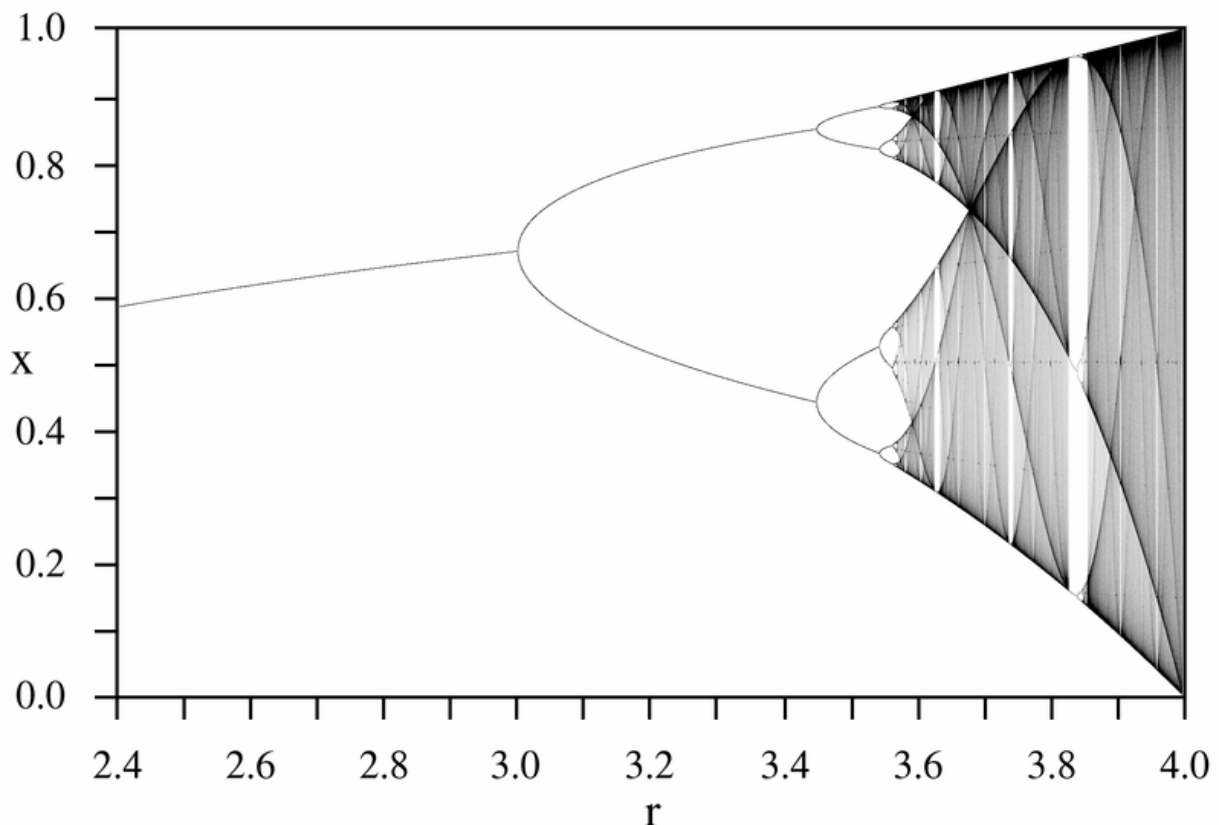


Bild 1: Bifurkationsdiagramm einer logistischen Abbildung¹²

Das Bifurkationsdiagramm ist ein Fraktal: wenn Sie auf den oben erwähnten Wert $r = 3.82$ zoomen und sich auf einen der drei Arme konzentrieren, wirkt die in der Nähe liegende Situation wie eine geschrumpfte und etwas verzerrte Version des vollständigen Diagramms. Dasselbe ist für alle weiteren nicht-chaotischen Punkte zutreffend. Dieses ist ein Beispiel des tiefen und überall vorhandenen Anschlusses zwischen Chaos und Fraktalen.

¹² Aus http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map 29.01.07

Zwei- und drei-dimensionale Phasendiagramme zeigen die *Falt-und-Streckstrukturen* der logistischen Abbildung:

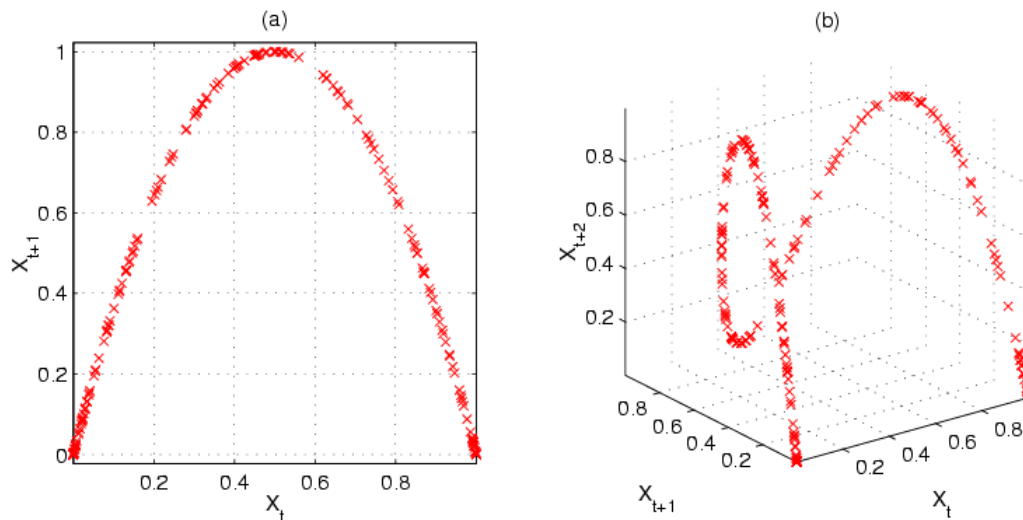


Bild 2: Anschauliches Beispiel im Mehrdimensionalen

II.V *Stabile and unstable Punkte*

Auf Seite 174 erwähnt der Autor „stable or unstable“ Punkten. Das heißt Punkte die stabil oder instabil sind und sie werden dort wie folgt definiert:

Wenn wir einen Periode- p Punkt x von f haben, das heißt beispielsweise $f^p(x)=x$ und p sei die kleinstmögliche ganze Zahl mit dieser Eigenschaft. Dann nennen wir den Punkt x stabil oder instabil abhängig davon ob $|(f^p)'(x)| < 1$ ist oder > 1 ist. Stabile punkte ziehen nahe liegende Orbits an, instabile punkte stoßen diese ab.

III Beispiele dynamischer Systeme mit Fraktalen

Im Folgenden werden einige dynamische Systeme mit fraktalen Attraktoren behandelt und kurz erklärt:

III.1 Die Bäcker-Transformation

Die Bäcker-Transformation (englisch baker's transformation) wurde nach dem Vorgang des Teigknetens benannt. Der Teig wird in die Länge gezogen und in Hälften geschnitten. Die beiden Teile werden übereinander gelegt. Diese Prozedur wiederholt sich, bis durch die chaotische Verteilung eine gute Vermischung entstanden ist. Zwei Teilchen, die ursprünglich nahe beisammen waren, sind nach kurzer Zeit weit voneinander entfernt. Nach wenigen Anwendungen der Transformation ist das Ursprungsbild nicht mehr rekonstruierbar. Sie stellt laut dem Falconer eine der einfachsten ebenen dynamischen Systeme dar die fraktale Attraktoren haben.

Formale Beschreibung/Definition:

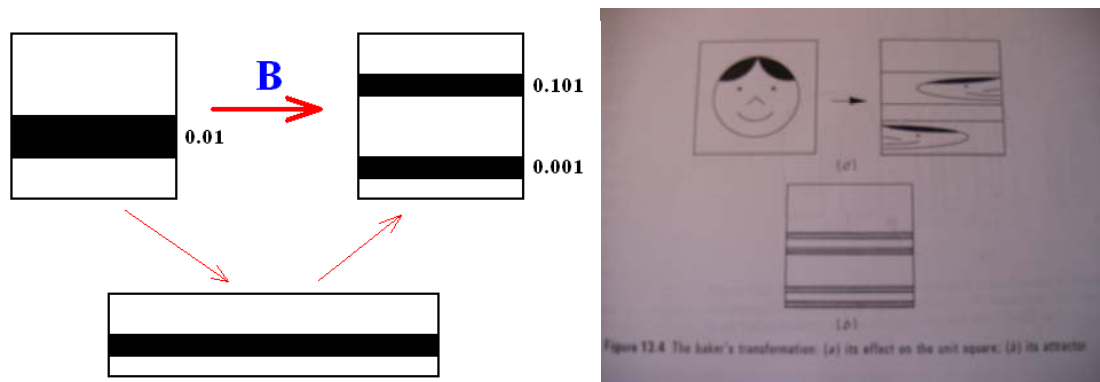
Formal kann diese Prozedur so beschrieben werden, dass die Bäcker-Transformation eine Funktion des Einheitsintervalls (entspricht einem eindimensionalen Teig) in sich ist, d.h. $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ mit:¹³

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x-1 & \text{falls } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Im zweidimensionalen Falle sieht die analoge Formel für ein $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ dann folgendermaßen aus:

$$f(x,y) := \begin{cases} 2x, \lambda y & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1, \lambda y + \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Dies lässt sich wie folgt im Bild darstellen:



Bilder 3: Anschauliche Beispiele zur Bäckertransformation¹⁴

¹³ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.3, Seite 177 und http://www.metaphysica.nl/ontology/bakker_9.gif

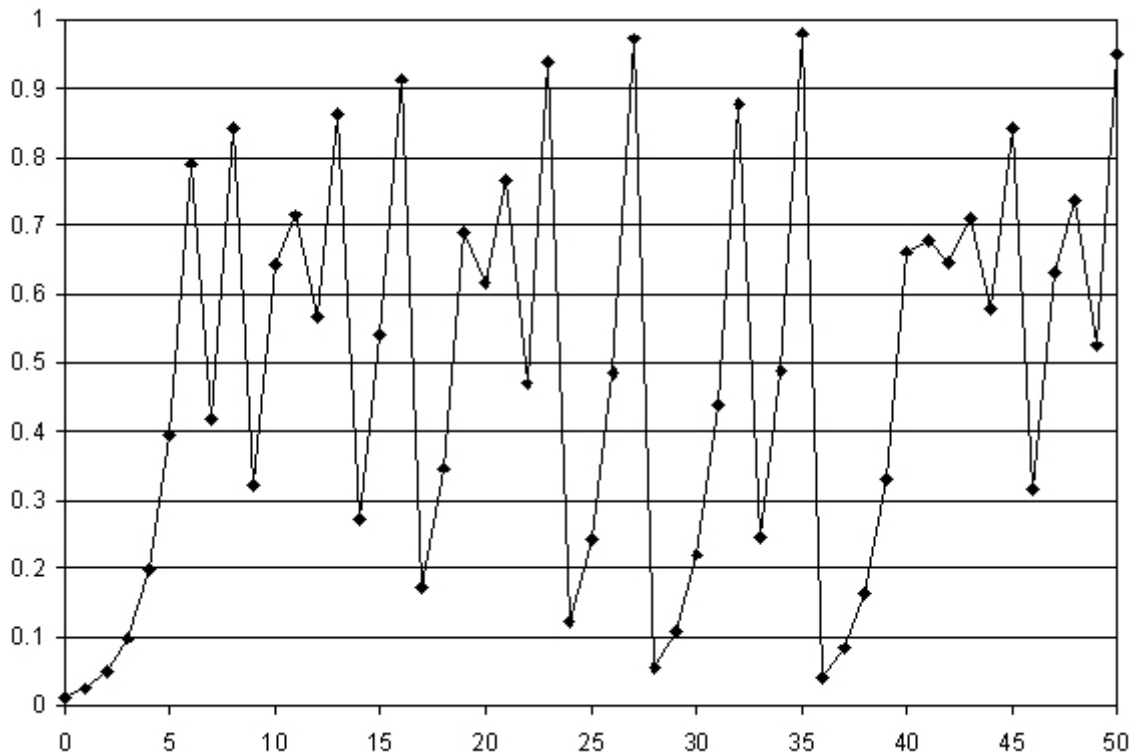


Bild 4: Die ersten 50 Iterationen der Bäcker-Transformation für den Anfangswert
0.0123456789

III.II Hufeisen-Abbildung

Die Hufeisen-Abbildung (oder Hufeisen-Transformation) ist eine nichtlineare Abbildung, die in der Chaostheorie Verwendung findet. Sie wurde von dem Mathematiker Stephen Smale eingeführt und dient dazu, grundlegende Eigenschaften dynamischer System zu untersuchen.

Definition:

Die Abbildung wird geometrisch definiert: Ein Quadrat wird zuerst gestaucht und dann gestreckt. Im nächsten Schritt wird der entstandene Streifen in die Form eines Hufeisens umgebogen (siehe Bild). Wird diese Vorschrift wiederholt angewandt, werden die meisten Punkte innerhalb des Ursprungsquadrates dieses verlassen haben und zu einem Fixpunkt in

¹⁴ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.3, Seite 177

einer der "Kappen" außerhalb des Quadrates konvergieren (grüne Bereiche im Bild). Die übrigen Punkte bilden bei wiederholter Iteration eine fraktale Menge.

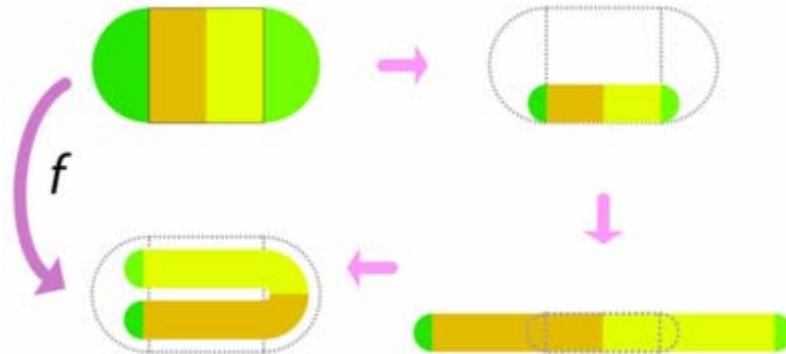


Bild 5: Ablauf einer Iteration in der Hufeisen-Abbildung.

III.III Hénon-Abbildung

Der französische Astronom Michel Hénon fand die folgende 2-dimensionale Abbildung, die sog. Hénon-Abbildung, die aus einer Vereinfachung der Lorenz-Gleichung der Meteorologie (eines der ersten dynamischen Systeme, in denen man chaotisches Verhalten gefunden hat) hervorgeht:

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

mit $a > 0$, $0 \leq b \leq 1$. Hierbei sind a und b die Kontrollparameter des Systems.

Die Hénon-Abbildung setzt sich aus insgesamt drei Elementarabbildungen Abb_k mit $k=1,2,3$ zusammen:

- nichtlineare Verbiegung der y -Koordinate: $Abb_1(x,y) = (x, 1 + y + ax^2)$,
- Kontraktion der x -Koordinate: $Abb_2(x,y) = (bx, y)$ für $0 < b < 1$,
- Spiegelung an der Hauptdiagonalen $y=x$: $Abb_3(x,y) = (y, x)$.

Es sei noch erwähnt, dass eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Abbildung die Selbstähnlichkeit ist. In einfachen Worten ausgedrückt verstehen wir darunter eine fraktale Vergrößerung eines beliebigen Teilbereichs, der wieder ähnlich zu seinem Anfangsobjekt ist.

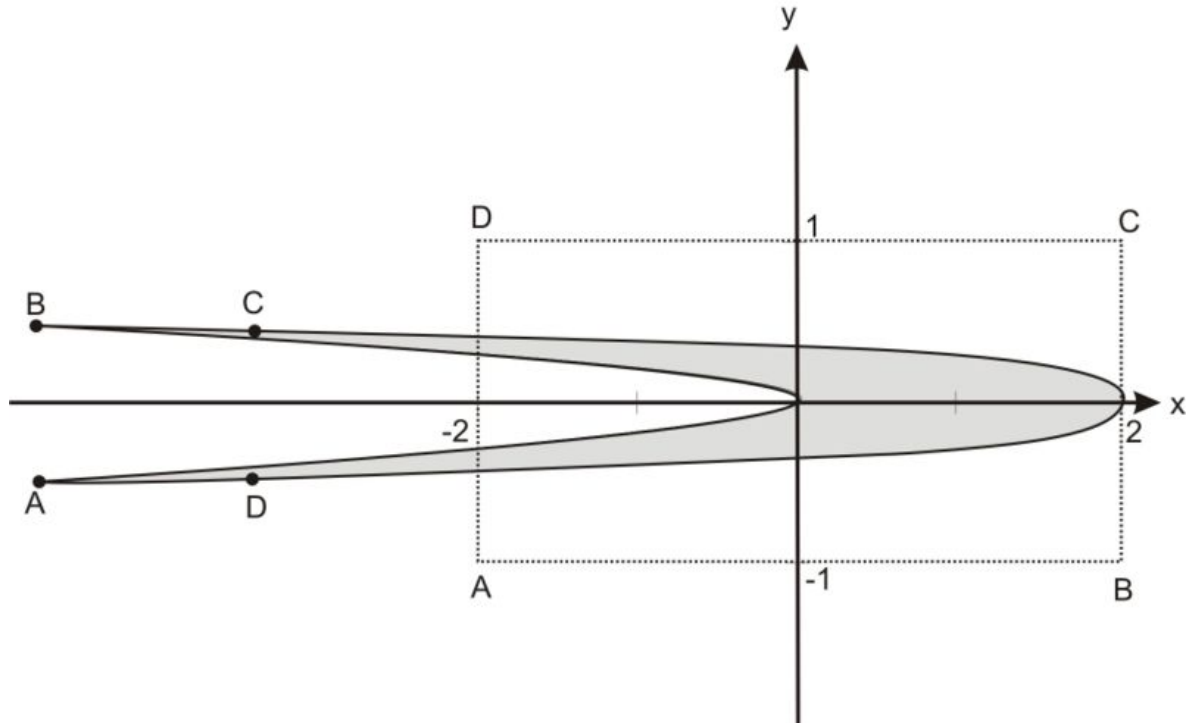


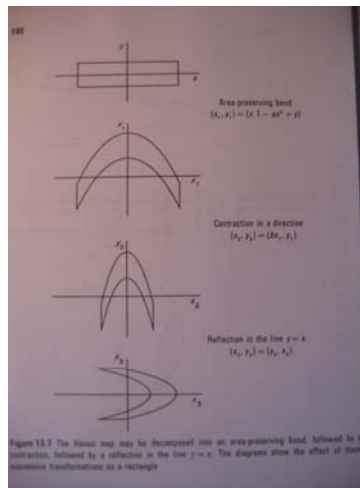
Bild 6: Hénon-Abbildung für die Parameter $a=1,4$ und $b=0,3$: hufeisenförmiges Gebilde

Die Hénon-Abbildung setzt sich aus insgesamt drei Elementarabbildungen zusammen:

- nichtlineare Verbiegung der y-Koordinate:

$$\text{Abb1}(x,y) = (x, 1 + y + ax^2),$$
- Kontraktion der x-Koordinate: $\text{Abb2}(x,y) = (bx,y)$ für $0 < b < 1$,
- Spiegelung an der Hauptdiagonalen $y=x$:

$$\text{Abb3}(x,y) = (y,x).$$

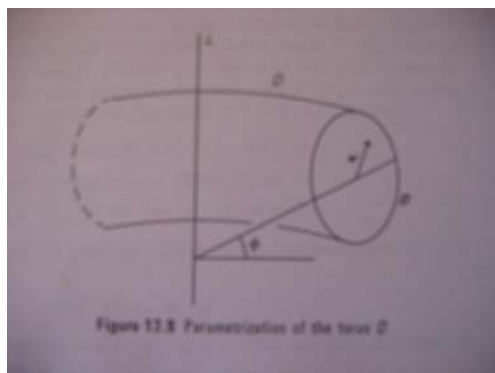
Bild 7: Die Veranschaulichung der Elementarabbildungen bei der Hénon-Abbildung¹⁵

III.IV Der Solenoid

Der Solenoid ist eine Menge die wir beispielsweise auf einem Torus finden. Ein Torus ist eine Form, die dadurch entsteht, dass eine Kreisscheibe B ganz um eine Achse L gedreht wird, wobei die Achse L nicht die Kreisscheibe schneidet. Hierbei entsteht ein Ring D (Doughnut) um die Achse L , welcher als Torus bezeichnet wird. Eine mögliche Parametrisierung hierfür lautet:

$$\{(\Phi, w) \in C \times B: 0 \leq \Phi < 2\pi, |w| \leq 1\}$$

wobei wir C als den Kreis beschreiben auf dessen Rand die Kreisscheibe B mit dem Mittelpunkt von B auf der Kreislinie von C um den Mittelpunkt von C rotiert und so D bildet¹⁶. Der Winkel Φ bezeichnet einen Punkt auf C und w einen Vektor in Relation zum Mittelpunkt von B .

Bild 8: Erstellen des soliden Torus¹⁷

¹⁵ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.3, Seite 180

¹⁶ Siehe auch Bild 8: Erstellen des soliden Torus

¹⁷ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.4, Seite 182

Nun definieren wir uns zu diesem Torus eine Funktion $f:D \rightarrow D$ mit

$$f(\Phi, w) = (2\Phi \pmod{2\pi}, aw + \frac{1}{2}\Phi^{\wedge})$$

mit einem Einheitsvektor Φ^{\wedge} auf B . f bildet D auf einen Schlauch mit Radius a ab, der 2 mal im Torus verläuft¹⁸. Bei der Abbildung $f^2(D)$ verläuft der daraus folgende Schlauch dann 4 mal im Ursprungstorus mit Radius a^2 und 2 mal im „doppelten Torus“ (oder Schlauch) der aus der Abbildung $f(D)$ entstand usw.

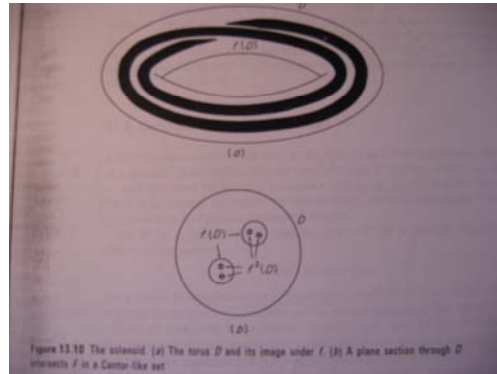


Bild 9: Der Solenoid im Torus¹⁹

Der Schnitt aller möglichen Ausführungen der Funktion f hintereinander angewandt auf D

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D)$$

wird Solenoid genannt und ist extrem fasrig, das heißt lokal schneidet F D in Cantormengen-ähnliche Teile. Außerdem ist ein Solenoid invariant bezüglich von f und zieht alle Punkte von D an.

Der Autor stellt auch eine Möglichkeit vor, die Dimension eines Solenoiden zu bestimmen. Hierbei sagt er, dass dies mit Routinemethoden getan werden kann. Zuerst wird die Konstruktion und die Darstellung des Solenoiden, die oben erwähnt, nochmals betrachtet. Hierbei sei P_{Φ} die Halbebene (half plane)²⁰ die durch die Achse L (siehe oben: Achse um die der Kreis gedreht wird und dadurch den Torus erzeugt) und durch einen Ausschnitt von C an Φ begrenzt wird. Es gilt, dass $f^k(C)$ eine glatte geschlossene Kurve ist, welche den Torus $2k$ mal mit maximaler Gesamtlänge von $2^k c$ durchquert, wobei c die Länge der Kreislinie (Konstante) von C und unabhängig von k ist ($f^k(C)$ kann nicht zu wild oszillieren – da der zwischen jeder Kurve $f^k(C)$ und jeder ist Halb-Ebene P existierende Winkel auch eine positive untere Schranke hat)²¹. Mit anderen Worten: $f^k(C)$ ist eine glatte geschlossene Kurve welche

¹⁸ siehe auch Bild 9: Der Solenoid im Torus

¹⁹ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.4, Seite 183

²⁰

²¹ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5, Seite 182

den Torus $2k$ mal durchquert. Daher ist $2^k c$ eine obere Schranke für deren Gesamtlänge, wobei c die Länge der Kreislinie von C ist.

Die Menge $f^k(D)$ kann, laut Falconer, als Verdickung der Kurve $f^k(C)$ zu einem Schlauch mit Radius a^k gesehen werden. Folglich kann dieser Schlauch durch eine Ansammlung von Kugeln mit Radius $2a^k$ abgedeckt werden, die in Intervallen mit Länge a^k entlang $f^k(C)$ verteilt werden.

Offensichtlich genügen $2 \times 2^k c a^{-k}$ Kugeln dafür, deshalb gilt ganz normal auch:

$$\dim_{\text{H}} F \leq \overline{\dim}_{\text{B}} F \leq s \text{ und } \mathcal{H}^s(F) < \infty \quad \text{für } s = 1 + \frac{\log 2}{-\log a}$$

Um eine genauere Annäherung für die Dimension zu erhalten, überprüfen wir die Schnitte $F \cap P_\Phi$ für jedes Φ .

Die Menge $f(D) \cap P_\Phi$ besteht aus zwei Scheiben mit Radius a , die bezüglich dem Mittelpunkt von B diametrisch gegenüberliegend von einander aufgestellt und deren Mitten halb getrennt in $D \cap P_\Phi$ liegen. Der Autor meint wohl, dass die Mitten der Tore im Schnitt getrennt sind, aber als einziger langer Torus aber doch zusammenhängend sind. Jede dieser Scheiben enthalten zwei weitere Scheiben $f^2(D) \cap P_\Phi$ mit Radius a^2 und mit den Mittelpunkten $1/2a$ auseinander liegend und so weiter (Scheibenweise Darstellung des aufgeschnittenen Torus).

Laut Falconer können wir eine Massenverteilung μ auf $F \cap P_\Phi$ so setzen, dass jede der 2^k Scheiben von $f^k(D) \cap P_\Phi$ die Masse 2^{-k} hat. Wenn $U \subset P_\Phi$ die Bedingung

$$a^k(1/2 - 2a) \leq |U| < a^{k-1}(1/2 - 2a)$$

erfüllt, dann unterteilt U höchstens eine der Scheiben von $f^k(D) \cap P_\Phi$, so dass gilt:

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = a^{k(\log 2 / -\log a)} \leq c_1 |U|^{\log 2 / -\log a}$$

wobei c_1 unabhängig von $|U|$ ist.

Nun benützt Falconer die folgende Massenabgrenzungsregel (Mass distribution principle)²²:

Sei μ eine Massenverteilung auf F und für eine bestimmte natürliche Zahl s seien $c > 0$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass gilt:

$$\mu(U) \leq c |U|^s$$

für alle Mengen U mit $|U| \leq \varepsilon$. Dann gilt auch $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ und

$$s \leq \dim_{\text{H}} F \leq \overline{\dim}_{\text{B}} F \leq \dim_{\text{B}} F^{23}$$

Es folgt aus dieser Massenabgrenzungsregel, dass gilt:

$$\mathcal{H}^{\log 2 / -\log a}(F \cap P_\Phi) \geq c_1^{-1}$$

Für den nächsten Folgerungsschritt wird die folgende Proposition²⁴ verwendet:

²² Nach K. Falconer, Kapitel 4, 4.2, Seite 60

²³ Beweis nach Falconer: Wenn $\{U_i\}$ eine beliebige Überdeckung von F ist und man die oben erwähnten Voraussetzung $\mu(U) \leq c |U|^s$ mit ihren Eigenschaften verwendet folgt: $0 < \mu(F) \leq \mu(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$. Wenn man nun daraus die Infimas $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \mu(F)/c$ (falls δ klein genug gewählt wurde) nimmt, folgt $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$. Da nun $\mu(F) > 0$ erhalten wir $\dim_{\text{H}} F \geq s$

Sei F eine Borel-Teilmenge in \mathbb{R}^2 und L_x sei die in der (x,y) -Ebene zur y -Achse parallele Gerade durch den Punkt $(x,0)$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap L_x) dx \leq \mathcal{H}^s(F)^{2^s}$$

Da F aus den Schnitten $F \cap P_\Phi$ (mit $0 \leq \Phi \leq 2\pi$) aufgebaut wird, folgt aus einer höherdimensionalen Dimensionsanpassung dieser Proposition, dass $\mathcal{H}^s(F) > 0$, wobei gilt: $s = 1 + \frac{\log 2}{-\log a}$. Wir schließen daraus dass $\dim_{\mathbb{H}} F = \dim_{\mathbb{B}} F = s$ und auch $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ gilt.

Wenn nun $\Phi/2\pi = 0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots$ zur Basis 2 gilt, folgt dass auch $f^k(\Phi, w) = (\Phi_k, v_k)$ gilt, wenn $\Phi_k/2\pi = 0 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \dots$ und wenn die Ganzzahl mit basis-2 Darstellung $a_k a_{k-1} \dots a_{k-d+1}$ gilt, die festlegt zu welcher der 2^d Scheiben von $f^d(D) \cap P_\Phi$ der Punkt v_k gehört.

IV Anwendungen

IV.1 Continuous dynamic systems (kontinuierliches dynamisches System)

Auf einem Definitionsbereich D in \mathbb{R}^n und sei eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion hat das Gleichungssystem

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(x)$$

eine Familie an Bahnen (Kurven) die D füllen. Für einen gegebenen Startpunkt $x(0)$ bleibt die Lösung auf der eindeutigen Kurve durch $x(0)$ geht. Laut Falconer kreuzen sich auch keine 2 solcher Kurven. Diese sind glatt auf D außer für die Punkte mit

$$\dot{x}(t) = f(x) = 0$$

wo die Bahnen Fixpunkte sind. Wie im diskreten Falle führen kontinuierliche Dynamische Systeme zu Fixpunkten, die dann entweder anziehende Punkte (Attraktoren) oder abstoßende Punkte (Repellers) sind.

Auf einem ebenen Definitionsbereich ist die Menge der Attraktoren für kontinuierliche Systeme sehr begrenzt, da die einzigen möglichen Attraktoren geschlossene Kreise und isolierte Punkte sind (x mit $f(x) = 0$).²⁶

²⁴ Nach K. Falconer, Kapitel 7, Proposition 7.9, Seite 105

²⁵ Beweis nach Falconer: Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ sei $\{U_i\}$ eine δ -Überdeckung von F so dass gilt:

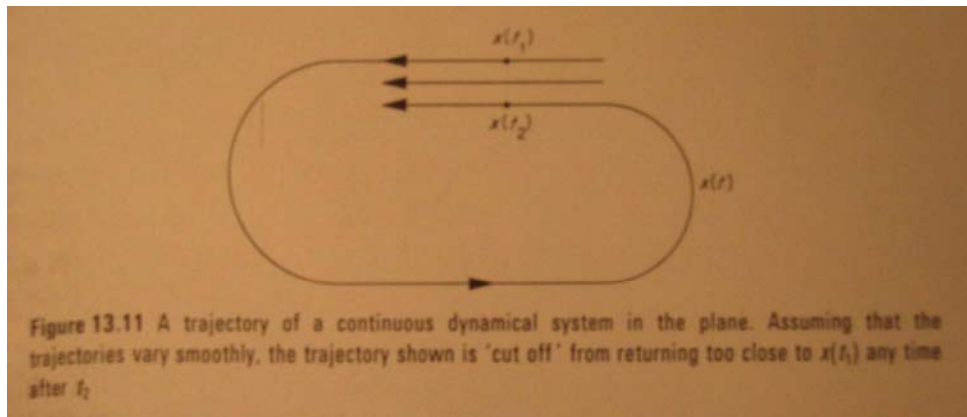
$\sum_i |U_i| \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) + \varepsilon$. Hierbei ist jedes einzelne U_i in einem Quadrat S_i enthalten mit Seiten $|U_i|$, die parallel zu den Koordinatenachsen sind. Sei χ_i die Indikatorfunktion von S_i . Für jedes x bilden die Mengen $\{S_i \cap L_x\}$ eine δ -Überdeckung von $F \cap L_x$ so dass gilt:

$\mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x) \leq \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-1} = \sum_i |U_i|^{s-2} |S_i \cap L_x| = \sum_i |U_i|^{s-2} \int \chi_i(x,y) dy$

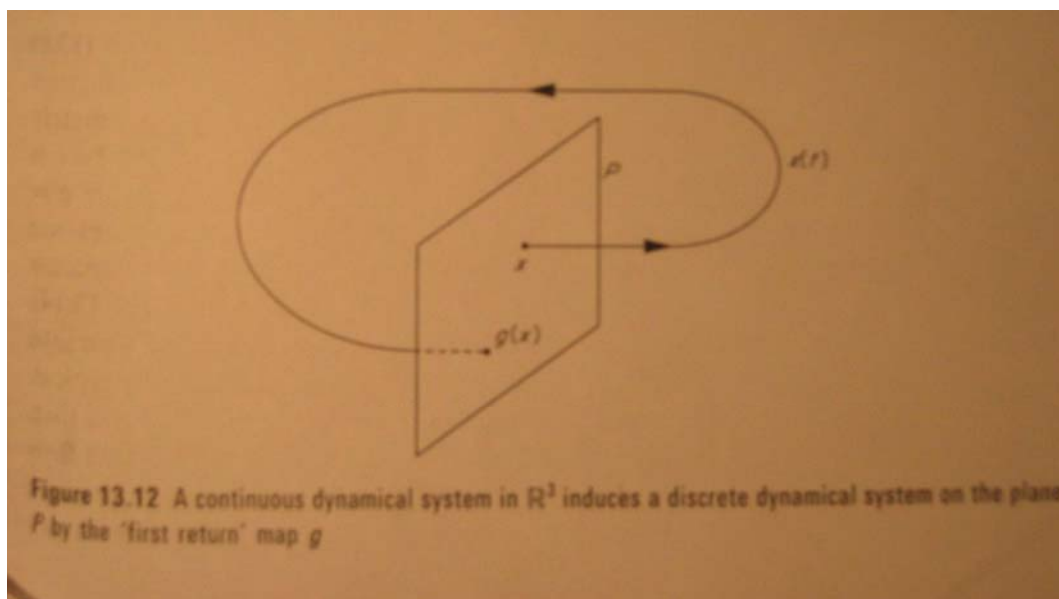
Hieraus folgt nun, dass: $\int \mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x) dx \leq \sum_i |U_i|^{s-2} \iint \chi_i(x,y) dx dy = \sum_i |U_i| \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) + \varepsilon$

Da nun $\varepsilon > 0$ beliebig ist folgt $\int \mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x) dx \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Wenn man nun $\delta \rightarrow 0$ folgt die Behauptung.

²⁶ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5 S.184

Bild 10 : Beispiel für ein Kontinuierliches dynamisches System²⁷

Lineare Gleichungssysteme haben den Vorteil dass sie komplett mit den klassischen Methoden gelöst werden können die dann periodische und exponentielle Terme mit einbeziehen. Sogar einfache nicht-lineare Terme können zu Flugbahnen mit sehr komplizierten Formen führen. Aber nicht-lineare Gleichungen höherer Dimensionen sind schwer zu analysieren weshalb man als einen der Standardansätze diese auf niedrigdimensionale Gleichungen zu reduzieren versucht.²⁸

Bild 11: Dreidimensionales Beispiel eines kontinuierlichen dynamischen Systems²⁹

Wie man auch sehr schön an den beiden Bildern sehen kann, gibt es chaotisches Verhalten nur bei 3 oder mehr Dimensionen.

²⁷ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5, Seite 185

²⁸ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5 S.185

²⁹ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5, Seite 185

Letztendlich besagt der Autor, dass man jedes kontinuierliche dynamische System für sich selbst untersuchen muss, da nicht genügend allgemeine Theorie zur Verfügung steht. All diese Dinge mit Attraktoren sind sehr dafür geeignet sie mit Computern zu berechnen und für die heutige Mathematik wird es immer mehr zur Herausforderung die dabei entdeckten merkwürdigen Attraktoren zu erklären.³⁰

Eines der am bekanntesten Beispiele für kontinuierliche dynamische Systeme mit fraktalen Attraktoren ist das Lorenzsystem der Gleichungen.

IV.II Der Lorenz-Attraktor

Das Lorenz Attraktor ist eine chaotische Abbildung, bekannt für seine Schmetterling Form. Die Abbildung zeigt, wie sich der Zustand eines dynamischen Systems (die drei Variablen eines dreidimensionalen Systems) mit der Zeit in ein komplexes, sich nicht wiederholendes Muster entwickelt. Dies wurde oft als sehr schön beschrieben. Der Attraktor selbst und die Gleichungen, von denen es abgeleitet wird, wurden von Edward Lorenz 1963 eingeführt, der ihn von den vereinfachten Gleichungen der Konvektionrollen ableitete, die in den Gleichungen der Atmosphäre entstehen.

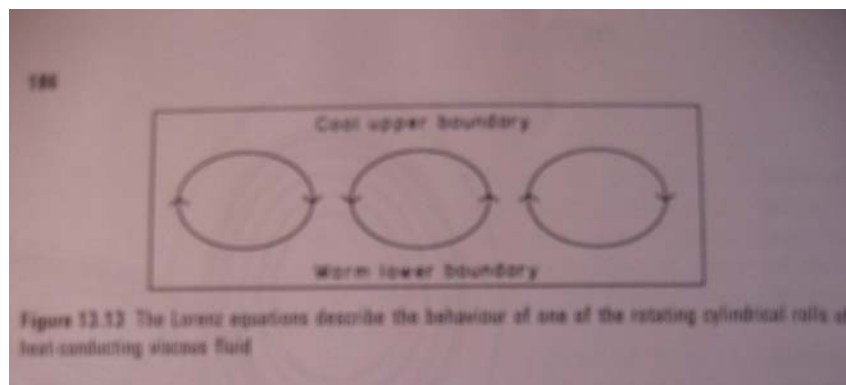


Bild 12: Veranschaulichung des Modells der Thermalen Bewegungen³¹

Von einem technischen Standpunkt ist das System nichtlinear, deterministisch und dreidimensional. 2001 wurde es von Warwick Tucker nachgewiesen, dass das System für eine bestimmte Menge an Parametern ein chaotisches Verhalten an den Tag legt und anzeigt, was heute als merkwürdiger Attraktor bezeichnet wird. Der merkwürdige Attraktor ist in diesem

³⁰ Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5 S.188

³¹ Aus K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5, Seite 186

Fall das Fraktal der Hausdorff-Dimension zwischen 2 und 3. Grassberger (1983) hat die Hausdorff-Dimension auf $2,06 \pm 0,01$ geschätzt und die Wechselbeziehungsdimension auf $2,05 \pm 0,01$. Das System entsteht in den Lasern, in den Dynamos und in den spezifischen Wasserrädern.

Die Gleichungen, die den Lorenz Attraktor regeln, sind:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y-x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho-z)-y \text{ und}$$

$$\frac{dz}{dt} = xy-\beta z$$

hierbei wird σ die Prandtl-Zahl genannt und ρ wird die Rayleigh-Zahl genannt. Alle $\sigma, \rho, \beta > 0$, aber normalerweise wählt man $\sigma=10$, $\beta=8/3$ und ρ ist veränderlich. Das System stellt chaotisches Verhalten zur Schau für $\rho=28$ zeigt aber auch geknotete periodische Bahnen für andere Werte von ρ . Beispielsweise mit $\rho=99.96$ wird es ein $T(3,2)$ Torusknoten.

Im Folgenden sieht man nun ein paar Veranschaulichungen des Lorenz Attraktors:

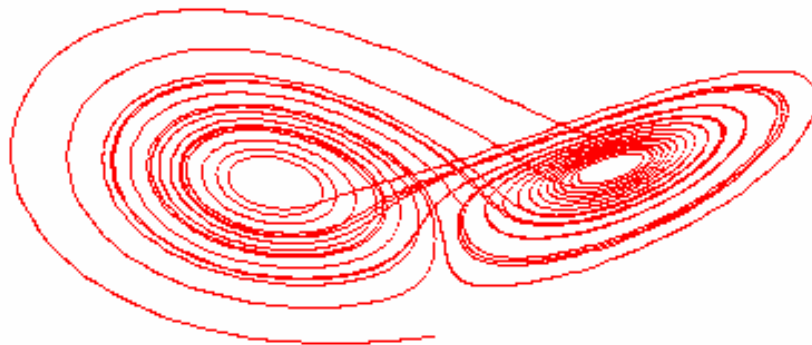


Bild 13 :Beispiel eines Lorenz-Attraktors³²

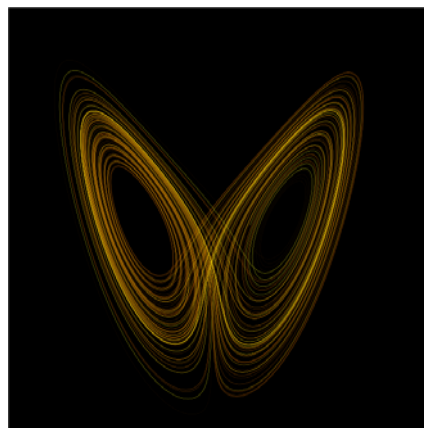
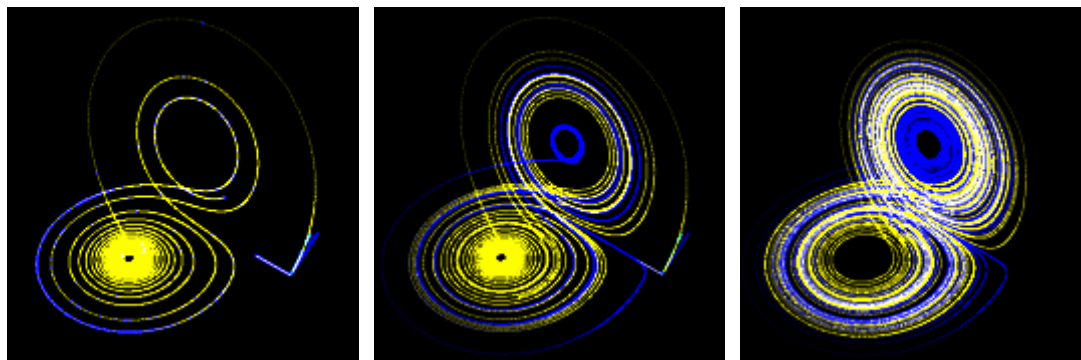


Bild 14: Flugkurve eines Lorenz Systems für die Werte $\rho=28$, $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$

³² Nach K. Falconer, Kapitel 13 – Dynamical Systems, 13.5, Seite 187



Zeit t=1

Zeit t=2

Zeit t=3

Bilder 15: Beispiele für die Lorenz Attraktoren in verschiedenen Zeitschritten

Diese Bilder, die mit den Werten $\rho=28$, $\sigma = 10$ and $\beta = 8/3$ gemacht wurden, zeigen drei Zeitsegmente der 3D-Entwicklung zweier Flugkurven (eine in Blau, eine in Gelb) des Lorenz Attraktors, die zwei verschiedene Startpunkte haben und sich lediglich um 10^{-5} im x-Wert unterscheiden. Anfänglich scheinen die beiden Flugkurven übereinstimmend zu sein (man sieht nur die gelbe) aber mit der Zeit wird der Unterschied deutlich.

IV.III Rössler-Attraktor

Ein weiteres Beispiel nach dem Lorenz Attraktor ist der Rössler-Attraktor (benannt nach Otto E. Rössler). Dieser ist ebenfalls ein seltsamer Attraktor, der durch das folgende Differentialgleichungssystem definiert wird:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -(Y + Z) \\ \dot{Y} &= X + aY \\ \dot{Z} &= b + XZ - cZ\end{aligned}$$

Die numerische Lösung sieht für Parameter $a=0.15$, $b=0.20$, $c=10.0$, 10000 Schritte, $dt=0.5$, wie folgt aus:

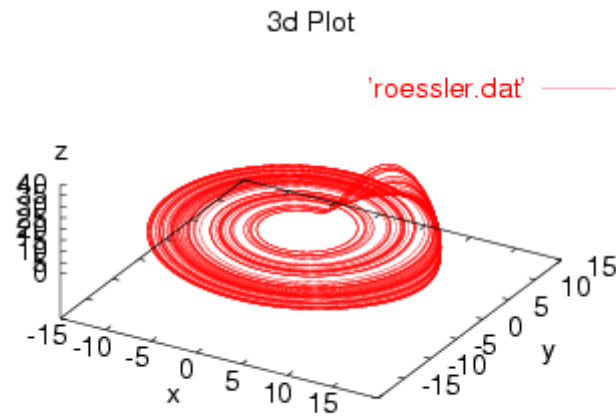


Bild 16: Beispiel einer Rössler Transformation

Laut Otto Rössler wurde dieses Modell durch die Betrachtung einer Bonbonknetmaschine (*taffy puller*) auf Coney Island inspiriert, die ihre Toffeemasse wiederholt dehnt und faltet.