Lokale Strukturen von Fraktalen

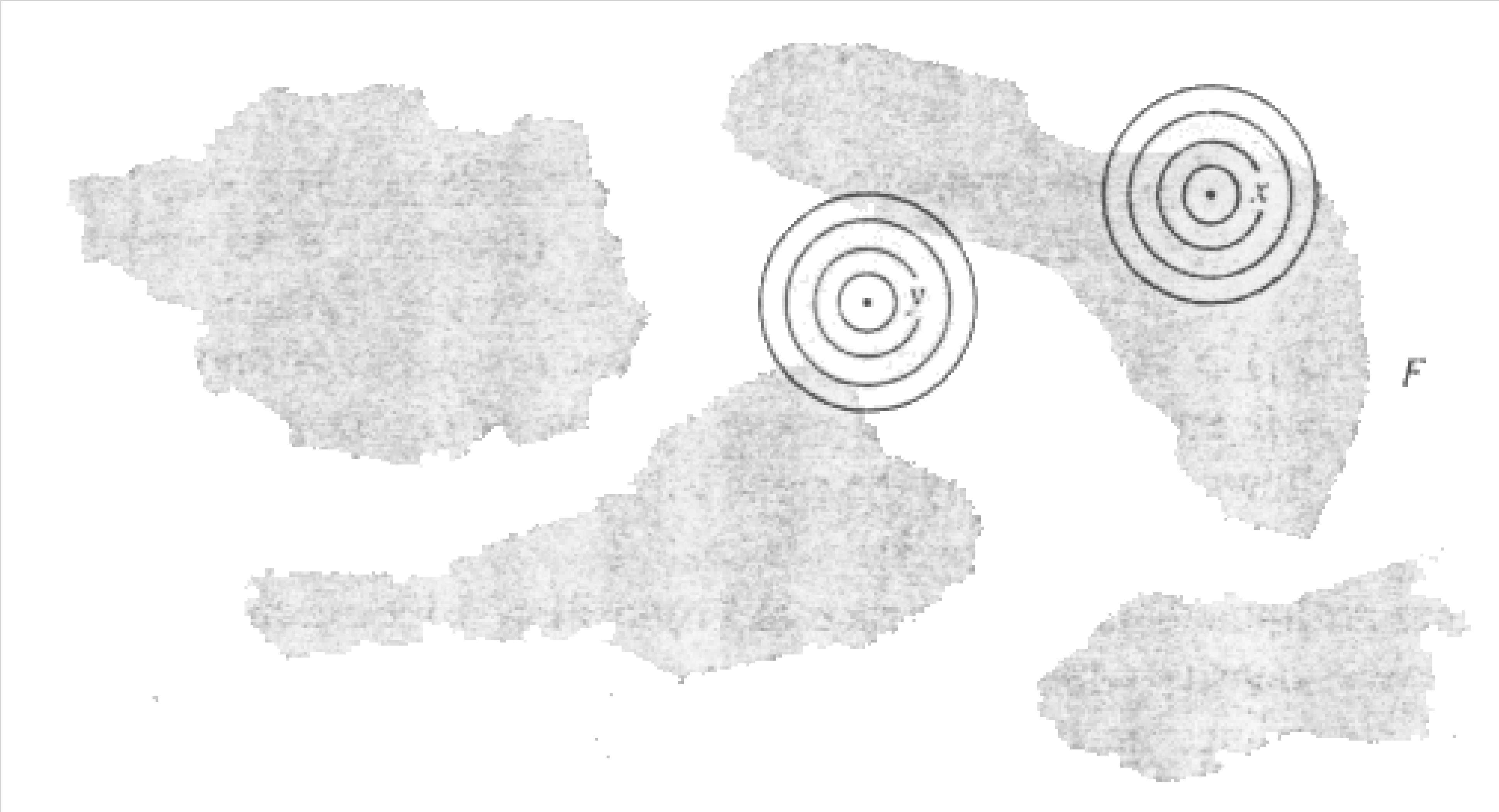
Michael Feiri

Übersicht

- Vorbemerkung: s-Mengen
- Dichte
- Regularität
- Dekomposition von 1-Mengen
- Regularität von 1-Mengen
- Tangenten auf s-Mengen

Vorbemerkung

- s-Mengen (s-sets)
  - Definition: Borelmengen mit Hausdorffdimension s und positivem finitem s-dimensionalen Hausdorffmaß.



Dichte

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{area}(F \cap B(x,r))}{\mathrm{area}(B(x,r))}$$

Dichte

- Je für einen Punkt x einer Borel Menge F, wobei B(x,r) eine kreisförmige Nachbarschaft mit dem Radius r um x beschreibt. Siehe Lebesgue Maß.

- In Analogie dazu kann Dichte für s-Mengen mit Hilfe des Hausdorff Maß konstruiert werden (für 0<s<2)

$$\lim_{r \to 0} \frac{\text{area}(F \cap B(x,r))}{\text{area}(B(x,r))} = \lim_{r \to 0} \frac{\text{area}(F \cap B(x,r))}{\pi r^2}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\text{length}(F \cap B(x,r))}{\text{length}(B(x,r))} = \lim_{r \to 0} \frac{\text{length}(F \cap B(x,r))}{2r}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x,r))}{B(x,r)^s} = \lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x,r))}{(2r)^s}$$

Dichte

- Aber eine solche Dichte existiert nicht immer

$$\overline{D}^s(F,x) = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mathcal{H}^s(F\cap B(x,r))}{(2r)^s}$$

$$\underline{D}^s(F,x) = \underline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mathcal{H}^s(F\cap B(x,r))}{(2r)^s}$$

- Dichte existiert nur, wenn

$$\underline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(F,x)$$

Regularität

- Ein Punkt x wird als regulärer Punkt von F bezeichnet wenn

$$\underline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(F,x) = 1$$

- Irregulär sonst

- Eine s-Menge wird als regulär bezeichnet, wenn fast alle Punkte (mit Ausnahme einer Menge von Punkten mit $\mathscr{H}^s = 0$) regulär sind oder irregulär wenn fast alle ihre Punkte irregulär sind.

    - Nicht regulär $\neq$ Irregulär

Regularität

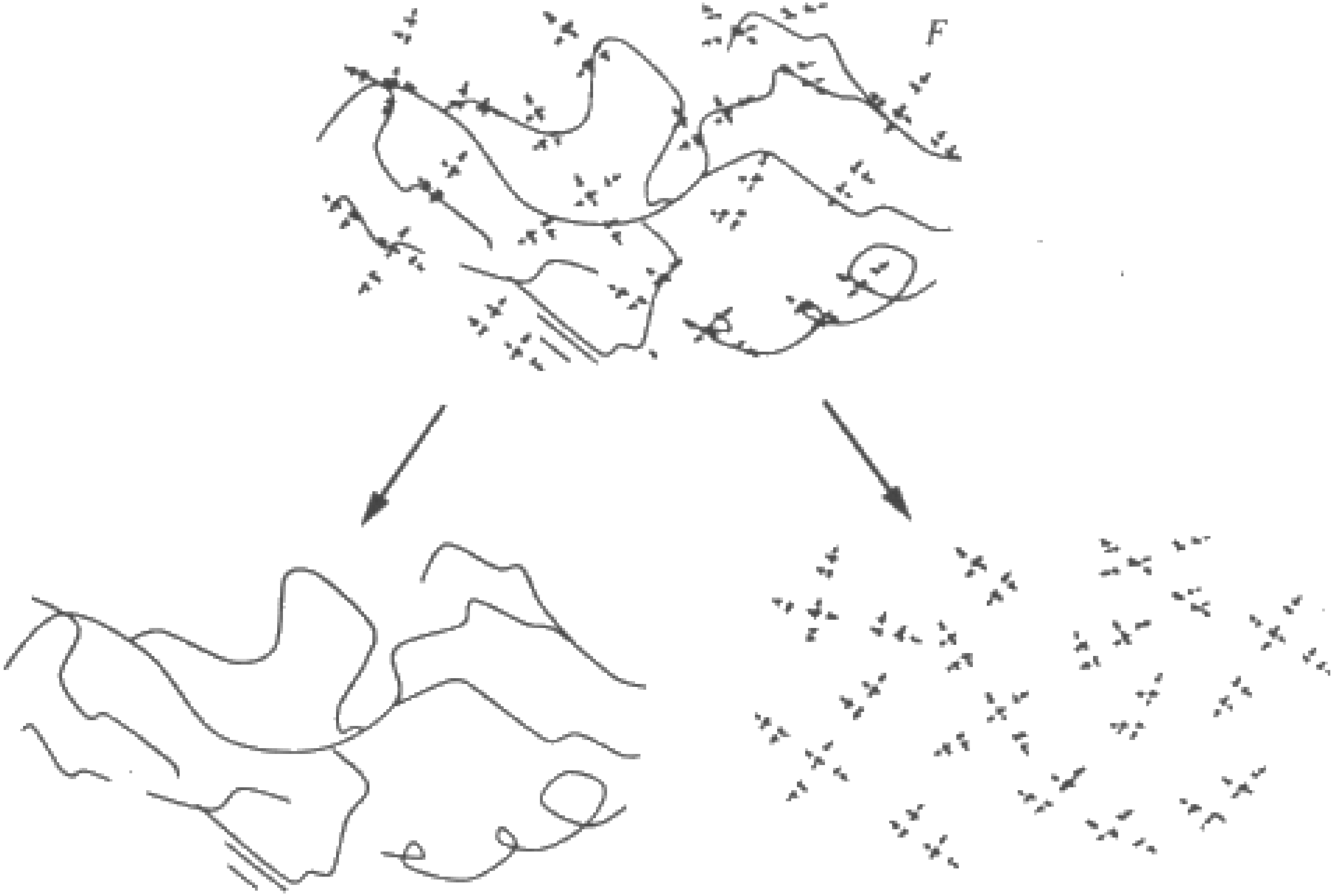
- Sei F eine s-Menge in $\mathbb{R}^n$, dann gilt für $\mathcal{H}^s$-fast alle $x \notin F$

$$\underline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(F,x) = 0$$

- Beweis: Klar, denn für kleine r geht $F \cap B(x,r) = \varnothing$ also

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x,r))}{(2r)^s} = 0$$

- **Eine s-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist immer irregulär wenn s keine Ganzzahl ist.**
    - Annulusbeweis nur für $0 < s < 1$ □



Dekomposition | Aufteilung einer 1-Menge

Dekomposition

- **Die regulären Punkte einer 1-Menge bilden eine reguläre Menge und die irregulären Punkte bilden eine irreguläre Menge.**

- Beweis: Sei E eine Borel Untermenge einer s-Menge F, dann gilt

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B(x,r))}{(2r)^2} = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))}{(2r)^2} + \frac{\mathcal{H}^s((F \setminus E) \cap B(x,r))}{(2r)^2}$$

- wobei für fast alle x in E gilt, daß für r → 0

$$\frac{\mathcal{H}^s((F \setminus E) \cap B(x,r))}{(2r)^2} \to 0$$

Dekomposition

- Daher kann für $\mathscr{H}^s$-fast alle x in E gelten, daß

$$\underline{D}^s(F,x) = \underline{D}^s(E,x) \qquad \overline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(E,x)$$

- Für E wählt man nun jeweils die regulären beziehungsweise die irregulären Punkte einer 1-Menge und erkennt, dass die Dichte durch Dekomposition nicht verändert wird. □

Regularität von 1-Mengen

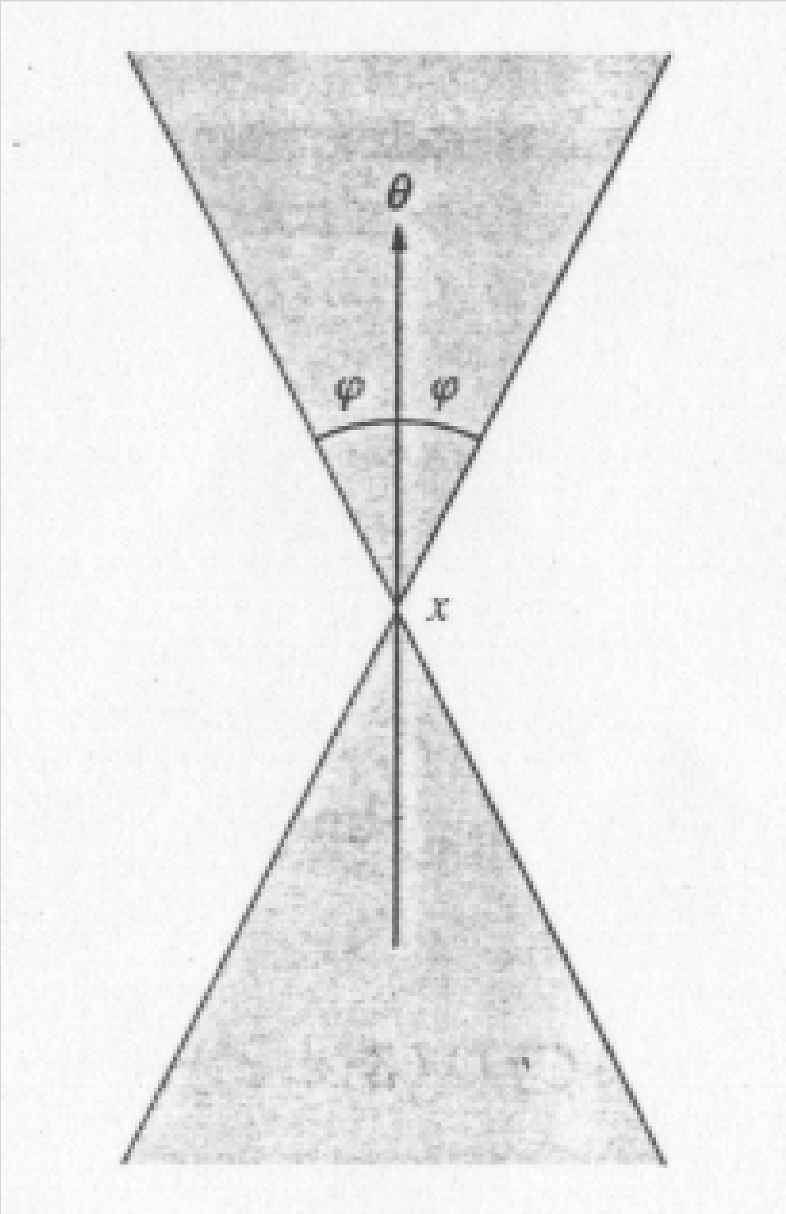
- Für eine rektifizierbare Kurve C ist $\mathscr{H}^1(C) = \mathscr{L}(C)$ die Länge der Kurve C.
- Eine rektifizierbare Kurve ist eine reguläre 1-Menge
- Eine kurvenähnliche 1-Menge ist eine reguläre 1-Menge
- Eine irreguläre 1-Menge ist kurvenfrei
- **Eine 1-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist irregulär gdw. sie kurvenfrei ist**
- **Eine 1-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist regulär gdw. sie eine Vereinigung einer kurvenähnlichen Menge und einer Menge mit $\mathscr{H}^1$=0 ist**

Tangenten auf s-Mengen

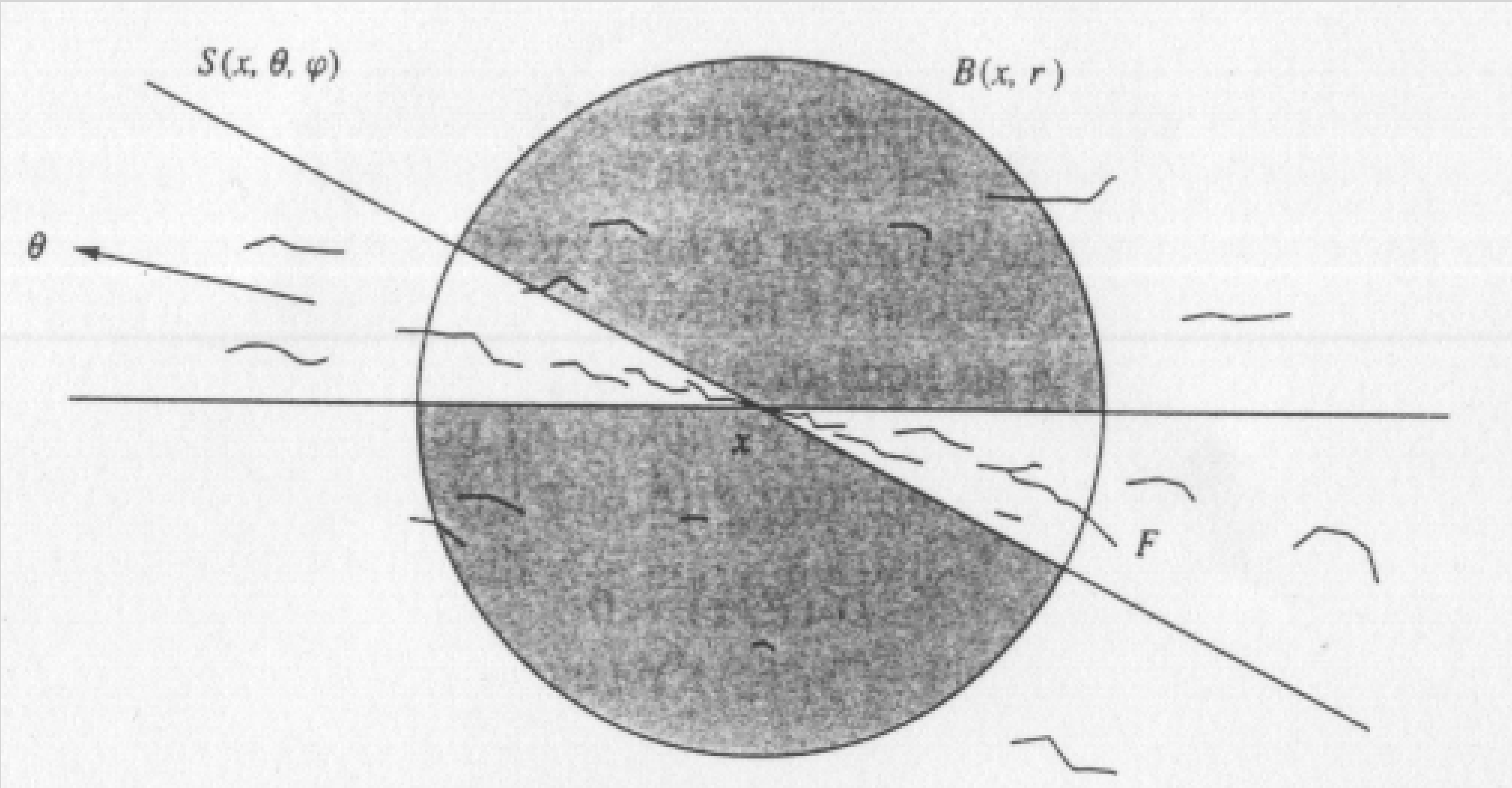
Eine s-Menge F in $\mathbb{R}^2$ besitzt an einem Punkt x eine Tangente in Richtung θ wenn gilt, daß

$$\overline{D}^s(F,x) > 0$$

und daß sich innerhalb eines Umkreises B(x,r) nur ein geringer Teil von F außerhalb eines Doppelsektor S(x,θ,φ) befindet.



Doppelsektor S(x,θ,φ)



$$\lim_{r \to 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap (B(x,r) \setminus S(x,\theta,\varphi))) = 0$$

Tangente in Richtung θ

Tangenten auf s-Mengen

- Eine rektifizierbare Kurve C besitzt eine Tangente auf fast jedem ihrer Punkte
- Eine reguläre 1-Menge in $\mathbb{R}^2$ besitzt Tangenten auf fast allen ihren Punkten
- Auf fast allen Punkten einer irregulären 1-Menge existiert keine Tangente
- Auf fast allen Punkten einer s-Menge in $\mathbb{R}^2$ mit $1 < s < 2$ existiert keine Tangente

Danke für die Aufmerksamkeit

Quellen

- K. Falconer. „Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications“ 2nd Ed., Wiley 2003